ALGUMAS CONTRIBUIÇÕES AO ESTUDO DAS GEOMETRIAS APÓS A PUBLICAÇÃO DO *GRUNDLAGEN DER GEOMETRIE* DE DAVID HILBERT

Daniel Felipe Neves Martins

Professor Colégio Pedro II
dfnmartins@ufrj.br

Ricardo Silva Kubrusly

Professor HCTE/UFRJ
risk@ufrj.br

O mundo acadêmico se surpreendeu com o discurso *Über der Grundlagen der Geometrie* e logo após, com a publicação do livro *Grundlagen der Geometrie*, de David Hilbert no inverno de 1898-99 em Göttingen, Alemanha, por ocasião do Festschrift em homenagem a Gauss e a Wilhem Weber.

Após anos de estudos com resultados importantes em Teoria dos Invariantes Algébricos e Teoria dos Números que culminou com a publicação do clássico texto intitulado *Zahlbericht*, Hilbert dedica-se mais intensamente à geometria, com uma expressiva coletânea de resultados na área. Lecionou diversos tópicos desta disciplina nos cursos de graduação da Universidade de Göttingen que tiveram como referenciais teóricos a geometria projetiva e ideias importadas do programa de Erlangen, proposto por Felix Klein. Foram ao todo 14 cursos ministrados e todos com notas de aula completíssimas, como as 109 páginas que compõem o curso de geometria projetiva que lecionou em 1891¹.

Passando por Euclides e pelos matemáticos que se dedicaram a consolidação das teorias formais concernentes às geometrias não euclidianas, Hilbert demonstrou ser possível, a partir do conceito de *estrutura*, apresentar um modelo que continha noções primitivas e um conjunto de regras que, ao serem manipuladas corretamente, produziam verdades irrefutáveis. Estas verdades fundamentariam a geometria euclidiana desde que fosse possível mostrar que as tais noções

primitivas, chamadas axiomas, fossem completos, independentes e consistentes. Tais verdades incontestáveis são conhecidas por teoremas.

Para provar a completude e a consistência da geometria euclidiana, assim como provar a independência dos axiomas destacados, Hilbert estabeleceu uma solidariedade lógica entre a aritmética dos números reais e geometria analítica: uma espécie de homeomorfismo lógico entre estes dois campos da matemática, envolvendo uma *álgebra* específica em $\mathbb{R}$. A justificativa para que a construção formal do método criado por Hilbert fosse embasado na aritmética, era o fato dela ser aceita como consistente pelos matemáticos. Assim sendo, achamos que fica claro o uso do termo *solidariedade lógica* para mostrar que qualquer contradição existente na aritmética, deveria produzir também uma contradição na geometria, uma vez que estes dois ramos da matemática estariam relacionados um a um (no mesmo sentido de injetividade de funções). Nas relações lógicas do tipo um a um, havendo contradição em uma teoria, há na outra. Desta maneira, sendo possível relacionar a geometria com uma teoria comprovadamente consistente na forma um a um, a sua consistência estaria provada. Hilbert construiu tal relação e a defendeu em seu livro².

Em poucos meses a obra tornou-se um best seller no meio acadêmico, sendo traduzido imediatamente para o inglês e posteriormente para o francês. O *Grundlagen* de Hilbert passou a ser visto por muitos estudiosos como o texto que possivelmente iria acabar com a hegemonia do texto de Legendre pelo mundo cujas bases acadêmicas se espelhavam no pensamento ocidental europeu. A obra de Hilbert produziu uma reviravolta no pensamento geométrico dos matemáticos, filósofos e lógicos, e estabeleceu novos rumos para os quais os estudos formais sobre as geometrias tenderiam. Hilbert apresenta a *Geometrie der Anschauung* (geometria intuitiva) com base na geometria projetiva e na topologia; investiga através da *Axiome der Geometrie* quais axiomas são usados na geometria intuitiva, estabelecendo sempre que possível um confronto entre esta e as geometrias em que alguns desses axiomas não são válidos e com base na *Analitik Geometrie* (geometria analítica) mostra que números quando associados a pontos e retas tiram o caráter intuitivo da geometria, podendo reduzi-la à análise.

As críticas ao texto de Hilbert foram inúmeras e de diversas naturezas, mas mesmo assim contribuíram muito para os crescentes e contínuos estudos acerca dos fundamentos das geometrias. É certo que a matemática contida no texto e o inquestionável respeito que Hilbert possuía no mundo acadêmico faziam com que a obra fosse lida, relida e interpretada sob as mais diferentes óticas.

Uma novidade apresentada por Hilbert no *Grundlagen* foi a apresentação de diferentes e difíceis conceitos geométricos associados aos conceitos de álgebra abstrata e análise matemática ilustrando este bonito episódio da história da matemática, em especial da história da geometria, a partir do final do século XIX.

Desde os cursos de geometria ministrados por Hilbert no ano de 1894 é possível observar claramente em suas notas de aula (disponíveis no acervo da Universidade de Göttingen) sua forte veia estruturalista cuja aplicação em seus trabalhos mostrava claramente o que ele compreendia por *estrutura lógica da geometria*. Neste período, as notas de aula de geometria de Hilbert apresentavam fortes influências de Pasch, Peano e Von Staudt. A obra de Von Staudt que mais influenciou Hilbert foi *Geometrie der Lage*, um livro de geometria projetiva sem a presença de alguma figura e inteiramente caudado na construção lógica dos resultados. Há alguns autores que afirmam que somente após a publicação do *Grundlagen* é possível identificar em seus textos a presença do formalismo e do estruturalismo, sendo ele anteriormente visto como um matemático empirista, isto é, um matemático que concebia a geometria como resultado da observação e da experiência. É fato que pós *Grundlagen*, uma axiomatização adequada para Hilbert era aquela que permitisse derivar todos os teoremas ou resultados conhecidos da disciplina em questão a partir de um corpo de axiomas independentes, consistentes e completos, mas desde Euclides a geometria foi organizada a partir desta concepção. Hilbert fez uma “arrumação na casa”. Os axiomas apresentados no *Grundlagen* permitiram demonstrar ou construir resultados tanto da geometria euclidiana quanto resultados das geometrias não euclidianas e o êxito das demonstrações dependeria somente da escolha correta do sistema de axiomas em que a geometria destacada (ou a teoria, que seja) se baseasse. É a aplicação clara da construção de sentenças com valores lógicos verdadeiros a partir da manipulação lógica dos axiomas escolhidos.

No primeiro momento, a impressão que o texto de Hilbert deixa é uma tentativa de algebrização da geometria, mas esta ideia se desfaz com a análise da obra. Os interesses de Hilbert com o *Grundlagen* se mostraram diversos. Com sua obra, Hilbert:

(1) reuniu uma quantidade mínima de axiomas, enfatizando que um axioma é uma verdade “que carrega uma só ideia”, o que demonstra a simplicidade de seu sistema axiomático;

- (2) mostrou a independência mútua entre os grupos de axiomas e não entre axiomas individuais de diferentes grupos;
- (3) enfatizou que os axiomas escolhidos deveriam dar origem a todos os teoremas, sejam eles básicos ou complexos como o Teorema de Pappus e o Teorema de Désargues;
- (4) classificou premissas necessárias para a construção de uma geometria de coordenadas que representasse a geometria projetiva, tarefa iniciada anteriormente por outros matemáticos, porém não concluída;
- (5) buscou uma *estrutura* (segundo o conceito de estrutura de Klein) para cada teoria conhecida e descreveu as leis que regeriam esta estrutura e
- (6) criou um método claro que determina a compatibilidade, a independência e a não contradição dos axiomas que regiam a estrutura.

Ao contrário do que muitos leitores podem pensar, Hilbert não passou aplicar o método axiomático a partir da publicação do *Grundlagen*, nem abandonou a Teoria dos Números como tantos autores sugerem, ele apenas aplica todo o formalismo advindo de sua prática como algebrista e analista, na geometria.

Esta forma de interpretação da geometria via construção axiomática contida no *Grundlagen der Geometrie* é oposta ao caráter empiricista conferido às geometrias por muitos matemáticos. Após a publicação do *Grundlagen* resultados expressivos e relevantes para a matemática e para a filosofia da matemática puderam ser destacados. Todos os resultados que listaremos a seguir tiveram a obra de Hilbert como incentivadora. São eles:

- (a) a Geometria Racional de Halsted que foi aplicada nas escolas secundárias alemãs. Este texto, totalmente baseado no *Grundlagen* de Hilbert foi traduzido para o francês por Barbin em 1911;
- (b) as críticas de Schur (*Über das dritte Hilbertsche Axiom der Verknüpfung*, de 1907) propondo a reescritura do texto de Hilbert;
- (c) as críticas de Rosenthal sobre os axiomas de incidência;
- (d) o detalhamento sobre falhas e sucessos relativos aos axiomas de congruência nos trabalhos de Meyer (*Über die Kongruenzaxiome der Geometrie*, de 1911);

- (e) os resultados de Rosemann (*Der Aufbau der ebenen Geometrie ohne das Symmetrieaxiom*, de 1923) e Schmidt (*Die herleitung der Spiegelung aus der ebenen Bewegung*, de 1934) que completam as demonstrações esboçadas por Hilbert no apêndice II do *Grundlagen*, sobre congruência de triângulos e posteriormente sobre as geometrias fundamentadas somente nos axiomas de incidência;
- (f) a criação da Geometria de Hassenberg (*Begründung der elliptischen Geometrie*, de 1905);
- (g) as questões da continuidade associadas aos teoremas de Légendre com a construção da Geometria Semi Euclidiana de Dehn;
- (h) as questões filosóficas envolvendo a continuidade e o axioma da integridade;
- (g) a Teoria dos Segmentos Proporcionais de J. P. Mollerup (*Die Lehre Von die Geometrischen Proportionen*, de 1903) que usa os mesmos axiomas de Hilbert, exceto o axioma de continuidade;
- (i) os estudos relativos a área de polígonos presentes no artigo de A. Finzel no *Mathematische Annalen* 72, de 1912 (*Die Lehre vom Flächeninhalt in der allgemeinen Geometrie*);
- (j) os trabalhos de Dehn, Kagan, Bricard, Sydler, entre outros sobre volumes de poliedros;
- (k) os fundamentos da geometria segundo Hjelmslev e Schur;
- (l) a independência do axioma das paralelas e
- (m) a fundamentação das geometrias não desarguesianas.

Estes textos contribuíram sempre positivamente para a matemática, seja através do estabelecimento de críticas ou de propostas de novos convites ao raciocínio. Seja por uma construção de uma nova epistemologia da geometria de Euclides seja por reformular radicalmente as bases que fundamentam a geometria euclidiana. Note que nem todos os matemáticos aceitaram o trabalho de Hilbert e apontaram erros de natureza filosófica e lógica, propondo até mesmo um novo texto como Schur, Rosenthal e Meyer. Outros tantos completaram demonstrações matemáticas com o intuito de deixarem o texto mais formal. Novas geometrias surgiram como a de Hassenberg e de Dehn, que contém diferentes sistemas de axiomas, porém todos inspirados na obra de Hilbert. A “teoria das áreas de polígonos esféricos de Dehn” se baseia em considerações topológicas simples, em particular no teorema de Euler relativo aos poliedros: a decomposição de polígonos esféricos em polígonos parciais, o excesso do polígono total é igual a soma dos excessos dos polígonos parciais. Isto é, dois polígonos equicomplementares têm excessos iguais. Para nós, o principal legado, além

do olhar axiomático dado a geometria, claro, foi a possibilidade de aglutinar diferentes ramos da matemática em torno de um assunto de maneira clara, formal e de vanguarda.

---

¹ Hilbert lecionou geometria analítica no verão de 1893/1894 e depois no verão de 1894/1895. No livro *Projektive Geometrie* Hilbert escreve: “*Die Geometrie ist die Lehre von Eigenschaften des raumes (...) Sie beruht auf dem einfachsten Experiment, was man machen kann, nämlich auf dem Zeichnen.*” “Geometria é a teoria das propriedades do espaço (...). ela é baseada no mais simples experimento que pode ser realizado desenho.”

² Convidamos o leitor a ler a tese de doutorado de Daniel F. N. Martins que destaca, entre tantos outros assuntos, como Hilbert criou o seu método. A tese foi apresentada ao programa de HCTE da UFRJ, sob a orientação do prof. Ricardo Kubrusly.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- CASSOU-NOGUÈS, P. *Hilbert*. Les Belles Lettres. 2eme tri, 2004
- BOURBAKI, N. *Éléments d'histoire de Mathematiques*. Hemann, Paris, 1969
- HILBERT, D. *Grundlagen der Geometrie*. Springer Verlag., 1899
- HILBERT, D. *Grundlagen der Mathematik*. Vrin. 1922
- HILBERT, D. *Les fondements de la géometrie*. Éd.Critique par Paul Rossier.Dunod, 1971.
- REID, C. *Hilbert*. Berlin. Springer Verlag, 1970.
- WEYL, H. *David Hilbert and his Mathematical work*. Bul.AMS, t.50, pp.612-54.