UMA PROVA DE CONSISTÊNCIA

Felipe Sobreira Abrahão
Mestrando do HCTE/UFRJ
felipesabrahao@gmail.com

1. INTRODUÇÃO

Demonstradas por Kurt Gödel em 1931, a incompletude da PA (ou *teoria formal dos números* ou *aritmética*) e a indecidibilidade da consistência nos diz, respectivamente, que não é possível sempre demonstrar dentro de PA que uma fórmula é verdadeira ou que é falsa (isto é, A ou que $\neg A$, onde A é uma fórmula na linguagem de PA), nem que a própria teoria é consistente. O primeiro é o Primeiro Teorema da Incompletude e o seguinte, o Segundo Teorema da Incompletude. É importante lembrar que esses dois teoremas partem da hipótese de que PA seja consistente. Então, por exemplo, o segundo teorema da incompletude assevera que se a aritmética for consistente, então ela não consegue demonstrar que ela mesma é consistente. O sistema axiomático usado por Gödel para os números se baseia em regras de inferência dedutivas, das quais é possível definir a própria demonstrabilidade de uma expressão dentro da teoria formal dos números, ou seja, é possível construir uma sentença na linguagem de PA – chamemos de $Pr_T[\varphi]$ - que diz (representa) que uma fórmula φ é demonstrável pela teoria T. Logo, para qualquer fórmula φ demonstrável em PA, PA também demonstra $Pr_{PA}[\varphi]$.

Gerhard Gentzen, em 1936, construindo um sistema lógico – vamos chamá-lo de PA_∞ – para a aritmética mais poderoso que a teoria formal dos números, consegue demonstrar, dentro de PA_∞, não só que PA_∞ é consistente e completo, como também, que a PA é consistente. No livro Introduction to Mathematical Logic, escrito por Elliott Mendelson, no qual se baseia este presente artigo, pode-se encontrar tal demonstração na versão do *Kurt Schütte* (1951). Ambas as demonstrações se dão por indução transfinita sobre os ordinais.

A diferença central de PA_∞ para PA está na infinite induction rule, uma regra de inferência infinitária que nos permite obter uma conclusão a partir de infinitas premissas. Com ela, tornamos tal novo sistema lógico para a aritmética não dedutivo, ou seja, que não pode ser reduzido às regras dedutivas clássicas.

Mostraremos a versão do Schütte (1951) sobre a demonstração do Gentzen (1936) da consistência da aritmética. Tanto PA quanto PA_∞ são sistemas axiomáticos numa lógica de primeira ordem, porém, possuindo regras de inferência e axiomas distintos. Alguma familiaridade com as noções e definições de lógica de primeira ordem e de matemática talvez seja necessária para o leitor do presente artigo.

2. DESENVOLVIMENTO

Dizemos que uma fórmula atômica fechada é *correta* se ela for demonstravelmente verdadeira por PA e, inversamente, dizemos que uma fórmula atômica fechada é *incorreta* se ela for demonstravelmente falsa por PA. Note que o conjunto $\{\varphi | \varphi \text{ é uma fórmula atômica fechada correta}\}$ é recursivo, isto é, um computador pode decidir se uma fórmula pertence ou não a esse conjunto. Para isso bastar ter em mente que uma fórmula atômica fechada é sempre da forma $s = t$, onde s e t são termos fechados – um termo fechado é aquele composto somente por símbolos constantes, ou seja, sem variáveis livres, e pelas operações usuais de sucessor, soma e produto.

Uma fundamental diferença está nos axiomas de PA para os de PA_∞. Estes são compostos por todas as fórmulas atômicas fechadas corretas e a negação de todas as fórmulas atômicas fechadas incorretas. O que nos leva a um sistema com infinitos, em particular, enumeráveis, axiomas. Outro ponto importante, apesar de não necessário para a construção de PA_∞, é que se toma, por hipótese, a verificação se uma fórmula atômica fechada é correta ou incorreta como sempre possível e definida. De fato, PA, por exemplo, sempre pode decidir por processos recursivos (isto é, por demonstrações dedutivas) se uma fórmula atômica fechada é correta ou incorreta – assim como, um computador, como mencionado acima. Mas tal consideração não é necessária para a construção de PA_∞ e dos seus axiomas, pois basta apenas tomarmos tais infinitos axiomas como ponto de partida, independentemente de ter algo os verificando ou não.

As regras de inferência de PA_∞ não são iguais às de PA (estas últimas são as regras dedutivas clássicas que estamos acostumados). No entanto, a menos da *infinite induction rule* (denotada por IIR), o conjunto de regras e axiomas de PA_∞ é equivalente ao de PA. Por isso, iremos nos abster de explicar todas elas. O grande ganho que tal novo sistema obtém em cima do sistema dedutivo clássico está na IIR, definida, na notação de Dedução Natural, por:

$$\frac{A(0) \vee D \quad A(1) \vee D \quad A(2) \vee D \ \dots \ A(n) \vee D \ \dots}{\forall x A(x) \vee D},$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{A(n) \vee D, \ \text{para todo } n \text{ natural}}{\forall x A(x) \vee D},$$

onde $A(x)$ e D são fórmulas na linguagem de PA_∞. Ou em outros termos, se demonstramos $A(x) \vee D$ para $x = 0, x = 1, x = 2, \dots, x = n, \dots$, então podemos obter $\forall x A(x) \vee D$. Por isso, faz sentido também dizer que $PA_\infty = PA + IIR$. Apesar de parecer que essa regra seja sempre válida, não importando que interpretação fizermos de PA, existem modelos da teoria formal dos números em que essa regra não é verdadeira. Sabe-se, por exemplo, que podemos ter um modelo infinito não-enumerável para os números naturais, se PA for consistente.[1] Neste caso, $A(n)$ pode ser verdadeiro para todo n natural (na verdade, para n sendo uma constante

---

[1] Teorema de Löwenheim-Skolem-Tarski

standard), porém, para alguma constante não-standard w, $A(w)$ pode ser falso, o que tornaria falso nesse modelo que $\forall x A(x)$.

É importante também salientar que todo teorema de PA_∞ é uma sentença, ou seja, uma fórmula fechada. Pois, todo axioma é uma fórmula atômica fechada e toda regra de inferência de PA_∞ somente leva fórmulas fechadas em fórmulas fechadas. Logo, a equivalência de $PA_\infty - IIR = PA$, mencionada acima, só faz sentido restringindo-se qualquer teorema para que seja uma sentença.

Uma demonstração em PA_∞ é definida por uma *árvore*. Uma árvore é um Grafo com seus pontos organizados em linhas horizontais, chamados de levels, e com propriedades específicas. Deste modo, com as regras de inferência de PA_∞, uma árvore representa uma derivação de uma fórmula, representada por um ponto no level mais baixo, a partir dos axiomas de PA_∞, representados por pontos no level mais alto.

Logo, é possível uma árvore com infinitos pontos, no caso de, pelo menos, uma IIR estar presente na prova. Ou seja, num level, podem-se ter infinitos pontos. Mas, apesar de serem possíveis demonstrações de tamanho infinito, isto é, com uma quantidade infinita de regras de inferências e fórmulas, o número de levels é sempre finito. Uma árvore sempre tem uma altura finita. Assim como, PA_∞ não se trata de uma lógica infinitária em que possam ocorrer fórmulas de tamanho infinito. Toda fórmula de PA_∞ possui um tamanho finito.

Se tentarmos usar o mesmo processo de atribuição de números de Gödel às demonstrações de PA_∞ - isto quer dizer, definir uma fórmula representando a demonstrabilidade em PA_∞ -, precisaremos indexar cada ponto da árvore a um número natural de forma a construir um sequência de números que corresponda biunivocamente à árvore. Mas isto nos levará, em certos casos, a construção de uma sequência infinita de números naturais. Logo, tomando também as propriedades de PA_∞ já descritas anteriormente neste artigo, não poderemos construir uma fórmula na linguagem de PA_∞ que represente uma demonstração em PA_∞. Isto nos leva a impossibilidade de fazer uma demonstração análoga a do primeiro teorema de incompletude de Gödel. Em certos sistemas com regras de inferência infinitárias não "vale Gödel".

Outra questão importante é sobre os modelos que satisfazem a teoria de PA_∞. Uma teoria é o conjunto de fórmulas demonstravelmente verdadeiras a partir do conjunto de axiomas e regras de inferência em questão. Por conseguinte, a teoria de PA_∞ é o conjunto de todos os axiomas e teoremas de PA_∞. É possível provar que os modelos standard de PA satisfazem os axiomas de PA_∞, pois estes são compostos somente por constantes standard (isto é, números naturais). A IIR também atua restringindo os possíveis modelos dos teoremas de PA_∞ - ela própria só é satisfeita por modelos standard. Por isso, todo teorema de PA_∞ terá que ser verdadeiro em todo modelo standard de PA e vice-versa.

Os principais resultados na demonstração do Schütte que estamos discutindo são o Lema A-1, que nos dá a completude de PA_∞, o Corolário A-4 e a Proposição A-8, que nos dão a consistência de PA.

Aqui lembramos o argumento usado no segundo teorema de incompletude que diz que toda a prova do primeiro teorema de incompletude pode ser carregada dentro de ZFC (Zermelo-Fraenkel-Choice). ZFC é uma teoria dos conjuntos - considerada a mais usual. Logo, traduzindo para a linguagem natural, a sentença "Se PA for consistente, então PA não prova sua própria consistência" é um teorema de ZFC.[2]

Sabe-se que toda teoria sobre grafos também pode ser carregada dentro de ZFC, por isso, usando o mesmo argumento mencionado no início do parágrafo anterior, fica mais fácil ver que toda a prova de consistência da aritmética em PA_∞ pode ser carregada dentro de ZFC. Teremos, então, que a sentença "O sistema lógico PA_∞ prova que PA é consistente" também será um teorema de ZFC. É possível construir uma fórmula em PA que represente a demonstrabilidade em ZFC - por exemplo, $Pr_{ZFC}[\varphi]$ -, pois ZFC está numa lógica de primeira ordem, numa linguagem razoável, com um número finito de axiomas e com regras de inferência dedutivas clássicas.

3. CONCLUSÃO

Chegamos, então, ao resultado de que $Pr_{ZFC}\left[\begin{array}{l}\text{"Se } PA \text{ for consistente, então } PA \text{ não} \\ \text{não prova sua própria consistência"}\end{array}\right]$ e $Pr_{ZFC}[\text{"O sistema lógico } PA_\infty \text{ prova que } PA \text{ é consistente"}]$ são teoremas de PA. Não há contradição evidente entre eles e nem com os teoremas de incompletude. E, de fato, como se quer mostrar a consistência do nosso sistema axiomático (no nosso caso, PA, mas também vale a mesma coisa para ZFC), o resultado de Gentzen não pode ser considerado com menos crédito, pois sua prova é feita sobre os mesmos argumentos dos teoremas de Gödel (ambas podem ser feitas dentro de ZFC). E vice-versa. Ademais, se PA for realmente consistente, todos esses resultados não entrarão em contradição nunca.

Mas ainda fica o questionamento: até que ponto uma demonstração, como a descrita neste trabalho, de que PA é consistente realmente nos prova que PA seja consistente? O que pudemos provar, se confiarmos em todas essas demonstrações, é que PA é um sistema suficientemente forte para provar que outro sistema prova que PA é consistente.[3] Mas podemos provar a mesma coisa, passo a passo e com igual validade, se PA for realmente inconsistente. Em outras palavras, todos esses resultados se mantêm provados da mesma forma se PA vier a chegar numa contradição um dia.

Dessa forma, fica impossível retirar da discussão a formação de um pseudo-problema: a consistência do sistema seria mais importante que a veracidade intuitiva, ou convencionada, de seus axiomas?

---

[2] Essa sentença também pode ser um teorema de PA.
[3] Analogamente, o mesmo vale para os teoremas de Gödel.

Agradecimentos ao Prof. Dr. Francisco Antônio Dória.

REFERÊNCIAS

[1] BARWISE, J. (Ed.). **Handbook of Mathematical Logic**. Amsterdam: Elsivier Science Publisher B.V., 1977. ISBN 0444863885.

[2] ENDERTON, H. **A mathematical introduction to logic**. 2ª. ed. Boston, MA: Academic Press, 2001. ISBN 978-0-12-238452-3.

[3] MENDELSON, E. **Introduction to Mathematical Logic**. 2ª. ed. Princeton, New Jersey: D. VAN NOSTRAND COMPANY, INC., 1964.