

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

VINICIUS MENDES COUTO PEREIRA

O DESENVOLVIMENTO DA ANÁLISE NO BRASIL - UM CAMINHO
SOBRE O SURGIMENTO DE UMA COMUNIDADE MATEMÁTICA

RIO DE JANEIRO

2017

VINICIUS MENDES COUTO PEREIRA

O Desenvolvimento da Análise no Brasil - Um Caminho sobre o Surgimento de uma Comunidade Matemática

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós Graduação em História das Ciências, das Técnicas e Epistemologia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em História das Ciências, das Técnicas e Epistemologia.

ORIENTADOR: GERT SCHUBRING

CO-ORIENTADOR: RICARDO KUBRUSLY

RIO DE JANEIRO

2017

CIP - Catalogação na Publicação

M436d Mendes Couto Pereira, Vinicius
 O DESENVOLVIMENTO DA ANÁLISE NO BRASIL - UM
 CAMINHO SOBRE O SURGIMENTO DE UMA COMUNIDADE
 MATEMÁTICA / Vinicius Mendes Couto Pereira. -- Rio
 de Janeiro, 2017.
 443 f.

 Orientador: Gert Schubring.
 Coorientador: Ricardo Kubrusly.
 Tese (doutorado) - Universidade Federal do Rio
 de Janeiro, Decania do Centro de Ciências
 Matemáticas e da Natureza, Programa de Pós-Graduação
 em História das Ciências e das Técnicas e
 Epistemologia, 2017.

 1. História da Matemática no Brasil. 2.
 Comunidade Matemática. I. Schubring, Gert, orient.
 II. Kubrusly, Ricardo, coorient. III. Título.

Elaborado pelo Sistema de Geração Automática da UFRJ com
os dados fornecidos pelo(a) autor(a).

Vinicius Mendes Couto Pereira

O Desenvolvimento da Análise no Brasil

Um caminho sobre o surgimento de uma Comunidade Matemática

Tese apresentada ao Programa de Pós Graduação em História das Ciências, das Técnicas e Epistemologia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em História das Ciências, das Técnicas e Epistemologia.

Gert Schubring, DSc., Universitat Bielefeld/UFRJ

Ricardo Silva Kubrusly, DSc., UFRJ

Isabel Leite Cafezeiro, DSc., UFRJ

Tatiana Marins Roque, DSc., UFRJ

Luiz Adauto da Justa Medeiros, DSc., UFRJ

Marcos Vieira Teixeira, DSc., UNESP

Dedico esse trabalho, de todo o coração:

*À **Deus**, meu guia, meu amigo, meu Redentor.*

*À **Lise Agnes**, por me mostrar desde sempre que o conhecimento me levaria à lugares altos. No fundo, isso tudo é culpa sua.*

*À minha amada **Ana Paula**, mulher virtuosa, companheira de todas as horas e para todo o sempre*

*Aos amores da minha vida, **Raquel** e **Daniel**, frutos dos meus mais longínquos sonhos.*

Agradecimentos

Apreendi que não é possível escrever uma tese sem a ajuda de muitas pessoas. Venho assim expressar meus sinceros agradecimentos.

Ao Professor **Gert Schubring**, orientador dessa tese. Agradeço-lhe pela proposição do tema, pelo total apoio, orientação e presença durante todo o processo. Chego à dizer que sem sua orientação dificilmente essa tese seria concebida. Muito Obrigado.

Ao Professor **Ricardo Kubrusly**, pelas relevantes contribuições e pelo apoio institucional.

Aos Professores **Sérgio Nobre** e **João Bosco Pitombeira** pelas valiosas sugestões e contribuições dadas no Exame de Qualificação.

Aos membros da douta banca, Professora **Tatiana Roque**, Professor **Luiz Adauto Medeiros**, Professora **Isabel Cafezeiro** e o Professor **Marcos Teixeira**, pela disponibilidade em avaliar esse trabalho e pelas preciosas contribuições já dadas.

Ao **HCTE** pela oportunidade de desenvolver este trabalho.

À Professora **Regina Dantas** e às secretárias do HCTE, **Gabriela Evangelista** e **Mariah Martins** pela imediata disponibilidade em ajudar, em todos os momentos em que precisei.

À **Universidade Federal Fluminense** e ao **Departamento de Ciências, Exatas, Biológicas e da Terra (PEB/UFF)**, pela oportunidade de fazer parte deste trabalho com dedicação integral.

Aos funcionários da **Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro**, do **Arquivo Nacional do Rio de Janeiro**, da **Biblioteca de Obras Raras da UFRJ**, do **Museu da Escola Politécnica da UFRJ**, da **Biblioteca da Academia Militar das Agulhas Negras**, do **Arquivo Permanente da Escola de Minas**, da Biblioteca do **Instituto de Matemática e Estatística da USP** e da **Biblioteca da Escola Politécnica da USP**, pela atenção dispensada.

Aos colegas e professores do grupo de pesquisa em História da Matemática do **PEMAT/UFRJ** pelos ricos momentos de discussão e de aprendizagem.

Ao querido amigo **Professor Fabiano Souza**, pela fraternal parceria ao longo dos anos.

Ao **Instituto Nossa Senhora da Glória** e a **Faculdade Salesiana Maria Auxiliadora** pelos lindos anos que passei convosco e, em especial, à **Ir Maria Lea Ramos** pela confiança depositada que frutificam até aqui.

Aos queridos padrinhos **Waldir** e **Maria Helena Algemiro** pela confiança e carinho depositados em meu trabalho. Obrigado por confiarem em mim.

À meus pais, **Clovis Couto Pereira** (*in memoriam*) e **Lise Agnes** por todo amor depositado e por me fazerem compreender a importância do conhecimento escolar.

À minha esposa **Ana Paula C.C Pereira**, por todo companheirismo, cumplicidade e amor. Como é bom caminharmos juntos!

Aos meus amados filhos **Raquel** e **Daniel**. Seus olhos me trazem a luz da vida. Como sou feliz e realizado por ter vocês!

Ao meu irmão **Clovis Jr** e à minha cunhada **Suiane** pelo companheirismo de sempre.

Aos amigos mais chegados que irmãos **Jorge**, **Carol**, **Glauco** e **Rhayanne**, pela alegria da convivência.

Ao meu querido sobrinho **Arthur Leite**, pelo sorriso que nos contagia.

Aos queridos amigos, Professores **Jorge Leite**, **Carolina Leite** e **Ana Paula C.C Pereira** pela valiosa ajuda na revisão do texto.

Aos meus sogros **Nilton** e **Mirtes Pereira**, por toda a ajuda dada.

À minha cunhada **Aline Pereira** pela ajuda dispensada nos momentos em que precisei.

Aos queridos **irmãos da CBA**, pela alegria de estarmos sempre juntos.

Aos queridos tios **Vitão** (*in memoriam*) e **Carol**. Obrigado por me pegarem em casa naquelas inesquecíveis manhãs de domingo.

Ao saudoso e querido **Pr Paulo Rosa Marchon** (*in memoriam*). Aquelas caronas ainda trazem frutos...

Acima de tudo, à **Deus**. Muito Obrigado.

(...) e o conhecimento será suave à tua alma.
Pv 2:10

RESUMO

A presente pesquisa situa-se em um contexto que busca entender como se deu a concretização de uma Comunidade Matemática no Brasil. Assim, o processo de surgimento de uma comunidade matemática em um país, que inicialmente ocupa uma posição periférica implica em uma mudança no enfoque do ensino para a pesquisa, até o momento em que são estabelecidas as próprias produções. Dessa forma, temos estudado de que maneira se deu o processo de transmissão dos conceitos básicos da análise, buscando compreender quais vertentes da análise foram transmitidas e de que forma o conhecimento transmitido foi transformado e reelaborado, de modo a constituir-se em produção própria. Nesse intento, apresentamos um estudo acerca das Instituições Científicas que ministraram a Matemática em nível superior no Brasil, além de analisarmos os livros-textos transmitidos. Por fim, demarcamos as etapas fundamentais que estabeleceram um caminho para a consolidação de uma Comunidade Matemática no Brasil.

Palavras-chave: História da Matemática no Brasil; Transmissão; Comunidade Matemática; Escola Politécnica do Rio de Janeiro; Escola de Minas de Ouro Preto; Escola Politécnica de São Paulo.

ABSTRACT

The present study is situated in the search for the understanding how the Brazilian mathematical community was constructed. Thus, the process of the emergence of a mathematical community in a country that initially occupies a peripheral position implies a change in the focus of teaching for research, until the moment in which the own productions are achieved. In this sense, we have studied how the process of transmitting the basic concepts of calculus was implemented, trying to understand which aspects of the analysis were transmitted to Brazil and how the transmitted knowledge was transformed and reworked in order to constitute an own production. To this aim, we present a study about the Scientific Institutions that taught Mathematics in high level in Brazil, besides analyzing the transmitted textbooks. Finally, we delineated the fundamental stages that established a path for the consolidation of a Mathematical Community in Brazil.

Keywords: History of Mathematics in Brazil; Transmission; Mathematical Community; Escola Politécnica do Rio de Janeiro; Escola de Minas de Ouro Preto; Escola Politécnica de São Paulo.

Sumário

1 Abordagens da Pesquisa e Questões Metodológicas	
1.1 Questões da Pesquisa	15
1.2 Abordagens da Pesquisa	23
1.2.1 Biblioteca da Academia Militar das Agulhas Negras	26
1.2.2 Biblioteca de Obras Raras da UFRJ e Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro	28
1.2.3 Fontes Relacionadas à Escola Militar e a Escola Politécnica do Rio de Janeiro	29
1.2.4 Fontes Relacionadas à Escola de Minas de Ouro Preto	31
1.2.5 Fontes Relacionadas à Escola Politécnica de São Paulo	32
1.2.6 Pontos de Acumulação	33
1.3 Questões Metodológicas	34
1.3.1 Transmissão e Imperialismo Cultural	38
2. Breve Histórico do desenvolvimento da Análise até o século XIX	
2.1 Conceito de Número	46
2.1.1 Estatuto dos Números Reais	49
2.2 Conceito de Função	54
2.3 Conceito de Limite	60
2.4 Conceito de Continuidade	68
2.5 Conceito de Convergência	72
2.6 Conceito de Derivada	75
2.7 Conceito de Integral	80
3. Análise dos livros textos transmitidos	86
3.1 Análise comparativa entre o livro de Lacroix e a versão feita por José Saturnino	88
3.1.1 Conceitos de Função e de Limite	89
3.1.2 Conceito de Diferencial e Quantidades Infinitamente Pequenas	94
3.1.3 Diferenciações Sucessivas e Diferenciação de Funções Transcendentes	101
3.1.4 Análise sobre o Cálculo Diferencial em Funções	108
3.1.5 Algumas Conclusões Parciais	113
3.2 Análise do Cours d'Analyse de Ch Sturm - 2ª Edição 1863	114
3.3 Análise da obra de Boucharlat	125
4. A Análise na Escola Politécnica do Rio de Janeiro	
4.1 Academia Real Militar e primeiros sinais de atividades matemáticas no Brasil a partir de 1808	130
4.1.1 Primeiros registros das aulas de Cálculo Diferencial na Academia Real Militar: pequena análise de um manuscrito	137
4.2 Desdobramentos da Academia Real Militar	144
4.2.1 Primeiros Doutorados em Matemática no Brasil	149
4.2.1.1 Análise das Dissertações	154
4.2.2 Escola Central	167
4.2.2.1 Doutorados obtidos na Escola Central	175
4.2.2.2 Transição da Escola Central para a Escola Politécnica	181
4.2.3 Escola Politécnica do Rio de Janeiro	182

4.2.3.1 Ascensão do Positivismo na EPRJ	186
4.2.3.2 Análise da obra <i>Theoria Elementar das Funções</i>	189
4.2.3.3 Análise do manuscrito referente ao caderno de Cálculo Integral	198
4.2.3.4 Decadência do ciclo de influência da Filosofia Positivista na Escola Politécnica e a atuação de uma nova geração	200
4.2.3.5 Algumas Considerações sobre o desenvolvimento do Cálculo na Escola Politécnica do Rio de Janeiro	209
4.3 Desdobramentos do Ensino Superior de Matemática no Rio de Janeiro	210
5. A Escola de Minas de Ouro Preto	
5.1 Antecedentes da Criação da Escola de Minas	223
5.2 Fundação da Escola de Minas	224
5.3 Primeiras questões de investigação sobre a Escola de Minas	226
5.4 Funcionamento Inicial da Escola de Minas	229
5.5 Primeiros Professores da Escola de Minas	233
5.6 Ensino de Cálculo na Escola de Minas	238
5.6.1 Estrutura dos Cursos de Cálculo ministrados na Escola de Minas entre 1893 e 1908	239
5.7 Análise Preliminar da Produção da Escola de Minas	241
6. A Escola Politécnica de São Paulo e a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP	248
6.1 O personagem da Escola Politécnica de São Paulo – Antônio Francisco de Paula Souza	249
6.1.1 Paula Souza e uma análise de novas fontes primárias	257
6.2 Funcionamento da Escola Politécnica de São Paulo	265
6.2.1 Ensino de Cálculo na Escola Politécnica de São Paulo	269
6.2.1.1 Notas de Aula	275
6.2.2.1.1 Descrição Geral da Fonte	299
6.2.2.1.2 Conclusões acerca da análise da fonte	303
6.2.1.2 Análise da obra <i>Premiers éléments du calcul infinitésimal à l'usage des jeunes gens qui se destinent à la carrière d'ingénieur</i> de Hipolyte Sonnet, 1884.	305
6.2.1.2.1 Visão Geral da Obra	316
6.2.1.2.2 Comparação entre a fonte referente ao caderno do aluno Adriano Goulin e a obra de Sonnet	319
6.3 A Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo	321
6.3.1 Seminário Matemático e Físico na FFCL	333
6.3.2 A USP após Fantappiè	335
6.3.2.1 O Conflito entre duas vertentes de modernização da matemática – a USP como lugar de encontro	344
6.3.3 Análise da obra <i>Curso de Análise Matemática</i> de Luigi Fantappiè	347
6.4 Conclusões	368
7. Considerações Finais	
7.1 Um caso de recepção: a trindade	373
7.2 Da recepção à própria produção	381
Referências Bibliográficas	386

Apêndice 1 - Lista de alunos da ETH no ano escolar de 1861/1862	397
Apêndice 2 - Lista de alunos da ETH no ano escolar de 1861/1862	398
Apêndice 3 - Lista de alunos da ETH no ano escolar de 1862/1863	399
Apêndice 4 - Lista de alunos da ETH no ano escolar de 1862/1863 (cont)	400
Apêndice 5 - Ata da Prova oral de AFPS realizada em 18 de julho de 1867	401
Apêndice 6 - Ata da Prova oral de AFPS realizada em 18 de julho de 1867 (cont)	402
Apêndice 7 - Ata da Prova oral de AFPS realizada em 18 de julho de 1867;quadro geral de notas (continuação).	403
Apêndice 8 - Ata da Prova oral de AFPS realizada em 18 de julho de 1867. Página final, assinada pelo candidato onde consta que o diploma não será omitido.	404
Apêndice 9 - Carta do chefe do arquivo (Dr Klaus-Peter Hoepke) da Universidade de Karlsruhe, onde consta que Antônio Francisco de Paula Souza foi reprovado nos exames finais, e que não se inscreveu para repetir as provas e que nenhum diploma foi emitido.	405
Apêndice 10 - Folha de rosto da ficha escolar de Antônio Francisco de Paula Souza na ETH.	406
Apêndice 11 - Ficha escolar de Antônio Francisco de Paula Souza na ETH.(p.2)	407
Apêndice 12 - Ficha escolar de Antônio Francisco de Paula Souza na ETH. (p.3)	408
Apêndice 13 - Ficha escolar de Antônio Francisco de Paula Souza na ETH. (p. 5)	409
Apêndice 14 - Carta do Capitão Antônio Paes de Barros e de sua esposa Gertrudes Eufrosina Paes de Barros dirigida aos seus filhos Antônio Paes de Barros e Diogo Antônio de Barros.	410
Apêndice 15 - Lista de Alunos da Universidade de Zurique no periodo de 1833-1949	411
Apêndice 16 - Arquivos referentes à Paula Souza na Escola Politécnica de Karlsruhe	412
Apêndice 17 - Relatório referente à Paula Souza na Escola Politécnica de Karlsruhe	413
Apêndice 18 - Página de rosto dos exames finais de Antônio Francisco de Paula Souza na Escola Politécnica de Karlsruhe	414
Apêndice 19 - Ata da prova oral de Antônio Francisco de Paula Souza, realizada em 18 de julho de 1867.	415
Apêndice 20 - Ata da prova oral de Antônio Francisco de Paula Souza, realizada em 18 de julho de 1867. (Continuação)	416
Apêndice 21 - Ata da prova oral de Antônio Francisco de Paula Souza, realizada em 18 de julho de 1867; quadro geral de notas. (Continuação)	417
Apêndice 22 - Ata da prova oral de Antônio Francisco de Paula Souza, realizada em 18 de julho de 1867. Página final, assinada pelo candidato, constando que o diploma não será emitido.	418
Apêndice 23 - Programa da Disciplina de Cálculo Infinitesimal da Escola Politécnica de São Paulo, dos anos letivos 1899-1900	419
Apêndice 24 - Programa da disciplina Cálculo Diferencial e Integral da Escola Politécnica de São Paulo, publicado em 1932	422
Apêndice 25 - Cadeiras dos Cursos da Escola Central	426
Apêndice 26 - Cadeiras dos Cursos da Escola Central	429

Apêndice 27 - Ementa do Curso de Cálculo Diferencial e Integral da Escola Politécnica do Rio de Janeiro do ano de 1886	434
Apêndice 28 - Estrutura curricular da Escola de Minas de Ouro Preto, após a reformulação de 1885.	436
Apêndice 29 - Ementa das cadeiras contendo conceitos do Cálculo Diferencial e Integral na Escola de Minas de Ouro Preto	437
Apêndice 30 - Ementa da 1ª cadeira do 3º ano da Escola de Minas de Ouro Preto, no ano de 1885.	439
Apêndice 31 - Estrutura dos cursos de Cálculo ministrados na Escola de Minas de Ouro Preto entre 1893 e 1908	440
Apêndice 32 - Quadros contendo os Professores de Cálculo nas Instituições Brasileiras	443

1 Abordagens da Pesquisa e Questões Metodológicas

“No meio do caminho tinha uma pedra ...”
Carlos Drumond de Andrade

Nesse capítulo estão colocadas as questões norteadoras da presente tese, bem como as discussões metodológicas a serem consideradas na investigação.

1.1 Questões da Pesquisa

Situemos, inicialmente, a abordagem desta pesquisa dentro dos enfoques e da metodologia da historiografia da matemática. Assim, cabe-nos ressaltar a vertente clássica das pesquisas sobre a história da matemática, a chamada “história das ideias”, que pode ser expressa como o estudo do desenvolvimento de um conceito ou de uma teoria.

Contudo, a partir do grande impacto sobre a historiografia das ciências e da matemática, ocasionado pela obra “*A estrutura das Revoluções Científicas*” de Thomas Kuhn (1962), a historiografia desenvolveu metodologias para conceituar mais sistematicamente as ligações com os contextos dos desenvolvimentos das teorias, enfatizando, em particular, o papel da “comunidade científica”. Desde então, têm existido várias abordagens que visam **estudar o que é desenvolvido dentro de uma comunidade matemática já estabelecida**.

De maneira geral, a noção de “comunidade científica” introduzida por Kuhn supõe implicitamente a existência de uma única comunidade para cada disciplina. No entanto, tal suposição acaba não correspondendo bem à realidade do desenvolvimento histórico.

Uma vez que, em consonância com Schubring (2005), a base de uma comunidade é constituída, primeiramente, na comunicação na mesma língua e nos valores da mesma cultura e que, nesse sentido, a produção matemática ocorre dentro de estruturas institucionais que expressam historicamente variáveis sociais e valorizações do conhecimento. Schubring (1996) introduziu o conceito de comunidades mais específicas que podem coexistir no mesmo período, baseadas em epistemologias diferentes e, em particular, de comunidades nacionais.

Para se referir a “estilos nacionais” parece significar, em particular, diferentes visões epistemológicas. Diferenças entre nações não dizem

respeito usualmente a proposições específicas, mas sim como estão integrados no sistema disciplinar do conhecimento, que seu status está com respeito aos fundamentos, como eles interpretam com respeito a filosofia da matemática, etc.

(SCHUBRING, 1996, p.364, TRADUÇÃO NOSSA)¹

Nesse ponto, cabe ressaltarmos que nossa abordagem estará de acordo com a proposta elaborada por Schubring (2005) quando sugere que o olhar não deve se restringir a como uma definição individual foi aplicada, mas, ao contrário, deve ser visualizada e estudada dentro de um campo conceitual que determina como o respectivo conceito foi justificado e aplicado. Assim, a análise de autores e matemáticos não deve ser feita de maneira isolada, mas os considerando como membros efetivos de uma comunidade matemática cooperativa. Nesse sentido, Schubring (2003) acrescenta:

Nenhum historiador sério, contudo, ficará satisfeito com tais dados descritivos; ao contrário, estará resolvido a julgar essa estrutura e as conexões internas estabelecidas, e a situar o autor e sua obra no contexto do desenvolvimento da matemática. O historiador estará também interessado em avaliar a originalidade das contribuições do autor para esse desenvolvimento. (SCHUBRING, 2003, p.15)

Devemos salientar que, nessa linha de raciocínio, a comparação do desenvolvimento em contextos culturais diferentes torna-se importante para analisar como os conceitos diferem de outras comunidades, ou seja, como foram recebidos e quais influências porventura tiveram.

Em particular, temos a mesma visão que D'Ambrósio quando afirma que: “*Os modos de fazer e de saber originários dos grandes impérios europeus dos séculos XVI, XVII e XVIII foram transmitidos, absorvidos e transformados nas colônias e nos novos países independentes, tornando-se diferentes do que vinha acontecendo nas metrópoles.*” (D'AMBRÓSIO, 2008, p.15)

Destaquemos ainda a importância do estudo dos livros-textos, os quais entraram em cena como objetos legítimos de pesquisa histórica depois do trabalho de Kuhn. Em sua visão, os livros-textos dentro do paradigma da dita ciência normal, apresentam e caracterizam um corpo de problemas compartilhados, bem como os métodos para

¹ To refer to ‘national styles’ seems to mean, in particular, different epistemological views. Differences between nations in that respect will usually not concern specific propositions, but rather how these are integrated into the discipline’s system of knowledge, what their status is with regard to foundations, how they are interpreted with regard to a philosophy of mathematics, etc.

resolvê-los. Nos termos de Schubring, “*livros-textos são particularmente tipos de textos para um programa desse tipo. Uma vez que eles são direcionados a um público mais amplo, eles fornecem bons indicadores quanto a um horizonte conceitual pretendido de um determinado período e cultura.*”² (SCHUBRING, 2005,p.7, TRADUÇÃO NOSSA)

Não obstante, a noção de *comunidade científica nacional* há de constituir-se como uma das referências desta pesquisa. Não mais pressupondo a existência de uma comunidade “universal”, torna-se inevitável investigar os processos de “*rise*” e de “*decline*” de comunidades matemáticas particulares, ou seja, como a matemática tornou-se dominante na comunidade de uma determinada cultura e constituindo assim a “metrópole” do desenvolvimento para um certo período. Como confirmam muitos casos, tal metrópole pode cair em declínio e outra comunidade, em outra cultura ou em outro país, a qual antes situava-se na “periferia”, pode se tornar nova metrópole, ficando a outra na periferia. Entendemos que este referencial pode aplicar-se muito bem ao caso do Brasil, onde se vê confrontado com um desenvolvimento a partir de uma periferia de fato marginal.

Logo, o quadro geral da pesquisa constitui, então, em estudar **de que forma surge uma comunidade matemática, ou seja, investigar como um país sendo primeiramente somente recebedor da produção de outros países torna-se independente, no sentido de tornar-se capaz de estabelecer uma própria produção matemática.**

Tendo definido este quadro geral da pesquisa, fizemos inicialmente um levantamento de eventuais publicações já existentes, referente ao estabelecimento da matemática no Brasil e percebemos claramente que não são muitos os trabalhos que dedicaram-se a esse aspecto. Destacam-se os tradicionais trabalhos de Pereira da Silva (2003), D’Ambrósio (2008) e Silva da Silva (1999).

Em sua obra, fruto de sua Tese de Doutorado, Pereira da Silva (2003) descreve vários fatos da História da Matemática no Brasil do período do século XVIII à década de 1980. O autor deixa claro sua intenção de construir o texto dentro de uma abordagem descritiva, com a finalidade de torná-lo uma fonte de referências, oferecendo, dessa forma, um maior número de informações possíveis ao leitor.

O trabalho de D’Ambrósio (2008) propõe-se a oferecer uma visão panorâmica e crítica do desenvolvimento da matemática no Brasil, desde os primeiros tempos da

² Textbooks are particularly suitable text types for such a program. Since they are directed to a broader public, they yield good indicators as to the intended conceptual horizon of a certain period and culture.

conquista até os dias atuais, apresentando uma inter-relação de eventos e de indivíduos, de fatores políticos, econômicos e ideológicos que acompanham fatos e personagens da História da Matemática no Brasil. Como a palavra “concisa” no título já faz sentir, as 100 páginas dedicadas aos séculos desde 1500 não permitem exposições detalhadas; de fato, ao período do império no século XIX são dedicadas apenas 10 páginas.

Entendemos que em obras tão abrangentes, mas não menos importantes, não se consegue aprofundar em detalhes técnicos. Nesse sentido, não são discutidos detalhes matemáticos, potencialidades e limitações das pesquisas realizadas no desenvolvimento da matemática brasileira e tampouco são analisados, os indivíduos e instituições que foram importantes nesse desenvolvimento.

O trabalho realizado por Silva da Silva (1999) resgata a significativa influência da Filosofia Positivista de Auguste Comte (1798-1857) no ensino de matemática no Brasil, a partir de 1810. Além dos efeitos do positivismo na vida social, política, pedagógica e ideológica brasileira e seu posterior declínio, são analisadas também as manifestações de Comte na concepção de matemática em livros-textos, a orientação de currículos e programas segundo seus preceitos e as obras de matemática de autores positivistas. Enquanto a maior parte do livro é dedicada a análise da obra de Comte, o quarto e último capítulo discute o papel do positivismo no ensino da matemática no Brasil.

Nesse sentido, pensamos ser relevante observar a influência (ou não) positivista, e em qual grau, no Ensino Superior no Brasil.

Cabe destacar, que as referidas obras constituem-se como uma importante referência sobre o contexto no qual a matemática brasileira foi desenvolvida.

Assim, vale pontuar que, em nossa busca nos trabalhos publicados em Anais de Congressos de História da Matemática e nas revistas especializadas não encontramos muitos trabalhos que tem como objeto de estudo o desenvolvimento de conceitos ou de teorias e que pudessem, assim, contribuir para o entendimento acerca do estabelecimento da matemática no Brasil.

Por outro lado, devemos ressaltar que nos últimos anos várias Dissertações e Teses tem sido produzidas³, com significativas contribuições para a História da Matemática no Brasil. Certamente esses trabalhos constituíram-se como peças importantes para a montagem de nosso “quebra-cabeça” histórico. Em particular,

³ A maioria desses trabalhos tem sido produzidos no Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista (UNESP), campus de Rio Claro/SP.

podemos salientar os trabalhos de BOMFIM (2013), TOLEDO (2008), MILLER (2003), TABOAS (2005), MARTINES (2014).

Contudo, há de se ressaltar que, os novos trabalhos estudam alguns aspectos e casos, não abrangendo o desenvolvimento dos seus assuntos em todo o Brasil. A contribuição específica deste trabalho, no entanto, é de estudar como se deu a consolidação da comunidade matemática brasileira, mais especificamente no período entre 1808 e as primeiras três décadas do século XX, com a fundação das primeiras universidades.

Contudo, evidentemente, a tarefa de fazer a análise detalhada de toda produção matemática seria extremamente extensa e inviável. Nesse sentido, cabe-nos justificar o período a ser estudado. Com a vinda da Corte Portuguesa para o Rio de Janeiro no ano de 1808 existiu a necessidade da criação de uma infra-estrutura adequada para a permanência da Corte e de toda a aristocracia que aqui chegou. Foram criados vários espaços e instituições como, a Imprensa Régia, o Museu Real, a Biblioteca Nacional, além da Academia Real Militar, que veio a ser o órgão institucionalizador do ensino de matemática superior no Brasil. Com a criação da Imprensa Régia já se poderia ter impressão de trabalhos acadêmicos no próprio país. Os primeiros livros de matemática escritos no Brasil⁴ tiveram sua impressão em Lisboa e Madrid. O trabalho de Araújo Guimarães, “*A variação dos triângulos esféricos*” foi o primeiro trabalho matemático impresso no Brasil. Por essas razões, não é difícil perceber que o ano de 1808 foi determinante para a concretização do ensino superior e posterior produção acadêmica no país.

Entendemos também que, o processo de surgimento de uma comunidade matemática em uma localidade que inicialmente localiza-se na “periferia”, implica uma mudança de enfoque do ensino para pesquisa: ao receber, só pode, inicialmente, estabelecer uma relação de ensino, porém existe o momento em que são concebidas as próprias produções, estabelecendo, portanto, uma relação de pesquisa.

Ademais, o século XIX é visto, por D’Ambrósio (2008), como o século de consolidação da Matemática Ocidental, desenvolvida desde a antiguidade. Os padrões de rigor que prevalecem na matemática atual se consolidaram nesse século. A criação do Conselho Nacional de Pesquisa (1951) e do Instituto de Matemática Pura e Aplicada

⁴ Exame de Artilheiro (1744) e Exame de Bombeiro (1748)

(1952) institucionalizou a pesquisa matemática em nível nacional, atingindo o alto padrão internacional desfrutado nos dias de hoje.

Entretanto, temos indícios de que, devido a natureza das instituições onde existiu o ensino de Matemática Superior, o Brasil permaneceu longo tempo como um país de recepção.

Dessa forma, uma própria decolagem parece ter começado a acontecer somente a partir da fundação das universidades, as quais implantaram tarefas relacionadas com a pesquisa em Matemática, por volta dos anos 1930.

No sentido de entendermos o extenso período o qual as instituições de ensino superior permaneceram sem o papel da pesquisa, devemos refletir sobre as funções da formação fornecida. Conforme analisado por Schubring (2002), dentre os dois modelos de ensino superior dominantes na Europa do século XIX – o modelo francês e o modelo prussiano/alemão – o Brasil implementou o modelo francês. E este modelo excluiu, desde a Revolução Francesa e até o final do século XIX, a recriação de universidades e estabeleceu de vez a criação de *écoles spéciales* – transformado em 1808 em *facultés* isoladas – para uma formação profissional sem um papel de pesquisa. As *écoles de santé* e as *écoles de droit* nos anos da Revolução foram renomeadas como *facultés* para a formação das profissões tradicionais “sábias”: médicos e juristas. As marginais *facultés des sciences* funcionaram por muitas décadas como simples preâmbulos.

No Brasil, desde 1810, seguiu-se o modelo francês: por um lado a Academia Militar – seguindo o modelo de uma *Grande École*, a Escola Politécnica – e as escolas de medicina e de direito, seguindo o modelo francês. Nunca foram criadas instituições análogas às *facultés des sciences* em terras brasileiras. Assim, quanto à matemática, uma vez que, a formação de engenheiros consolidou-se como a vertente dominante, as práticas da matemática foram completamente estabelecidas a partir desta.

Assim, a criação de universidades no Brasil à partir dos anos 1920 significou uma ruptura profunda e estabeleceu pela primeira vez tarefas relacionadas com a pesquisa, também para a Matemática.

Diante do exposto, nosso olhar estará voltado até os anos iniciais de funcionamento das primeiras universidades.

Por outro lado, cabe destacar nossa opção em nos restringirmos à evolução e estabelecimento dos conceitos relacionados à Análise, visto que esta consolida-se como uma teoria chave no século XIX.

Podemos concluir que uma comunidade internacional de grandes matemáticos formaram, pela primeira vez, durante o último terço do século XIX, uma comunidade na qual avançou intensamente em pesquisa avançada baseada no compartilhamento das noções conceituais de Análise.

(SCHUBRING, 2005, TRADUÇÃO NOSSA)⁵

Além disso, podemos considerar as etapas de rigor pelos quais os conceitos de análise foram submetidos – um processo ligado com a transferência do papel de metrópole da França para a Alemanha:

O domínio da *physico-mathématique* [na França] estava diminuindo, e um número crescente de cientistas estavam interessados com questões teóricas de matemática. Essa mudança estava intimamente ligada a uma nova mudança de paradigma.

(SCHUBRING, 2005, TRADUÇÃO NOSSA)⁶

[...] Essas mudanças nos conceitos e nas instituições tornou-se manifesta em vários livros-textos de análise que receberam, e elaboraram, os novos conceitos desenvolvidos, em particular na Alemanha.

(SCHUBRING, 2005, TRADUÇÃO NOSSA)⁷

Costumeiramente, considera-se o trabalho do francês Augustin Louis **Cauchy** (1789-1857) como consolidador do rigor matemático em Análise, em particular por seu livro-texto chave: *Cours d'Analyse algébrique* (1821). Contudo, a historiografia tem evidenciado, nas últimas décadas, que uma nova etapa de rigor foi estabelecida, na escola alemã, em particular com o trabalho de Karl **Weierstrass** (1815-1897) por volta de 1870.

Portanto, ao estudarmos a concretização da comunidade matemática brasileira consideraremos fortemente o desenvolvimento da análise, bem como a maneira pela qual foi recebida no Brasil. Isto implica, em particular, investigar quais das vertentes da análise na Europa foram transmitidas para Brasil e quais exerceram o maior impacto, transformando-se em produções próprias. Também precisaremos verificar se houve mudanças nas vertentes recebidas de preferência, ou seja, se a matemática francesa que

⁵ we will be able to conclude that an international community at least of top mathematicians formed for the first time during the last third of the 19th century, a community which intensely advanced research on the basis of shared conceptual notions of analysis.

⁶ The dominance of *physico-mathématique* was waning, and an increasing number of scientists were concerned with questions of theoretical mathematics. This change was closely tied to a further change of paradigm.

⁷ This change in concept and institutions became manifest in several textbooks on analysis which received, and elaborated on, the new concepts developed in particular in Germany.

foi, sem dúvida, dominante no começo, foi em algum momento complementada ou até substituída pela matemática produzida na Alemanha. Além disso, desde o meado do século XX, mais uma metrópole pode ser considerada como possível transmissora; a matemática norte-americana.

Dessa forma, torna-se apropriado a utilização do conceito de **transmissão** como referencial teórico de nossa pesquisa.

Nesse sentido, nos propomos a estudar de que forma surgiu e se consolidou a comunidade matemática no Brasil, no período considerado, em um olhar inicial para o seu papel de receptor da produção matemática dos países europeus, as influências recebidas e de que maneira essas influências interferiram, ou não, no modo em que os brasileiros passaram a produzir matemática.

Todavia, na impossibilidade de estudo de toda a matemática produzida nesse período, estudaremos como se deu o processo de transmissão de uma teoria chave da matemática, a Análise. Destacamos, entretanto, que nos restringiremos aos conceitos básicos de Análise, tais como limite, derivada, continuidade, convergência e integral.

Procuraremos também olhar quais das vertentes da análise foram transmitidas para o Brasil, de que forma o conhecimento transmitido foi transformado e reelaborado de modo a constituir-se em produção própria.

Reiteremos, entretanto, nosso objetivo de realizarmos um estudo, por um lado especializado, sobre um campo conceitual bem definido na matemática, mas, por outro lado, um estudo de caráter longitudinal: o estabelecimento de uma comunidade matemática brasileira com produção própria.

Para além dos trabalhos de Clóvis Pereira da Silva (2003), que quis documentar desenvolvimentos para todo o Brasil – embora não conseguindo ser completo –, os trabalhos sobre a história da Matemática no Brasil tipicamente estudam algum caso isolado ou uma instituição particular, sem tencionar abranger o seu assunto para todo o Brasil. Assim, no intuito de revelar a constituição de uma comunidade matemática no Brasil, este trabalho conseguiu detectar a importância da Matemática na Escola de Ouro Preto (ver cap 5). O caráter longitudinal deste trabalho é devido, em particular, à permanência de “*longue durée*” do ensino da Matemática sob a preponderância da função de formar engenheiros.

1.2 Abordagens da Pesquisa

Uma vez definida a importância dos livros-textos como objetos de pesquisa histórica, compreendendo-os como uma ferramenta que ajuda a entender a relação entre o oral e o escrito, bem como do professor com o texto de ensino, entendemos que devemos não somente produzir uma análise que envolva todas as variáveis em questão, mas estabelecer um processo adequado de escolha das obras a serem estudadas e analisadas.

No entanto, nesse processo existem vários obstáculos. Schubring (2003), considerando que o número de autores que produzem livros-textos é bem maior que o número de pesquisadores, situa a dificuldade, em termos de avaliação, da contribuição desses livros com relação à pesquisa matemática *stricto sensu*. Indica-se ainda a ausência de um padrão estabelecido em relação a qual se poderia avaliar a matemática escolar e pontua-se o agravamento da situação ao ser constatado uma enorme variabilidade da matemática “ensinada”, tanto com relação à matemática elementar quanto à superior. Para efeito de ilustração, o autor lembra que na França, em uma grande parte do século XIX, existia uma “matemática para todos”, de baixo padrão, e paralelamente, alguns privilegiados tinham acesso a uma “matemática para os candidatos às *grandes écoles*”.

Nessa linha de raciocínio, Schubring ratifica a importância dos livros-textos como importante instrumento de produção de conhecimento. “Assim, já que não existe qualquer acesso direto a uma interpretação interna imediata de um textbook, é imperioso analisá-lo como parte de um contexto social mais amplo, como o da produção de conhecimento pela comunidade científica em geral.” (SCHUBRING, 2003, p.16)

Por outro lado, ao considerarmos as características particulares da institucionalização do ensino superior no Brasil nos deparamos com uma realidade que posteriormente consolidou-se no Brasil: a predominância da formação de engenheiros. Em particular, a primeira instituição que trabalhou com matemática em nível superior foi a Academia Real Militar, criada em 1810, que se destinava à formação de oficiais de artilharia, oficiais engenheiros e oficiais da classe de engenheiros geógrafos e topógrafos.

A Academia Real Militar oferecia para os futuros “Officiaes Engenheiros e de Artilharia” um curso completo de sete anos, sendo um “Curso Mathematico” de quatro anos e um “Curso Militar” de três anos.

Dessa forma, o “Curso Mathematico” oferecido pela Academia Real Militar representa a introdução da matemática superior no Brasil. Isso parece significar a constituição de um corpo de engenheiros, os quais foram os primeiros a terem acesso à matemática superior numa instituição de ensino em solo brasileiro.

A intenção de estabelecer a Academia Real Militar como uma instituição de excelência com respeito ao ensino, parece ficar evidente quando observamos alguns trechos da Carta Régia de 4 de dezembro de 1810, a qual cria e regulamenta a Academia Real Militar. Essa Carta Régia especifica uma série de regulamentações referentes à estruturação da Academia. Em particular, devemos salientar as especificações acerca dos conteúdos a serem ensinados e dos livros que deveriam ser adotados. Castro (1992) aponta a intenção de se adotar uma série de obras que estivessem em consonância com os progressos científicos da ocasião.

A acertada escolha dos livros de base prova que os redatores da Carta de Lei estavam bem a par dos progressos científicos da época. As obras de Euler, Bezout, Monge, Legendre, Lacroix, Laplace, Francoeuer, Prony, Delembre, Lacaille, Delandre, Hauy e Brisson foram, entre outras, adotadas para a organização dos compêndios do Curso Matemático. (CASTRO, 1992, p.27)

Em particular, com relação ao ensino do Cálculo a Carta Régia estabeleceu que:

O Lente do segundo anno repetindo e ampliando as noções de calculo já dadas no primeiro anno, continuará depois, explicando os methodos para a reloução das equações, e dando-lhes toda a extensão que actualmente tem, e procedendo ás applicações de algebra á geometria das linha e das curvas, tando ás do segundo grão como de grãos superiores, passará depois ao calculo differencial e integral, ou das fluxões e fluentes, mostrando os mesmos, e as suas applicações até aonde tem chegado nos nossos dias nas brilhantes applicações á physica, astronomia e ao calculo das probabilidades. O Lente deverá formar o seu compendio debaixo dos principios de algegra, calculo differencial e integral de **la Croix**, e terá cuidado de ir addicionando todos os methodos e novas descobertas que possam ir fazendo-se. Sendo notavel de quão poucos principios deduzindo de experiencia se decuzem as theoricas de mecanica, da hydrodynamica e da optica, estará ao cuidado do professor apontar no seu compendio a facilidade com que se deuzem as consequencias que formam as mesmas sciencias, e abrir assim o caminho que se deseja; o que elle conseguirá se procurar dar aos seus discipulos o conhecimento intimo dos

principios de calculo, e se com mão destra lhes grangear não só a facilidade do calculo, mas se lhes ensaiar o modo de advinhar o que luminosamente elle aponta, e que muitas vezes o olho pouco conhecedor não sabe distinguir, nem entender em toda a sua extensão.
(CARTA RÉGIA, 1810, GRIFO NOSSO)

O primeiro livro-texto de Cálculo adotado no Brasil foi *Traité Élémentaire de Calcul Differentiel et de Calcul Intégral* de autoria do francês Sylvestre François Lacroix.

Nesse tempo começaram a aparecer na Impressão Régia, traduções para o português de várias obras para utilização na Academia Real Militar, como os “*Elementos de Geometria de Legendre*” traduzidos do francês pelo Lente do 4º ano, Manuel Ferreira de Araújo Guimarães, “*Elementos de Álgebra de Leonard Euler*” sem tradutor conhecido, embora existam indícios de que o tradutor também tenha sido Manuel Ferreira de Araújo Guimarães, segundo SILVA (2009).

No caso do Cálculo, a obra escrita por Lacroix foi traduzida para o português em 1812, pelo lente do 2º Ano, Francisco Cordeiro da Silva Torres, sob o título “*Tratado Elementar de Cálculo Diferencial e de Cálculo Integral por Mr Lacroix*” e como aconteceu em outras traduções era ressaltado que a tradução era feita “*por ordem de sua alteza real, traduzido em portuguez para uso dos alumnos da Real Academia Militar desta Corte*”.

Entendemos que, de fato, a obra traduzida de Lacroix foi o texto base para o ensino do Cálculo na Academia Real Militar. A nosso ver, tal hipótese é reforçada quando lembramos que, em 1842, o Bacharel em Matemática e Lente do 3º Ano da Academia Real Militar, José Saturnino da Costa Pereira escreveu uma obra baseada no texto de Lacroix intitulada “*Elementos de Cálculo Diferencial e de Cálculo Integral segundo o sistema de Lacroix, para uso da Escola Militar*”.

Dessa forma, tradicionalmente a historiografia da matemática no Brasil considera a tradução da obra traduzida de Lacroix e a versão produzida por Saturnino como praticamente as duas únicas obras de referência para o ensino do Cálculo por várias décadas no século XIX.

Deparamo-nos portanto com mais uma questão, uma vez que parecem existir somente dois livros-textos conhecidos de Cálculo em praticamente todo o século XIX.

- De que maneira analisar como se deu o processo de recepção e transmissão dos conceitos do Cálculo com apenas duas obras conhecidas ?

Basicamente, tomamos dois caminhos no tratamento dessa questão. Por um lado, procuramos fontes que pudessem nos fornecer indicações de outras obras utilizadas para o ensino do Cálculo no Brasil. Por outro lado, lançamos mão de uma metodologia de busca dessas obras em várias Bibliotecas e Instituições, considerando como hipótese básica que uma listagem (e posterior análise) dessas obras com suas respectivas localizações, de alguma forma documentariam parte do processo de recepção e transmissão dos conceitos básicos do Cálculo no Brasil.

A partir dessa escolha saímos em busca de Instituições e de Bibliotecas que potencialmente poderiam conter as obras que procurávamos, conforme relataremos a seguir.

1.2.1 Biblioteca da Academia Militar das Agulhas Negras

A Academia Militar das Agulhas Negras (AMAN), situada no município de Rezende/RJ, reserva em sua biblioteca um verdadeiro tesouro para aqueles que se interessam pela História. Segundo uma entrevista concedida pelo Tenente Coronel Fuéde Feres Júnior⁸ existem mais 300.000 volumes na Biblioteca Militar das Agulhas Negras.

Entedemos que, mais importante do que o número significativo de volumes nessa biblioteca é o fato de que nela estão reunidas muitas das obras que vieram para o Brasil, por ocasião de vinda da Família Real em 1808, sendo parte do acervo da antiga Biblioteca Real.

A partir dessa informação, entramos em contato com os responsáveis da referida Biblioteca e agendamos uma visita de quatro dias.

Nessa visita, fomos bem recebidos e nos foi disponibilizado acesso a todas as obras. Contudo, devemos ressaltar uma substancial dificuldade, a grande maioria dos livros não está catalogada e tampouco organizada por assuntos. No nosso caso, fizemos uma busca em todas as dezenas de estantes, cada uma delas com centenas de livros na busca por livros de Matemática, particularmente de Cálculo.

Encontramos diversos livros relativos ao Cálculo, que podem se observados na tabela abaixo.

⁸ Entrevista concedida à TV Rio Sul, visualizada por meio de <http://globoTV.globo.com/tv-rio-sul/rjtv-1a-edicao-tv-rio-sul/v/biblioteca-da-academia-militar-das-agulhas-negras-reune-vasto-acervo-em-resende-rj/3207606/>. Acesso em 08/11/2014.

Quadro 1: Livros Encontrados na Biblioteca da AMAN

Livro	Ano	Autor
Traite de Calcul Differential et de Calcul Integral	1796	J.A.J. Cousin
Traite de Calcul Differential		M.Labbe Laurent
Cours de Analyse	1821	A.Cauchy
Cours de Analyse Infinitesimal	1887	P.Gilbert
Cours de Analyse		M.Ioanet
Cours de Analyse de l'Ecole Polytechnique - 10 ed	1895	Ch. Sturm
Cours de Analyse de l'Ecole Polytechnique - 13 ed	1905	Ch. Sturm
Cours de Analyse de l'Ecole Polytechnique - 9 ed	1888	Ch. Sturm
Elements de Calcul Diferentiel	1891	J.L Bouchariat
Elements de Calcul Differential et de Calcul Integral	1858	J.L Bouchariat
T.E de la Theorie des fonctions et du Calcul Infinitesimal - Tomo 1	1841	Cournot
T.E de la Theorie des fonctions et du Calcul Infinitesimal - Tomo 2	1857	Cournot
Calcul Infinitesimal - Tomo 1	1874	Duhamel
Calcul Infinitesimal - Tomo 2	1876	Duhamel
Calcul Infinitesimal - Recuil des Exercices	1856	Frenet
Cours Calcul Infinitesimal - Tomo 2	1879	J.Houel
Cours Calcul Infinitesimal - Tomo 4	1881	J.Houel
Premiers éléments du calcul infinitesimal a l'usage des jeunes gens qui se destinent a la carrière d'ingénieur.	1897	Sonnet
Traité d'Analyse - Tomo 1	1885	H.Laurent
Traité d'Analyse - Tomo 2	1887	H.Laurent
Traité d'Analyse - Tomo 3	1888	H.Laurent
Traité d'Analyse - Tomo 4	1889	H.Laurent
Traité d'Analyse - Tomo 5	1890	H.Laurent
Leçons Nouvelles sur L'Analyse Infinitésimale et ses Applications Géométriques - Tomo 4	1897	Ch.Méray
Cours Elementaire d'Analyse		J.Meunier Joannet
Journal de l'Ecole Polytechnique - Trezieme Cahier - Tomo VI	1806	
Histoire des Mathematiques - Tomo Quatrieme	1802	J.F Montucla
Traite de Calcul Differential et de Calcul Integral - Tome Première - Second Édition	1810	Lacroix
Traite de Calcul Differential et de Calcul Integral - Tome Second - Second Édition	1814	Lacroix
Traite de Calcul Differential et de Calcul Integral - Tome Troisieme - Second Édition	1819	Lacroix
Differential and Integral Calculus	1842	Augustus de Morgan
Calcul des Derivees	1852	J.J Guilloud
Traite Elementaire de la Theorie des Fonctions et du Calcul Infinitesimal - Tome Premiere - Deuxieme Édition Revie et Corrigée	1857	M. Cournot
Journal des Mathematiques Pure e Appliquee de Recuil Mensuel	1852	Joseph Liouville
Traite Elementaire De Calcul Differential et de Calcul Integral - Septieme Édition	1867	Lacroix
Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique - Tome Premier - Troisieme Édition - Revue et Corrigée	1868	Ch. Sturm
Traite Elementaire de Calcul Differential et de Calcul Integral - Huitième Edition - Tome Premier (Notas de Hermite e Serret)	1874	Lacroix
Traite Elementaire de Calcul Differential et de Calcul Integral - Huitième Edition - Tome Second (Notas de Hermite e Serret)	1874	Lacroix
Elements de Calcul Differential et de Calcul Integral - Tome Premier - Calcul Differential	1870	Abel Souchon
Elements de Calcul Differential et de Calcul Integral - Tome Second - Calcul Intégral	1870	Abel Souchon
Cours d'Analyse de l'Ecole Preparatoire	1877	Edouard Collignon
Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique - Premiere Partie	1873	Hermite
Cours de Calcul Infinitesimal - Tome Premier	1878	J.Houël
Cours de Calcul Infinitesimal - Tome Troisieme	1880	J.Houël
Recueil Completaire d'exercices sur le Calcul Infinitesimal	1896	F. Tisserand
Element des Calcul Differential et des Calcul Intégral - Neuvième Édition	1891	J.L Bouchariat
Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique - Tome Premier	1897	Ch.Sturm
Leçons Nouvelles sur L'Analyse Infinitésimale et ses Applications Géométriques - Deuxieme Partie	1895	Ch.Méray
Exercices Méthodeques de Calcul Differential	1898	M.Ed.Brahy
Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique -Tome Premier - Onzième Édition	1909	Ch.Sturm
Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique -Tome Premier - Quatorzième Édition	1909	Ch.Sturm
Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique -Tome Second - Quatorzième Édition	1909	Ch.Sturm
Premiers Elements de Calcul Infinitesimal - Septième Édition	1909	H.Sonnet
Exercices Méthodeques de Calcul Differential	1905	M.Ed.Brahy
Leçons d'Algebre et Analyse des a usage des eleves des classes de matematicque speciales	1906	Jules Tannery
Analyse Infinitésimale a usage des ingenieurs	1900	E.Rouche e L.Levy
Recueil d'exercices sur le Calcul Infinitesimal - Sixième Édition	1904	F.Frenet
Recueil d'exercices sur le Calcul Infinitesimal - Septième Édition	1904	F.Frenet
Recueil d'exercices sur le Calcul Infinitesimal - Septième Édition	1917	F.Frenet
Analisi Infinitesimale -Volume 1	1912	Angelo Draghi
An Elementary Course of Infinitesimal Calculus (Cambridge)	1924	Horace Lamb
An Introduction to the theory of Infinite Series	1949?	Bromwich
Elements des Calcul Differential et Integral	1924	W.A Granville
Cours de Calcul Matematicque Algebrigue, Differential et Integral	1921	Laboureur
Elements des Calcul Differential et Integral - CinquemeEdition	1939	W.A Granville
Cours d'Analyse de l'Ecole Polytechnique - Tome Second - Onzième Edition	1897	Ch.Sturm
Cours de Mathématiques Supérieures	1930	F.Stoffaes
Licções de Arithmética professadas na Escola Militar do Rio Grande do Sul	1894	Luiz C. de Castro
These de Concurso - Vaga de Lente Cadeira do Segundo Ano - Escola Polytechnica	1887	Augustinho L. da Gama
An Elementary Treatise on the Calculus	1920	G.Gibson
An Elementary Treatise on the Integral Calculus	1920	Benjamim Williamson
A first Course in the Differential and integral Calculus	1924	Willian Osgood
Derniers Melanges Mathematiques 1880-1913	1920	Mansion
O Cálculo Infinitesimal e algumas das suas inuneráveis aplicações - 1º Tomo	1944	Plínio de A Magalhães
A treatise on the differential calculus with numerous examples	1911	I. Todhunter
Exame Oral para admissão na Escola Militar do Brazil	1903	

Ao observamos os livros dispostos na tabela, podemos constatar que a grande maioria são tratados de cálculo franceses, que as obras de língua inglesa só aparecem no século XX e que não temos livros alemães na lista. Dessa forma, essa disposição parece indicar uma documentação da forte influência francesa no processo de transmissão para o Brasil.

1.2.2 Biblioteca de Obras Raras da UFRJ e Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro

Uma vez feito o levantamento dos livros que conseguimos listar em nossa visita à AMAN, utilizamos uma metodologia diferente na busca por obras na Biblioteca de Obras Raras da UFRJ (BOR/UFRJ) e na Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro (BNRJ).

Como ambas bibliotecas possuem um catálogo on line atualizado (ou quase), optamos por fazer nossa pesquisa com base nas obras mais relevantes, do ponto de vista de repercussão na historiografia da matemática, e nas obras que apareceram com maior frequência no Quadro 1.

A Biblioteca de Obras Raras reúne em seu acervo livros da Escola Politécnica, a qual por sua vez herda parte do acervo da Academia Real Militar e de seus desdobramentos. Ressalta-se dessa forma a importância das obras encontradas na BOR/UFRJ.

No que tange à metodologia de buscas na BNRJ, explicitamos aqui as obras referentes à matemática que não estão no catálogo on-line, após extensa busca nos ficheiros. O resultado dessas buscas pode ser sintetizado pelos Quadros 2 e 3, abaixo:

Quadro 2: Livros Encontrados na BOR/UFRJ⁹

Livro	Ano	Autor
Traité de Calcul Differential et du Calcul Integral	1796	J.A. Cousin
Elements de Calcul Differential et de Calcul Integral - Septième Édition	1858	J.L Boucharlat
Traité d'Analyse - Tomo 1	1885	H. Laurent
Traité d'Analyse - Tomo 4	1890	H. Laurent
Traité d'Analyse; calcul de Leibniz l'a mené dans des pays jusqu'alors inconnus ; et il y a fait de découvertes qui font l'étonnement de plus habiles mathématiciens de l'Europe	1888	H. Laurent
Théorie Elementaire des fonction elliptiques	1880	H. Laurent
Théorie Elementaire des equation differentielles ordinaire simultanées	1873	H. Laurent
Traité d'Analyse - Tomo 6	1890	H. Laurent
Traité Elementaire de Calcul Differential et du Calcul Integral - Sixième Édition	1861	Lacroix
Traité Elementaire de Calcul Differential et du Calcul Integral - Second Édition	1819	Lacroix
Traité Elementaire de Calcul Differential et du Calcul Integral - Second Édition	1810	Lacroix
Traité Elementaire de Calcul Differential et du Calcul Integral - Second Édition	1814	Lacroix
Traité Elementaire de Calcul Differential et du Calcul Integral - Cinquième Édition	1837	Lacroix
Tratado Elementar de Calculo Diferencial e Integral	1812	Lacroix
Élement des Calcul Differential et des Calcul Integral - Cinquième Édition	1838	Boucharlat
Élement des Calcul Differential et des Calcul Integral - Huitième Édition	1838	Boucharlat
Élement des Calcul Differential et des Calcul Integral - Neuvième Édition	1838	Boucharlat
Recueil d'exercices sur le Calcul Infinitésimal - Troisième Édition	1873	F.Frenet
Recueil d'exercices sur le Calcul Infinitésimal - Cinquième Édition	1891	F.Frenet
Le Calcul Infinitésimal fondé sur des principes rationnels et précédé de la Théorie Mathématique de l'infini	1879	J. Henry Fleury
Elements de Calcul Differential et Integral	1924	W.A Granville
Elementos de Cálculo Diferencial e Integral	1965	W.A Granville
Traité elementaire des théorie des fonctions et du calcul infinitésimal	1941	M.Cournot
Traité elementaire des théorie des fonctions et du calcul infinitésimal	1957	M.Cournot
Traité de Calcul Differential et de Calcul Integral	1832	S.F Lubbe

⁹ Lubbe: Samuel L. Ferdinand, nascido em 1786 em Kšnigsberg, foi habilitado em 1818 na Universidade de Berlim e atuou também (de 1813 até a sua morte) como um professor de matemática no Friedrich-Wilhelms-Gymnasium em Berlim. Sua eficácia literária era essencialmente didática, sem inovações; além das soluções particulares de equações diferenciais tratadas na dissertação inaugural, tem-se dele também um "Lehrbuch des höheren Calcüls" (Berlim 1825), Fundamentos da geometria e da aritmética (Berlim 1826) e 1846). Pode-se admirar porque o livro dele foi traduzido para o francês.

Quadro 3: Livros encontrados na BNRJ

Livro	Ano	Autor
Breve Estudo sobre a these oferecida pelos candidatos a cadeira de prof de mat elementar do I.Collegio Pedro II	1879	
Cours de mathematiques a l'usage des candidats a l'ecole Polytechnique a l'ecole normale superieure	1876	Charles de Camberouse
Limites (Compêndio da theoria dos) ou introdução ao método das fluxões	1794	F.B.G Stokler
Mathematica, these ...	1885	José de Souza Gayoso
Nota sobre o emprego do infinito no ensino das matemáticas elementares	1863	Dr Américo Monteiro de Barros
Differentes methodos de differenciación - these	1872	Carlos Víctor Boisson
Traité elementaire des theorie des fonctions et du calcul infinitesimal	1857	M. Cournot
Integração (Sobre os processos elementares de) - Trabalho apresentado à Cong da Escola Polytechnica do RJ	1914	Maurício Joppert da Silva
Methodo dos limites e dos infinitamente pequenos (Dissertação sobre o) apresentada a Escola Militar		João Ernesto Viriato de Medeiros
Memoires sur les integrales definies par Augustin Cauchy	1882	A.Cauchy
Elements de Calcul Differentiel et de calcul integral	1858	J.L Boucharlat
Cours de calcul differentiel et integral	1879	J.A Serret

Com efeito, podemos também perceber a maciça presença dos tratados franceses no acervo da BOR/UFRJ e ainda alguns no catálogo manual da BNRJ. Notemos, em particular, a tradução de um livro alemão escrito por Lubbe.

1.2.3 Fontes Relacionadas à Escola Militar e a Escola Politécnica do Rio de Janeiro

A Academia Real Militar, principal Instituição de Ensino de Engenharia no Brasil no século XIX, sofreu, com o passar do tempo, diversas modificações de ordem administrativa.

O estudo realizado por Silva (2003), traz em detalhes algumas dessas modificações.

Após a independência do Brasil, em 1822, a Academia Real Militar passou a se chamar Academia Imperial Militar. O Decreto Imperial de 9 de março de 1832 declarou extinta a Academia Imperial Militar e instituiu a Academia Militar e de Marinha do Brasil. Por um curto período houve a junção das duas Escolas Militares, separadas pelo Decreto Imperial de 22 de outubro de 1832 passando a escola do Exército a denominar-se Academia Militar da Corte. Em 14 de janeiro de 1839, o Decreto Imperial 25 alterou os estatutos da Academia Militar, denominando-a Escola Militar, passando a ser regida por um novo regulamento, a reorganização se destinava a habilitar devidamente os oficiais das três armas do Exército, bem como a classe de engenheiros militares e a do estado-maior. O novo regulamento da Escola Militar manteve para os professores a obrigação de organizar textos didáticos moldados em livros adotados. (SILVA, 2003, p.34)

Com a reformulação dos Ensinos Militar e Civil, foi criada a Escola Central, em 1858, a qual continuou a ser o centro de formação de Engenheiros Militares, Civis e de oficiais para as armas do exército.

Segundo Silva, “*assim, na década de 1870, fez-se uma grande reforma nos estatutos da Escola Central, transformando-a em escola civil e passando o ensino dos militares para uma instituição militar exclusivamente*” (SILVA, 2003, p.36)

Após o Decreto Imperial nº 5.600, de 25 de abril de 1874, a Escola Central passou a ser chamada de Escola Politécnica, subordinada a um ministro civil, saindo dessa forma do controle dos militares. Assim, parte das fontes de pesquisas relacionadas a Academia Real Militar e seus desdobramentos encontram-se hoje no Museu da Escola Politécnica, localizada no Centro de Tecnologia da UFRJ e no Arquivo Nacional do Rio de Janeiro.

Dentre os documentos de posse do Museu da Escola Politécnica fizemos uma leitura do “*Livro Primeiro de Registros e Consultas 1811-1816*”, do “*Livro Primeiro de Registros de Portarias, Ofícios da Junta de Direção da Academia Real Militar – Anos de 1811 a 1813*”. Na visualização desses documentos, temos a confirmação no Livro Primeiro de Registros e Consultas dos Lentes da Academia Real Militar, a saber:

Lente 1º Ano – Antônio José do Amaral

Lente 2º Ano – Francisco Cordeiro da Silva Torres

Lente 3º Ano – José Saturnino da Costa Pereira

Lente 4º Ano – Manuel Ferreira de Araújo Guimarães

Lente 5º Ano – José de Souza Pacheco

Lente 6º Ano – Salvador José Maciel

Lente 7º Ano – Manoel da Costa Pinto

Lente Música – Luiz Antônio

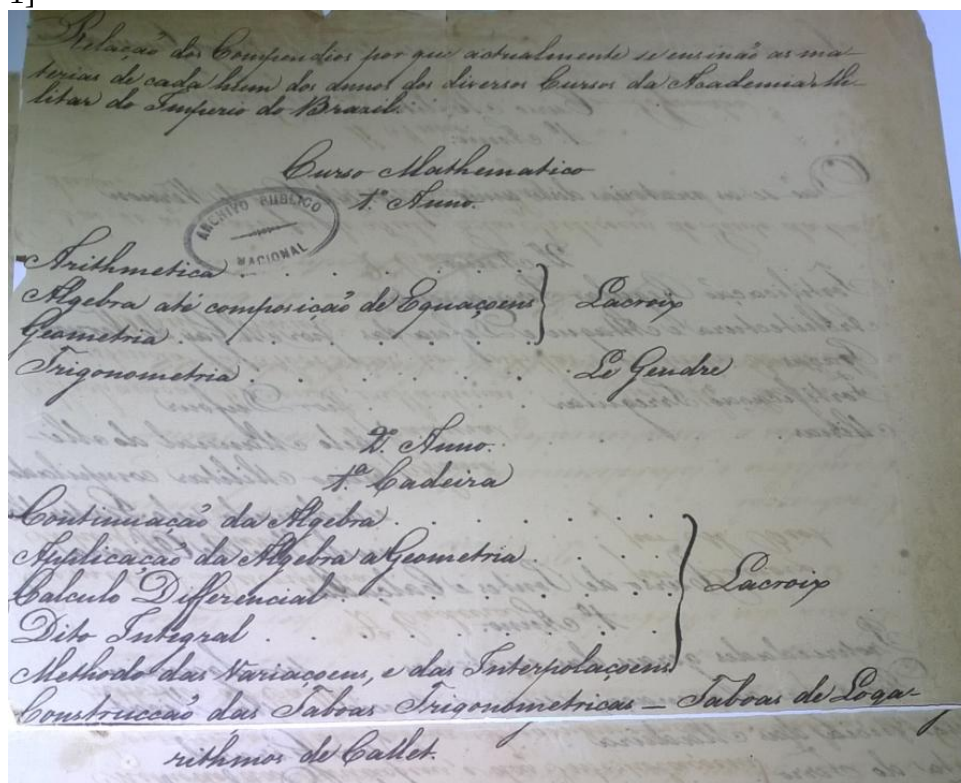
Lente de Geometria – José Victorino dos Santos

Conforme já destacamos, existe no Arquivo Nacional uma série de documentos relativos à Academia Real Militar e seus desdobramentos. Alguns desses documentos, bem como um caderno de um aluno da Academia Real Militar, localizada na Biblioteca Nacional, já tem sido analisado por Sad (2011) e também fazemos uma análise nesse trabalho.

Com respeito às fontes localizadas no Arquivo Nacional, encontramos alguns documentos e manuscritos que tiveram sua importância no estabelecimento dessa tese.

Em particular, podemos destacar um documento datado no ano de 1837, que confirma que, pelo menos até aquele ano, o livro de Cálculo utilizado na Academia Militar continuou a ser a obra traduzida de Lacroix.

Figura 1: Relação dos Compêndios Utilizados na Academia Militar em 1837 [ANRJ 1]



1.2.4 Fontes Relacionadas à Escola de Minas de Ouro Preto

A Escola de Minas de Ouro Preto, fundada em 1876, foi uma importante Instituição de Ensino Superior no Brasil, a partir do último quarto do século XIX.

Conforme discorreremos oportunamente, fizemos uma análise dos documentos encontrados e pudemos constatar a relevância da Escola de Minas de Ouro Preto no ensino de Matemática Superior no Brasil. Utilizamos basicamente as fontes encontradas no Arquivo Nacional do Rio de Janeiro e no Arquivo Permanente da Escola de Minas de Ouro Preto.

Os documentos localizados no Arquivo Nacional são, em geral, referentes aos primeiros anos de fundação da Escola. Acessamos vários ofícios, relatórios de trabalho, além dos primeiros quadros de horários.

Devemos ressaltar a relevância do material catalogado no Arquivo Permanente da Escola de Minas de Ouro Preto¹⁰.

Para obtermos acesso ao acervo, entramos em contato para um possível agendamento e fomos informados de que o Arquivo Permanente não estava funcionando devido à falta de um arquivista.

Posteriormente, em caráter de excepcionalidade, nos foi disponibilizado o acesso ao Arquivo Permanente. Enviamos então à bibliotecária uma lista de cerca de cinquenta documentos que pareciam ser interessantes.

Ao chegarmos em Ouro Preto nos foi informado que não foram achados todos os documentos que solicitamos, ao contrário, a maioria deles não foi achada. Todavia, salientemos que mesmo com os poucos documentos encontrados, diários de classe, provas, inventário da biblioteca, pudemos chegar a conclusões importantes em nossa pesquisa.

Assim, embora o Arquivo Permanente possua uma série de documentos catalogados, fica claro de que eles não estão devidamente separados, o que dificulta sobremaneira a localização e, conseqüentemente, o respectivo acesso.

Registremos que, a nosso ver, os documentos localizados, e ainda não disponibilizados, no Arquivo Permanente constituem-se um verdadeiro tesouro para investigações acerca da Matemática presente na Escola de Minas de Ouro Preto.

1.2.5 Fontes Relacionadas à Escola Politécnica de São Paulo

Em termos da pesquisa estabelecida referente ao estabelecimento da Escola Politécnica de São Paulo, cabe-nos destacar inicialmente as inéditas fontes advindas da ETH de Zurique e da Universidade de Karlsruhe.

As referidas fontes foram obtidas em contato direto com as referidas instituições por meio de historiador Gert Schubring, orientador da presente tese.

Dessa forma, o diálogo com as fontes obtidas permitiu-nos avançar no conhecimento acerca da formação obtida por Antônio Francisco de Paula Souza em terras europeias.

¹⁰ Para a busca de documentos catalogados por palavras-chave consultar http://www.arquivopermanente.em.ufop.br/apem/index.php?option=com_wrapper&view=wrapper&Itemid=6

Por outro lado, devemos destacar também o estudo de duas importantes fontes, a saber, as notas de aula da disciplina Geometria Analítica e Cálculo Infinitesimal da EPSP, do ano de 1904 e o *Curso de Análise Matemática* de Luigi Fantappiè.

As notas de aula da disciplina Geometria Analítica e Cálculo Infinitesimal foram redigidas pelo aluno Adriano Goulin e posteriormente litogradas e organizadas na forma de caderno. A referida fonte foi consultada mediante visita à Biblioteca da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

O *Curso de Análise Matemática* consiste em uma compilação das notas das aulas ministradas por Fantappiè em seu curso na EPSP, redigidas e compiladas pelo seu assistente Omar Catunda. O exemplar analisado encontra-se no acervo da Biblioteca do Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo.

Diante disso, reiteremos que as revelações advindas da análise e do diálogo com todas as referidas fontes consistiram em relevantes passos no intento de investigarmos como se deu o processo de transmissão na EPSP e na FFCL.

1.2.6 Pontos de Acumulação

Por fim, devemos deixar claro um importante critério utilizado na escolha dos livros-textos a serem analisados, que intitulamos “Pontos de Acumulação”.

A partir do levantamento realizado na Biblioteca da AMAN, na Biblioteca Nacional e no Museu de Obras Raras da UFRJ, escolhemos as obras que apareciam um maior número de vezes e também com um maior número de edições como sendo as obras que seriam designadas como “pontos de acumulação”.

Dentro desse critério, a obra que constituiu-se como um importante ponto de acumulação foi a de Lacroix, tendo aparecido quatorze vezes com exemplares desde a segunda edição até a sétima edição.

A obra de Sturm também constituiu-se como ponto de acumulação, tendo aparecido quatro vezes, mas com edições vindo desde a nona até a décima terceira.

Outra obra que merece destaque nesse critério é a obra de Boucharlat, tendo aparecido oito vezes, desde a quinta edição até a oitava edição.

Assim, esclarecemos que com base no critério dos pontos de acumulação, escolhemos as obras de Lacroix, Sturm e Boucharlat como as primeiras a serem analisadas.

Em tempo, reparemos que a clássica obra de Cauchy “*Cours d’Analyse*” não aparece como um ponto de acumulação.

1.3 Questões Metodológicas

Nas origens da historiografia a história era caracterizada como “a ciência do passado”. No entanto, em outra concepção, Bloch (2001) a caracteriza como “a ciência dos homens no tempo”, enfatizando que nunca se explica plenamente um momento histórico fora do estudo de seu movimento.

Nessa linha de raciocínio ressalta-se que o passado em nada pode ser modificado, mas o conhecimento que se tem acerca dele é algo que está sempre em progresso, que incessantemente se transforma e aperfeiçoa.

Assim, Bloch (2001) enfatiza que “*os exploradores do passado não são homens completamente livres. O passado é seu tirano. Proíbe-lhes conhecer de si qualquer coisa a não ser o que ele mesmo lhes fornece*” (BLOCH, 2001, p.75)

Nessa mesma linha, no entendimento estabelecido por Le Goff (2003), o passado depende parcialmente do presente, chegando a confundir-se com este. Dessa forma, conforme pontua Bonfim (2013), “*uma das funções sociais da história é organizar o passado em função do presente*” (BONFIM, 2013, p.6)

Sabemos agora que o passado depende parcialmente do presente. Toda história é bem contemporânea, na medida em que o passado é apreendido no presente e responde, portanto, a seus interesses, o que não é só inevitável como legítimo. Pois que a história é duração, o passado é ao mesmo tempo passado e presente. Compete ao historiador fazer um estudo “objetivo” do passado sob sua dupla forma. Comprometido na história, não atingirá certamente a verdadeira “objetividade”, mas nenhuma outra história é possível. O historiador fará ainda progressos na compreensão da história esforçando para explicitar, no seu processo de análise, tal como um observador científico o faz, as modificações que eventualmente introduz em seu objeto de observador. (LE GOFF, 2003, p.51)

Nesse sentido, o passado e o presente se unem por meio de um elemento fundamental, a escrita da história. Nessa escrita a busca pela compreensão do passado acontece em função do presente, o qual se constitui como um ambiente que fornece os objetivos e as diretrizes da pesquisa a ser realizada.

Entendemos, dessa forma que, uma vez especificados os propósitos da pesquisa, a investigação histórica deve se dar com uma direção bem definida, sob uma observação intencional, no sentido estabelecido por Bloch (2001), considerando que: *“toda investigação histórica supõe, desde seus primeiros passos, que a busca tenha uma direção. No princípio, é o espírito. Nunca a observação passiva gerou algo de fecundo. Supondo, aliás, que ela seja possível.”* (BLOCH, 2001, p.79)

De alguma maneira, essa intencionalidade pré-definida em função da direção da pesquisa pode caracterizar a ótica escolhida, no sentido de que cada ponto de vista é único e singular. Nessa linha, o mesmo fato histórico não será reconstruído de maneira igual quando descrito por distintos historiadores, mas, ao contrário, a reescrita estará repleta de suas singularidades, contendo suas hipóteses, problemas, interpretações e respectivas escolhas de cada um.

Bloch (2001) torna a salientar a importância da escolha feita pelo historiador, que o acompanhará por todo o estudo.

Não deixa de ser menos verdade que, face à imensa e confusa realidade, o historiador é necessariamente levado à nela recortar o ponto de aplicação particular de suas ferramentas; em consequência, a nela fazer uma escolha que, muito claramente, não será a mesma do biólogo, por exemplo; que será propriamente uma escolha de historiador. Este é um autêntico problema de ação. Ele nos acompanhará durante todo o estudo. (BLOCH, 2001, p.52)

Fica evidente a importância acerca da escolha do historiador. Contudo tal escolha poderá ser influenciada pelas fontes, informações, documentos que estarão (ou não) disponíveis para consolidação da pesquisa.

Nesse sentido, Le Goff destaca a questão do documento, por um lado, sublinhando as dificuldades advindas do trabalho com estes.

No entanto, a dificuldade começa aqui. Se o documento é mais fácil de definir e referenciar que o fato histórico, que nunca é dado tal e qual, mas construído, não são menores os problemas que se põem ao historiador.

(...) As perdas, a escolha dos compiladores de documentos, a qualidade da documentação são condições objetivas, mas limitativas do ofício de historiador. Mais delicados são os problemas que se põem ao próprio historiador a partir desta documentação.

(LE GOFF, 2003, p.106)

Por outro lado, ao evocar a fala do historiador Paul Veyne, Le Goff destaca ainda a necessidade de um olhar crítico na análise dos documentos.

A história tornou-se científica ao fazer a crítica dos documentos a que se chama “fontes”. Paul Veyne disse (1971) que a história deveria ser “uma luta contra a ótica imposta pelas fontes”, que “os verdadeiros problemas de epistemologia histórica são problemas de crítica” e que o centro de toda a reflexão sobre o conhecimento histórico deveria ser o seguinte: “O conhecimento histórico é o que dele fizeram as fontes”.
(LE GOFF, 2003, p.109)

As particularidades do trabalho com documentos também são destacadas por Bloch (2011):

A despeito de que às vezes parecem imaginar os iniciantes, os documentos não surgem, aqui ou ali, por efeito qual misterioso decreto dos deuses. Sua presença ou ausência em tais arquivos, em tal biblioteca, em tal solo deriva de causas humanas que não escapam de modo algum à análise, e os problemas que sua transmissão coloca, longe de terem apenas o alcance de exercícios de técnicos, tocam eles mesmos no mais íntimo da vida do passado, pois o que se encontra assim posto em jogo é nada menos do que a passagem da lembrança através das gerações.
(BLOCH, 2001, p.83)

Dessa forma, iniciamos nossa busca por documentos, fontes e manuscritos que pudessem constituir-se como luzeiros na construção de um caminho, um caminho a ser tecido diante de tantas variáveis, a ser construído mediante as escolhas desse historiador.

Com efeito, muitos documentos foram examinados, questionados, analisados. Alguns desses interrogados pela primeira vez. Não existe uma forma padrão de análise, de questionamento das fontes, mas existe um direcionamento a ser dado e questões a serem esclarecidas, ainda que possamos obter respostas não completas, como, por exemplo: Como se deu o ensino de Cálculo no Brasil, a partir do século XIX? Como eram as aulas de Cálculo, nas escolas de engenharia e posteriormente nas faculdades? De que maneira os conceitos básicos do Cálculo foram transmitidos para o Brasil? De que forma foi constituída a comunidade matemática brasileira, já produzindo as próprias pesquisas?

Enfim, procuramos estabelecer um diálogo com as fontes encontradas e pesquisas já concluídas, no intuito de esclarecimento das referidas questões.

Coloca-se então o grande desafio: a construção que permeará todas essas questões.

Contudo, não se pretende reconstruir uma história perfeita, mas uma história composta pelos vestígios, pelos diálogos tecidos com as fontes e, até mesmo contendo elementos de falibilidade, no sentido indicado por Le Goff.

Mas, ciência do tempo, a história é um componente indispensável de toda atividade temporal. Mais do que sê-lo inconscientemente, sob a forma de uma memória manipulada e deformada, não seria melhor que o fosse sob a forma de um saber falível, imperfeito, discutível, nunca totalmente inocente, mas cujas normas de verdade e condições profissionais de elaboração e exercício permitam chamá-lo científico?
(LE GOFF, 2003, p.144)

Diante desse panorama, seguimos em nossa empreitada, entrelaçando saberes, estabelecendo diálogos e examinando vestígios. *“Como primeira característica, o conhecimento de todos os fatos humanos no passado, da maior parte deles no presente, deve ser, um conhecimento através de vestígios”* (BLOCH, 2001, p.73)

Consideramos que, por um lado, a reescrita de um fato histórico é intencionalmente direcionada a partir das questões norteadoras da pesquisa e, por outro lado, depende primordialmente das decisões tomadas pelo historiador. Assim, cabe-nos ressaltar nossa intencionalidade, no intento de traçar um caminho que nos leve a uma melhor compreensão sobre o desenvolvimento da análise no Brasil, perpassando, ao mesmo tempo, pelas questões centrais de nossa pesquisa.

Nesse sentido, entendemos que a construção desse caminho deve ser composto pelo entrelaçamento de todos os aspectos advindos das descobertas realizadas na análise das fontes e também das outras pesquisas.

Dessa maneira, estabeleceremos a concepção de nosso caminho como uma tapeçaria, uma trama, no sentido designado por Bonfim (2013).

A escolha do historiador constitui a história em suas fronteiras, pois esta se compõe como uma tapeçaria, uma trama, não se organiza, necessariamente, em uma sequência cronológica, uma vez que não existem fatos isolados. Uma mesma paisagem pode ser vista de várias janelas, assim como um mesmo episódio pode ser disposto em várias tramas. O historiador deve estar atento ao fato de que cada tipo de fonte exige um tratamento diferente, no cerne de uma problemática de conjunto. **Ao historiador, cabe escolher seu percurso e procurar fazer compreender as tramas.**

(BONFIM, 2013, p.5, GRIFO NOSSO)

Isto posto, uma vez que, “*ao historiador, cabe escolher seu percurso e procurar fazer compreender as tramas*” (BONFIM, 2013, p.5), nos convém finalmente conceber um caminho a ser pavimentado por meio da tecedura de todas as peças advindas das fontes, das investigações e dos diálogos com os documentos, não por meio da simples sobreposição das peças, mas, ao contrário, estabelecendo as ligações e as tramas das peças em variados níveis. “*O curso dos fatos não pode, pois, se reconstituir como um mosaico; por mais numerosos que sejam, os documentos são necessariamente indiretos e incompletos; deve-se projetá-los sobre um plano escolhido e ligá-los entre si.*” (VEYNE, 2008, p.124)

1.3.1 Transmissão e Imperialismo Cultural

Conforme já explicitado, nosso estudo busca entender como se deu o processo de recepção dos conceitos básicos da análise no Brasil e o surgimento da comunidade matemática brasileira, utilizando o conceito de transmissão como importante ferramenta.

Destaquemos a longa prática da utilização do conceito de transmissão¹¹ na História das Ciências e da Matemática. Por exemplo, no XVII ICHS¹² em 1985, Berkeley, o assunto geral dos simpósios sobre a História da Matemática foi “*Transmission*”. Esta concepção tradicional de transmissão foi recém utilizado no 25º ICHST¹³. Um dos simpósios (S 48) houve como título: “*How shall we write about how knowledge travels?*” *Knowledge* fica suposto aqui como uma constante nas viagens.

Deixamos claro, entretanto, que não consideraremos os conceitos transferidos como fundamentalmente imutáveis. Um novo sentido de transmissão foi estabelecido por Schubring (1999/2000), baseado em conceitos da sociologia das ciências, que toma conta das transformações do saber e que vamos utilizar como referencia neste trabalho.

¹¹ Considerando a relevância do conceito de circulação na historiografia recente, apreciamos a possibilidade de lançar mão do referido conceito nesse trabalho. No entanto, a partir da observação do projeto Cirmath (<http://cirmath.hypotheses.org/>) e, em particular, do artigo publicado por Nabonnand et al (2015), informado pelo orientador da presente tese, temos percebido que, no intento de caracterizar as circulações e trocas matemáticas, os autores adotam uma abordagem definida em três vertentes: a presença simultânea dos protagonistas, as trocas epistolares e a difusão dos textos impressos. Diante disso, temos entendido que o referido conceito está mais próximo da concepção mais tradicional de transmissão, não refletindo em recepção, uma vez que, não considera necessariamente as transformações dos conceitos transmitidos.

¹² International Congress of History of Science

¹³ International Congress of History of Science and Technology

Schubring salienta as fraquezas da noção tradicional e explica a transmissão como um processo com dois polos:

A “transmissão” é uma noção bastante tradicional na história da ciência e dirige os processos da transmissão multicultural de conceitos. Essa noção tem sido usada há longo tempo para estudar como as realizações científicas se disseminaram de uma cultura para outra (por exemplo, como a ciência grega foi transmitida à Europa Ocidental pelos árabes). No entanto, nessa noção tradicional, a “transmissão” sofria de algumas deficiências críticas. Um primeiro problema é que os conceitos transferidos são concebidos como permanecendo essencialmente idênticos. Isso significa que conceitos isolados são estudados sob o ponto de vista de se descobrir onde emergiram pela primeira vez. Tal enfoque tende a negligenciar o fato de que um conceito usualmente está embutido tanto num campo conceitual como num contexto cultural, o que faz com que um conceito, uma vez transmitido, não mais permaneça idêntico ao original, tendo sido transformado no processo. Um segundo problema da prática tradicional é que ela concebe o desenvolvimento histórico de uma disciplina científica em termos de certos “centrismos”, isto é, privilegia certas culturas como as mais elevadas e mais civilizadas; em consequência, essas culturas são representadas como os respectivos centros mais importantes. (SCHUBRING, 1999, p.32)

Schubring enfatiza a necessidade de abandonar a noção tradicional reducionista de transmissão e, dessa forma, conceber uma concepção permitindo estudos transculturais. Assim, uma noção adaptada de desenvolvimento científico há de ser baseada no conceito de intercâmbio. Devemos destacar que, o essencial dessa nova concepção é o papel decisivo do receptor – concebido como ativo e não como passivo:

Para vencer o reducionismo da idéia tradicional de transmissão, devemos conceber a “transmissão” como um processo de transformação no qual a parte essencial é desempenhada pelo receptor. Isso significa que o receptor tem de fato um papel ativo. Em geral, não há recepção passiva – ao contrário, o conhecimento transmitido é transformado pelos grupos sociais e culturais receptores de acordo com seus próprios conjuntos de valores ou – usando um termo um tanto problemático – de acordo com sua identidade cultural. Dessa maneira, a “transmissão” deve ser entendida como um processo bipolar: um polo é o conhecimento transmitido, e o outro sua transformação segundo a “identidade cultural” dos receptores. (SCHUBRING, 1999, p.32-33)

Ou resumindo:

[...] um conceito, usualmente, está embutido tanto num campo conceitual como num contexto cultural, o que faz que ele, uma vez

transmitido, não mais seja idêntico ao original, tendo sido transformado no decorrer do processo.

(SCHUBRING, 2004, p.14)

Assim, inicialmente, buscamos identificar quais são os principais elementos presentes em um processo de transmissão.

Nesse sentido, Schubring (2002) em sua investigação acerca do nascimento das comunidades matemáticas nas Américas elabora padrões estruturais, no sentido de comparar transmissões da matemática de diferentes metrópoles europeias para os sistemas educacionais emergentes nos países do continente americano e as eventuais transformações de alguns desses sistemas em centros metropolitanos.

Dessa forma, aponta-se a dominação do modelo francês de educação nas Américas, com algumas influências de práticas estabelecidas na Universidade de Coimbra na Escola Central no Brasil nos dois últimos terços do século XIX.

Em particular é observado que as primeiras inovações estruturais nos EUA surgiram como recepção do modelo francês.

No entanto, aponta-se também a influência do modelo prussiano no estabelecimento de universidades norte-americanas no último terço do século XIX, a saber, Johns Hopkins, Clark e Chicago.

Por fim, destaca-se ainda o fenômeno de “fuga” de matemáticos para as Américas, como consequência de políticas ditatoriais em vários países no século XX.

Diante do exposto, entendemos que a análise tecida por Schubring traz à tona importantes características presentes no processo de transmissão. Nesse sentido, devemos destacar que a referida análise levou fortemente em consideração a estrutura das instituições científicas nas metrópoles e o olhar sobre a criação e o desenvolvimento das instituições nos países periféricos.

Percebamos, ainda, a primordial função desempenhada pelo ensino no processo de transmissão. Nesse sentido, podemos entender que, no processo que se inicia com as primeiras recepções até o momento que as próprias produções são estabelecidas, o papel do ensino se consolida como um ambiente praticamente obrigatório e extremamente relevante para que todo o processo de transmissão possa ser bem sucedido.

Somemos a isso o papel desempenhado pelas traduções de livros-textos, já detectados no Brasil e nos EUA, e pela transferência de matemáticos entre os países.

Assim, já temos uma cena formada por importantes características que podem estar presentes nos processos de transmissão. Em suma, temos como elementos significativos:

- A relevância do papel do ensino no estabelecimento do processo de transmissão;
- Estudo dos modelos referentes às instituições científicas e às suas funções de formação, instituídas nos países receptores, tendo como referência modelos já estabelecidos nas metrópoles;
- Presença das traduções de livros-textos produzidos nas metrópoles;
- Investigação dos elementos da transmissão que podem ter sido advindas da transferência de matemáticos das metrópoles.

O estudo apresentado por Xiaoquin & Yingho (2013) aponta um processo de múltiplas transmissões para a China, a partir do século XIX, tendo a tradução um papel de protagonismo em todo esse curso.

A partir do impacto causado pela conclusão da tradução de “*Os Elementos*” concluída em 1856¹⁴, pelo missionário inglês Alexander Wylie (1815-1887) e pelo matemático chinês Li Shanlan, existiu um crescente interesse dos chineses na matemática ocidental.

A influência dos *Elementos* é aparente nos escritos de Li Shanlan. Por exemplo, em Fangyuan Chanyou, dez lemas são dados antes que as regras Jianzhui sejam discutidas. Depois de Li, muitos matemáticos chineses realizaram estudos aprofundados dos *Elementos*. Foi um dos livros-textos mais importantes em muitas academias e escolas no final da Dinastia Qing.

Depois de chegar a Shanghai, Wylie descobriu que os chineses estavam muito interessados na matemática ocidental e muitos intelectuais estavam ardentes em aprendê-la. Ele percebeu que uma introdução superficial da ciência ocidental não atenderia às suas demandas. De fato, enquanto ele estava compilando *A Compendium of Arithmetic*, ele elaborou um plano para traduzir determinados livros-textos ocidentais de álgebra e cálculo no sentido de ajudar os chineses a aprender a matemática ocidental sistematicamente.¹⁵

(XIAOQIN & YINGHO, 2013, p.47-48, TRADUÇÃO NOSSA)

¹⁴ Até essa data existiam apenas as traduções dos seis primeiros livros de “*Os Elementos*”. O trabalho de Wylie e Shanlan foi efetuar a tradução de nove livros.

¹⁵ The influence of the *Elements* is apparent in Li Shanlan’s writings. For instance, in Fangyuan Chanyou, ten lemmas are given before the Jianzhui rules are discussed. After Li, many Chinese mathematicians made in-depth studies of the *Elements*. It was one of the most important textbooks in many academies and schools in the late Qing Dynasty.

After coming to Shanghai, Wylie found that the Chinese were very interested in the western mathematics and many intellectuals were ardent in learning it. He realized that a superficial introduction of the western science could not meet their demands at all. In fact, while he was compiling *A Compendium of Arithmetic*, he drew up a plan to translate selected western textbooks on algebra and calculus in order to help the Chinese learn the western mathematics systematically.

Logo após a tradução de “*Os Elementos*”, Wylie e Li traduziram um popular livro de cálculo dos EUA chamado “*Elements of Analytic Geometry and of Differential and Integral Calculus*”¹⁶ (*Daiweiji Shiji*).

Xiaoqin & Yingho esclarecem que a publicação de *Daiweiji Shiji*, em 1859, ocasionou forte interesse entre muitos intelectuais chineses, ressaltando ainda que foi o primeiro livro-texto de cálculo na China, de tal forma que, esse momento é marcado como o início da introdução da matemática ocidental na China. Destaca-se ainda que, após a introdução do cálculo, vários matemáticos chineses alcançaram muitas conquistas que não seriam possíveis obter somente com os métodos tradicionais.

Por outro lado, devemos enfatizar uma singularidade no caso chinês de transmissão, uma vez que, a partir do início do século XX, aconteceu uma segunda etapa de transmissão, desta vez tendo o Japão como métrópole.

Essa nova dinâmica no processo de transmissão, teve como marco inicial o golpe Wuxu, em 1898. Nesse novo momento, o número de estudantes chineses que foram fazer seus estudos no Japão cresceu sobremaneira.

Nesse contexto é destacado que os estudantes chineses começaram a traduzir os livros japoneses na esperança de fortalecer sua terra natal. Essa dinâmica evoluiu de tal forma que, assim que um livro era lançado no Japão, ele já era traduzido por várias pessoas simultaneamente para o chinês.

Dessa maneira, pontua-se ainda que a influência japonesa foi exercida de tal forma que, a nova regulamentação das escolas chinesas direcionadas pelo governo Qing em 1904 foi baseada no programa de ensino japonês.

Por fim, uma não-usual terceira etapa no processo de transmissão para a China é iniciada após a queda da Dinastia Qing, em 1911 e a posterior fundação da República da China, em 1912. O sistema educacional estabelecido foi inspirado primordialmente no modelo alemão, ressaltando-se ainda que, entre 1919 e 1949, a educação matemática chinesa foi modelada, tendo como base modelos já estabelecidos pelos países europeus e pelos EUA, sendo os livros-textos e doutrinas pedagógicas advindos principalmente dos EUA.

Assim, o rico estudo concebido por Xiaoqin & Yingho nos esclarece o papel primordial da tradução no múltiplo processo de transmissão para a China.

¹⁶ Em particular, chama-se a atenção de que grande parte da referida obra foi escrita por estudantes universitários com habilidades médias.

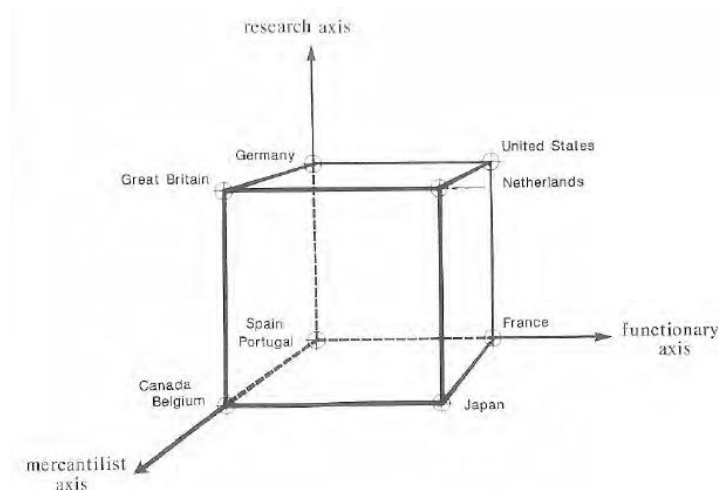
Ademais, cabe-nos destacar acerca do denso estudo de Lewis Pyenson, em particular sobre a noção de imperialismo cultural. Pyenson estuda a difusão das ciências exatas sob o entendimento relativo à noção de imperialismo cultural. Nessa linha, chama-se atenção para a aproximação entre as estratégias das metrópoles para expandir a ciência sob um molde nacional e a resposta da periferia frente às incursões imperialistas quando consideradas as atividades dos cientistas como vetores de transmissão.

A estratégia imperialista de criar instituições em outros países é citada como uma característica do imperialismo cultural e das ciências exatas. Conforme já citado, nessa concepção os cientistas são vistos como vetores de difusão, não pressupondo uma identidade entre seus objetivos pessoais e as políticas nacionais, mas considerados como trabalhadores que refletem os padrões estabelecidos nos treinamentos nas metrópoles.

O imperialismo cultural é estruturado por Pyenson considerando três dimensões. Nesse sentido, afirma-se que as atitudes direcionadas para o imperialismo cultural exibem variações tanto nos poderes metropolitanos, quanto na dependência colonial.

Dessa forma é concebido um modelo descritivo representado por meio de três eixos ortogonais de estratégia imperialista: o eixo funcional, o eixo da pesquisa e o eixo mercantilista.

Figura 2: Três eixos estratégicos do imperialismo cultural



Fonte: Pyenson, 1989.

Nesse sentido, o eixo funcional encaixa-se com a prática francesa, considerando a estreita união entre interesses religiosos, militares e acadêmicos, nas quais o desejo

pela produção de pesquisa original diminuiu sobremaneira. Nessa concepção um cientista em uma posição além-mar era primordialmente um funcionário, em estreita obediência aos superiores, seja um alto funcionário do governo ou um alto membro do clero.

A direção dada pelo eixo de pesquisa parece estar direcionada à prática alemã, por meio da flexível relação entre os interesses militares, econômicos e acadêmicos. Assim, um cientista alemão além-mar tinha a total liberdade de ser um perseguidor do novo conhecimento.

O terceiro eixo dado pela direção mercantilista seria caracterizado por meio dos cientistas que atuavam pelo puro interesse econômico.

Assim, a análise tecida na presente tese deverá considerar a noção de imperialismo cultural, nos termos de Pyenson. Nesse sentido, cabe-nos investigar se existem características relacionadas ao imperialismo cultural presentes no processo de transmissão para o Brasil.

No entanto, diante do exposto, entendemos que o processo de transmissão para o Brasil consistiu em um caso atípico.

Por um lado, devemos sinalizar que, durante todo o século XIX, a elite e as classes superiores no Brasil foram fortemente influenciadas pelos valores e pela cultura francesa. Assim, durante todo o referido período, tivemos uma transmissão advinda da França, de tal forma que, nem mesmo os livros franceses tiveram que ser traduzidos, uma vez que, muitos membros das classes superiores já tinham familiaridade com o idioma, o que pode explicar, de alguma maneira, a grande quantidade de livros de cálculo franceses utilizados no Brasil, por praticamente todo o século XIX.

Dessa forma, no período do século XIX, estamos diante de um fenômeno raro, no sentido de não termos um processo de transmissão estabelecido por meio do imperialismo cultural, mas por meio da utilização de livros-textos de língua estrangeira sem a necessidade de traduzí-los, diante de tamanha consonância com a cultura francesa.

Ficou desconhecido até agora que, o primeiro caso de um imperialismo cultural atingindo a Matemática no Brasil, aconteceu relacionado com o processo de contratação de matemáticos estrangeiros para as posições de professores nas novas estruturas de universidade, saindo do padrão tradicional de formação de engenheiros e concebendo o ensino superior vinculado com pesquisa. Os matemáticos italianos que foram chamados

para tais posições foram enviados pelo governo italiano fascista para atuar em seu programa de disseminação da “*italianità*”.

Assim, considerando o período do século XX, devemos pontuar, por um lado, a existência da propaganda cultural italiana, dentro dos interesses do líder político da Itália fascista, Benito Mussolini, no contexto do envio de intelectuais para o exterior para expansão do fascismo e, por outro lado, com o surgimento das Universidades no Brasil, a consolidação da Missão Italiana em solo brasileiro, principalmente em São Paulo e no Rio de Janeiro.

Assim, diante da política expansionista fascista e do estabelecimento da Missão Italiana no Brasil podemos entender que, pela primeira vez, o Brasil foi alvo do imperialismo cultural, no sentido estabelecido por Pyenson.

O caso dos EUA fica fora do escopo deste artigo. Segundo uma comunicação pessoal por Ubiratan d’Ambrosio, as relações dos EUA com a matemática brasileira iniciaram-se no começo dos anos 1950, por iniciativa do Marshall Stone, sendo presidente da IMU desde 1952. No entanto, as relações com a física brasileira já haviam iniciado desde 1941, e se desenvolveram intensamente como mostrado por Olival Freire Junior na sua palestra convidada “Scientific Exchanges Between the US and the Brazil in the 20th Century: Cultural Diplomacy and Transnational Movements”, no 25 ICHST, em 29 de julho de 2017.

Portanto, conforme veremos em mais detalhes nos capítulos 4 e 6, a consolidação da Missão Italiana em solo brasileiro pode ser entendida como a efetivação do imperialismo cultural italiano no Brasil, no contexto da política expansionista fascista.

2. Breve histórico do desenvolvimento da Análise até o século XIX

« Jamais découverte n'honora plus l'esprit humain: l'infini, cet être idéal parut soumis au calcul, et opérer des prodiges. »

J.L.Boucharlat

Nesse capítulo, nos dedicaremos a refletir, procurando estabelecer uma visão geral de como se deu o desenvolvimento dos conceitos básicos da Análise. Devemos deixar claro que não pretendemos esgotar o assunto, nem tampouco esperamos explicitar algo que já não tenha sido mencionado na historiografia.

Nosso objetivo é de traçar um pano de fundo que possa nos referenciar para as reflexões acerca do avanço dos conceitos fundamentais da Análise no Brasil até o século XIX.

Schubring (2005) nos traz uma visão geral acerca da história dos conceitos fundamentais em seu intento de investigar o desenvolvimento das ideias relacionadas às quantidades infinitamente pequenas. Nesse estudo é citado o trabalho realizado por Bohlmann (1899)¹⁷ que, em sua pesquisa histórica sobre os livros-textos de Cálculo Infinitesimal, considerou três elementos básicos no Cálculo Diferencial e Integral, a saber, os conceitos de número, função e limite.

Schubring salienta ainda que o objeto que foi chamado de limite por Bohlmann, constitui um dos elementos do campo dos processos de limite na matemática, o qual foi eventualmente distinguido por meio dos conceitos de limite, de continuidade e de convergência.

Em nosso estudo, assumiremos a divisão dos conceitos básicos considerado por Schubring acrescentando os conceitos chaves do Cálculo, a derivada e a integral.

2.1 Conceito de Número

Entendemos que não é possível apresentar uma história “unificadora” dos números, tampouco temos a intenção de apresentar as diversas teorias que poderiam dar melhor explicação do surgimento do conceito de número e de sua relação com a invenção da escrita.

¹⁷ George Bohlman “Übersicht über die wichtigsten Lehrbücher der Infinitesimal- Rechnung, von Euler bis auf die heutige Zeit. Bericht, erstattet der Deutschen Mathematiker-Vereinigung” jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1897,6:91-110.

Contudo, pensamos também que o processo de contagem fez parte da atividade humana ao longo dos milênios. No início os procedimentos de contagem não estavam associados com o conceito abstrato de número, ou seja, não havia um mesmo símbolo que designasse uma mesma quantidade de objetos diferentes. E então, posteriormente, foram tecidos procedimentos que fizeram essa associação a qual caracteriza o que hoje chamamos de conceito abstrato de número.

Entretanto, foi com os antigos gregos que o próprio número tornou-se um objeto de estudo. Basta percebermos, por exemplo, a simples distinção entre números pares e ímpares apresentada no Livro IX dos Elementos de Euclides.¹⁸ Nesse contexto, surge a necessidade da apresentação de uma definição de número.

O conceito de número para os antigos gregos relacionava-se completamente com o que chamamos hoje de números naturais, conforme podemos perceber nas duas primeiras definições do Livro VII de *Os Elementos*. “*Unidade é aquilo segundo o qual cada uma das coisas existentes é dita uma. E número é a quantidade composta por unidades.*” (EUCLIDES, 2009, p.269)

Nos *Elementos* era feita uma completa distinção do trabalho com os números com respeito ao trabalho com as grandezas. Roque (2012), explicita claramente a natureza de suas semelhanças e distinções.

Tanto as grandezas quanto os números são agrupamentos de unidades que não são divisíveis; já as grandezas geométricas são divisíveis em partes da mesma natureza (uma linha é dividida em linhas; uma superfície, em superfícies etc.) A medida está presente nos dois casos, mas mesmo quanto uma proporção sobre medida possui enunciados semelhantes para números e grandezas, ela é demonstrada de modos distintos. (ROQUE, 2012, p.188)

Embora o conceito de razão seja vagamente definido como: “*uma razão é a relação de certo tipo concernente ao tamanho de duas magnitudes de mesmo gênero*” (EUCLIDES, 2009, p.205), ela aparece como importante ferramenta, sem ser atribuído um sentido à razão entre duas grandezas a e b de maneira isolada, uma vez que nem toda a grandeza poderia ser associada a um número.

Na verdade, o significado estava atrelado com a igualdade entre duas razões, definidas como proporção. Assim, dadas quatro grandezas foi definido um critério para

¹⁸ Antes disso, os Pitagóricos já haviam documentado tal diferença por meio do poeta Epicharmus.

classificar se a razão entre duas dessas grandezas seria igual a razão entre as outras duas. Tal classificação é expressa nas definições 5 e 6 do Livro V de *Os Elementos*.

Magnitudes são ditas estar na mesma razão, uma primeira para uma segunda e uma terceira para uma quarta, quando os mesmos múltiplos da primeira e da terceira ou, ao mesmo tempo, sejam inferiores aos mesmos múltiplos da segunda e da quarta, relativamente a qualquer tipo que seja de multiplicação, cada um de cada um, tendo sido tomados correspondentes. E as magnitudes, tendo a mesma razão, sejam ditas em proporção. (EUCLIDES, 2009, p.205)

Uma tentativa de reescrita dessa definição em notação atual, pode ser expressa da seguinte forma:

Concluimos que $a : b :: c : d$ se, somente se, para todo par de inteiros positivos m e n tivermos um dos seguintes casos:

- i) se $ma < nb$ então $mc < nd$
- ii) se $ma = nb$ então $mc = nd$
- iii) se $ma > nb$ então $mc > nd$

Dessa forma, conforme ressaltado por Roque (2012), fica claro o caráter geométrico dos objetos matemáticos utilizados pelos antigos gregos, a saber, números, grandezas, e razões entre estes.

Os objetos matemáticos, na época, podiam ser números, grandezas, razões entre números e razões entre grandezas. A homogeneidade desses objetos só existirá quando a razão entre duas grandezas quaisquer puder ser identificada a um número, o que só será possível muitos séculos mais tarde, com a definição dos números reais. (ROQUE, 2012, p.197)

De fato, tal homogeneidade só foi alcançada quando a noção de número como objeto matemático deixou de ser subordinado à ideia de quantidade, materializado exatamente com o estabelecimento da noção de número real no final do século XIX.

Os relatos contidos na historiografia tradicional da matemática costumeiramente fazem um salto da exposição da matemática desenvolvida na Grécia Antiga, por volta do século III a.C, para o século XV d.C, época que a matemática voltou a desenvolver-se na Europa.

Diante do exposto, nos cabe citar ainda as dificuldades de aceitação dos números negativos e imaginários ao longo da história, além da hesitação em termos do reconhecimento do zero como número.

Ainda no início do século XIX, o estatuto dos números negativos e imaginários não estava completamente definido. Nessa linha, o próprio Cauchy entendeu que o zero deveria ser excluído do domínio dos números, indo de encontro com a posição estabelecida por outros matemáticos da época.

2.1.1 Estatuto dos Números Reais

A fim de nos situar melhor no contexto estabelecido em torno do desenvolvimento da noção de número real no século XIX, permitamo-nos tecer alguns comentários acerca da peculiar concepção de Cauchy sobre os estatutos dos números e das quantidades.

A concepção de Cauchy acerca do conceito de número assemelha-se com a noção propagada e defendida por D'Alembert e Bézout evidenciada logo no início de seu *Cours d'analyse algébrique*. Cauchy distinguiu explicitamente a noção de número da noção de grandeza, assumindo, por um lado, que os números devem ser resultados de medições e, por outro, que as operações básicas com as quantidades são estabelecidas por acréscimos ou diminuições.

Schubring (2005) ressalta duas consequências imediatas dessa concepção. A primeira é que considerando a distinção realizada de que somente os números positivos eram considerados como números e que as quantidades seriam concebidas sendo os números acrescidos de um sinal, fica claro que, para Cauchy, os números negativos não possuíam status de número, mas de quantidade. Tais números foram posteriormente definidos baseados na noção de quantidades opostas. A outra consequência advinda da concepção do conceito de número como resultado de medida é a exclusão do zero do domínio dos números.

Dessa forma, no que tange à exclusão do zero do domínio dos números, Cauchy se enquadra na concepção estabelecida por vários outros matemáticos como, por exemplo, Cousin, Martin, Carnot, entre outros.

No tocante ao estatuto dos números imaginários, Schubring revela que Cauchy sequer os considerava como quantidades, mas como expressões. “*Ele não atribui*

qualquer carácter numérico para os números imaginários, apenas discutindo-os como expressões imaginárias.”¹⁹ (SCHUBRING, 2005, p.449, TRADUÇÃO NOSSA)

Os trabalhos de Cauchy também se mostraram importantes no estabelecimento da análise complexa como um domínio próprio da análise. O seu primeiro trabalho envolvendo análise complexa foi uma memória escrita em 1814, no contexto do cálculo com integrais impróprias. Nesse trabalho, ressalta-se que vários matemáticos, como Euler, Laplace e Legendre usavam “*um tipo de indução baseada na passagem do real para o imaginário*”²⁰ (CAUCHY apud BOTTAZINI, 1986, p 132, TRADUÇÃO NOSSA) e que em sua visão deveriam “*estabelecer a passagem do real para o imaginário por meio de uma análise direta e rigorosa*”²¹ (CAUCHY apud BOTTAZINI, 1986, p 132, TRADUÇÃO NOSSA)

De fato, tal intenção fica mais evidente quando constatamos a importância da arquitetura feita por Cauchy para a análise complexa, a partir da publicação do *Cours d’analyse* expressa por Bottazzini (1986):

Em suas mãos o cálculo de quantidades complexas tornou-se uma ferramenta indispensável da análise, perdendo a aura de mistério e inexplicabilidade que acompanhavam os números complexos desde de sua primeira aparição na solução de equações algébricas de terceiro grau.²² (BOTTAZZINI, 1986, p.126, TRADUÇÃO NOSSA)

Dessa forma, cabe-nos por um lado destacar a importância conceitual dos números complexos, e por outro, registrar que, embora Cauchy tenha se consolidado como um dos personagens principais no estabelecimento da análise complexa, ele trabalhou com sérias reservas no tocante aos imaginários, os considerando como “expressões”.

Assim, destacamos que a fundamentação da análise em bases sólidas foi consolidada no século XIX, mas durante boa parte do século o problema permaneceu em aberto. Edwards (1979) aponta que um dos obstáculos que contribuíram para a não

¹⁹ He does not assign any number character to imaginary numbers, only discussing these as imaginary expressions

²⁰ a type of induction based on the passage from real to imaginary

²¹ to establish the passage from the real to the imaginary by a direct and rigorous analysis

²² In his hands the calculus of complex quantities became an indispensable instrument of analysis, losing the aura of mystery and inexplicability that had accompanied complex numbers since their first appearance in the solution of algebraic equations of the third degree.

resolução do problema foi a ausência de um completo entendimento de um sistema para os números reais. Por conseguinte, a falta de tal entendimento gerou lacunas no sistema então estabelecido.

Por exemplo, a prova de Bolzano-Cauchy para o teorema do valor intermediário para funções contínuas demandou a “propriedade das sequências monótonas limitadas” dos números reais – no sentido de que toda sequência $\{a_n\}$ limitada de números, que é crescente ($a_n \leq a_{n+1}$ para todo n) ou decrescente ($a_n \geq a_{n+1}$ para todo n), é convergente. A mesma propriedade dos números reais é necessária para estabelecer a suficiência do critério de convergência de Cauchy, e foi implicitamente assumido tanto por Cauchy, quanto por Riemann em suas provas de existência da integral sob hipóteses adequadas. No entanto, a validade dessa propriedade básica dos números reais não foi verificada, mas apenas foi assumida evidente em fundamentos geométricos.²³ (EDWARDS, 1979, p.329, TRADUÇÃO NOSSA)

Nesse sentido, Roque (2012) cita variados exemplos contraintuitivos que apareceram nesse período, destacando que anteriormente as funções surgiam de problemas concretos, mas nesse novo contexto vinham do interior da própria matemática, a partir dos esforços para a delimitação dos conceitos que estavam sendo forjados para que pudessem servir de fundamento para a análise, como os de função, continuidade e diferenciabilidade. Por outro lado, tais investigações também tiveram o papel de intensificar o questionamento acerca da natureza dos números reais.

Em meados do século XIX, diversos problemas matemáticos conduziram a um questionamento sobre o que é um número real e sobre como os racionais e irracionais se distribuem na reta. O estudo da convergência de séries e o uso de limites motivavam a análise dos números para os quais as séries convergem: como esses números se distribuem na reta; como uma sequência de números tende para números de outro tipo; que números podem ser encontrados no meio do caminho etc. (ROQUE, 2012, p.461)

Nesse período, especialmente no último terço do século XIX, houve um crescente número de publicações buscando apresentar uma definição precisa de número

²³ For example, the Bolzano-Cauchy proof of the intermediate value theorem for continuous functions required the "bounded monotone sequence property" of the real numbers - to the effect that every bounded sequence $\{a_n\}$ of numbers, that is either increasing ($a_n \leq a_{n+1}$ for all n) or decreasing ($a_n \geq a_{n+1}$ for all n), is convergent. This same property of the real numbers is needed to establish the sufficiency of the Cauchy convergence criterion, and it was implicitly assumed by both Cauchy and Riemann in their proofs of the existence of the integral under appropriate hypotheses. However, the validity of this basic property of the real numbers was not verified, but merely assumed to be evident on geometrical grounds.

real. Em particular, o ano de 1872 foi marcado por importantes publicações nessa área, praticamente simultâneas, de Dedekind, George Cantor (1845-1918) e outros matemáticos como Charles Meray (1835-1911) e Eduard Heine (1821-1881).

O trabalho publicado por Dedekind em 1872 foi decisivo para a formulação e sistematização da estrutura referente aos números reais. No entanto, o interesse específico pelo tema e a conscientização de sua complexidade se deu a partir da demanda advinda das aulas ministradas na Escola Politécnica de Zurique, a partir do ano de 1858.

Minha atenção foi primeiramente direcionada para as considerações que formam o objeto desse panfleto no outono de 1858. Como professor da Escola Politécnica de Zurique, eu me vi pela primeira vez, obrigado a fazer conferências sobre os elementos do cálculo diferencial e nunca antes senti tão intensamente a falta de uma fundamentação científica para a aritmética.²⁴

(FAUVEL & GRAY, 1987, p.573, TRADUÇÃO NOSSA)

Dedekind percebe não somente a demanda de uma fundamentação para a aritmética, mas também deixa evidente a busca por uma explicação acerca da continuidade e/ou de seu uso.

Essa afirmação de que o cálculo diferencial lida com magnitudes contínuas é tão frequentemente feita, mas nenhuma explicação desse continuidade ainda foi dada, mesmo a mais rigorosa exposição do cálculo diferencial não baseia suas provas sobre a continuidade, mas, com maior ou menor consciência desse fato, lançam mão das noções geométricas ou daquelas sugeridas pela geometria, ou ainda dependem de teoremas os quais nunca foram estabelecidos de maneira puramente aritmética.

[...] E então só restava descobrir a sua verdadeira origem nos elementos da aritmética e assim, ao mesmo tempo, assegurar uma real definição da essência da continuidade.²⁵

(FAUVEL & GRAY, 1987, p.573, TRADUÇÃO NOSSA)

²⁴ My attention was first directed toward the considerations which form the subject of this pamphlet in the autumn of 1858. As professor in the Polytechnic School in Zurich I found myself for the first time obliged to lecture upon the elements of the differential calculus and felt more keenly than ever before the lack of a really scientific foundation for arithmetic.

²⁵ The statement is so frequently made that the differential calculus deal with continuous magnitude, and yet an explanation of this continuity is nowhere given; even the most rigorous expositions of the differential calculus do not base their proofs upon continuity but, with more or less consciousness of the fact, they either appeal to geometric notions or those suggested by geometry, or depend upon theorems which are never established in a purely arithmetic manner.

[...] It then only remained to discover its true origin in the elements of arithmetic and thus at the same time to secure a real definition of the essence of continuity.

Nessa linha de raciocínio, Roque conclui: “*a fim da caracterizar a continuidade, Dedekind julgava necessário investigar suas origens aritméticas. Foi o estudo aritmético da continuidade que levou à proposição dos chamados “cortes de Dedekind”*” (ROQUE, 2012, p.464)

Dedekind percebe que, na correspondência entre os pontos da reta com os números racionais, existem ausências na reta, ou seja, existem pontos na reta que não correspondem a números racionais, ocasionando, dessa maneira, incompletezas ou descontinuidades. Após algum tempo de busca, Dedekind finalmente encontra sua resposta expressando-a por aquilo que denominou de “essência da continuidade”:

Encontrei a essência da continuidade no inverso, ou seja, no seguinte princípio: Se todos os pontos da reta localizam-se em duas classes, tais que, todos os pontos da primeira classe situem-se a esquerda de todo ponto da segunda classe, então existe um, e apenas um, ponto que produz essa divisão de todos os pontos em duas classes, isso corta a reta em duas partes.²⁶

(DEDEKIND, 1963, p.11, TRADUÇÃO NOSSA)

Nessa busca pela continuidade é definido o corte de números racionais como uma partição (A_1, A_2) de $\mathbb{Q}$ ²⁷ em dois subconjuntos disjuntos não-vazios, tais que todo elemento de A_1 é menor que todo elemento de A_2 . Em seguida, Dedekind prova que existem infinitos cortes que não são gerados por números racionais. A partir dessa argumentação, formaliza-se finalmente o conceito de número irracional, no sentido de que cada corte é caracterizado por um número racional ou por um número não racional, sendo esses definidos como números irracionais.

Sempre que, então, fizermos um corte (A_1, A_2) produzido por um número não racional, nós criamos um novo número, um número irracional α , o qual consideraremos completamente definido por esse corte (A_1, A_2) ; diremos que o número α corresponde a esse corte, ou que produz esse corte. A partir de agora, portanto, todo corte definido corresponde a um número racional ou a um número irracional e, consideramos dois números como diferentes ou desiguais sempre, e somente, quando correspondem a cortes essencialmente diferentes.²⁸

(DEDEKIND, 1963, p.15 TRADUÇÃO NOSSA)

²⁶ I find the essence of continuity in the converse, i.e., in the following principle: If all points of the straight line fall into two classes such that every point of the first class lies to the left of every point of the second class, then there exists one and only one point which produces this division of all points in two classes, this severing of the straight line in two portions.

²⁷ Dedekind usou o símbolo R para referir-se ao domínio dos números racionais.

²⁸ Whenever, then, we have to do with a cut (A_1, A_2) produced by no rational number, we create a new, an irrational number α , which we regard as completely defined by this cut (A_1, A_2) ; we shall say that the number α corresponds to this cut, or that it produces this cut. From now on, therefore, to every definite

Nesse sentido, a continuidade é caracterizada pela proposição, formulada e demonstrada por Dedekind, afirmando que, se o sistema de números reais pode ser rompido em duas classes U_1 e U_2 tais que todo número α_1 da classe U_1 é menor que todo número α_2 da classe U_2 , então existe um, e somente um, número α que produz esse rompimento.

A partir dessa ideia é formalizado o que chamamos de “Cortes de Dedekind”, definindo o corte de números racionais. Nesse sentido, Roque (2012) explica claramente a “gênese” da formação do conjunto dos números reais:

Para obter um conjunto numérico que traduza fielmente a continuidade da reta, Dedekind usou um procedimento que se tornaria muito frequente na matemática. Sempre que encontrarmos um número não racional produzindo um corte, deveremos incluir esse número na nova categoria a ser criada, que deve admitir racionais e não racionais. Ou seja, quando o corte é um número irracional, esse número será reunido aos racionais formando um conjunto, que gozará da propriedade de continuidade da reta, chamado de “conjunto dos números reais”. Com essa operação, esse conjunto não será mais admitido como dado, mas definido de modo preciso.

(ROQUE, 2012, p.467)

Sem dúvida alguma, a formalização do conceito de número real por meio dos Cortes de Dedekind efetivou-se como decisivo passo para a completa resolução acerca dos problemas vinculados à fundamentação da análise e, ao mesmo tempo, para a solidificação definitiva do estatuto referente ao conceito de número.

2.2 Conceito de Função

As relações funcionais são percebidas na matemática desde os tempos antigos, na matemática grega e também pelos babilônios. Contudo, somente nos tempos modernos, o conceito de função tornou-se um conceito próprio e independente, entendido em consonância com a ideia de quantidade.

Nesse trajeto, ressaltamos o importante papel desempenhado pela física matemática, trabalhando com a variação do espaço em função do tempo, e principalmente, o desenvolvimento do simbolismo algébrico iniciado com Viète,

cut there corresponds a definite rational or irrational number, and we regard two numbers as different or unequal always and only when they correspond to essentially different cuts.

permitindo a representação das mais diversas equações com um número limitado de símbolos.

A primeira formulação mais elaborada do conceito de função foi feita por Descartes, em *La Géométrie* (1637), por meio da dependência mútua entre duas variáveis expressa por uma equação, nas quais as variáveis poderiam assumir infinitos valores. Dessa forma, segundo Roque (2012), Descartes tinha o entendimento de que uma equação poderia ser visualizada como uma representação da dependência entre duas variáveis.

Introduz-se aqui, pela primeira vez de modo absolutamente claro, a ideia de que uma equação em x e y é uma forma de representar uma dependência entre duas quantidades variáveis, de modo que se possa calcular os valores de uma delas a partir dos valores da outra.

(ROQUE, 2012, p.372)

Devemos notar que a concepção das relações estabelecidas por Descartes referiam-se àquelas de natureza algébrica, ou seja, restritas ao que viriam a ser denominadas de funções algébricas.

Os trabalhos posteriores de Newton e Leibniz possibilitaram a ampliação desse entendimento. Schubring (2005) salienta que, em publicações de 1684 e 1686, Leibniz fez a divisão entre funções algébricas e funções transcendentais, e que em 1718, Johann Bernoulli formulou a primeira definição geral de função. “*Chamamos de função de uma magnitude variável uma quantidade composta de certa maneira por magnitudes variáveis e por constantes.*”²⁹ ” (BERNOULLI, 1968, apud SCHUBRING 2005, p.21, TRADUÇÃO NOSSA)

Contudo, foi a partir do trabalho de Euler que a noção de função passou a ocupar um papel de protagonismo no desenvolvimento dos conceitos do cálculo infinitesimal, sendo o cálculo estabelecido como uma teoria de funções.

Em sua obra, *Introductio in analysin infinitorum* (1748), Euler define uma função como: “*uma função de quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer dessa quantidade e de números ou de quantidades constantes.*” (EULER, 1748, apud ROQUE 2012, p.374)

Destacamos que tal definição amplia substancialmente o universo limitado anteriormente pelas funções algébricas, uma vez que, nesse contexto, as funções

²⁹ One calls function of a variable magnitude a quantity composed in a certain manner by that variable magnitude and by constants.

poderiam ser desenvolvidas em séries infinitas de potências fazendo com que, dessa forma, as funções transcendentais fossem integradas ao novo universo estabelecido por Euler.

Nesse contexto, cabe ressaltarmos a intenção de Euler de que pudessem ser atribuídas às quantidades variáveis (como quantidades indeterminadas) os números e valores que ainda não eram considerados como números, como as quantidades irracionais ou imaginárias.

No entanto, a partir do estabelecimento do “problema das cordas vibrantes”, a identificação da função com a sua expressão analítica começa a ser mais fortemente questionada. O próprio Euler registra uma nova formulação para o conceito de função, em 1755, conforme apontado por Roque:

Se certas quantidades dependem de outras quantidades de maneira que se as outras mudam essas quantidades também mudam, então temos o hábito de chamar essas quantidades de funções dessas últimas. Essa denominação é bastante extensa e contém nela mesma todas as maneiras pelas quais uma quantidade pode ser determinada por outras. Consequentemente, se x designa uma quantidade variável, então todas as outras quantidades que dependem de x , de qualquer maneira, ou que são determinadas por x , são chamadas de funções de x .
(EULER, 1755, apud ROQUE, 2012, p.378)

Diante dessa questão, Roque registra dois posicionamentos distintos de D'Alembert e de Euler, ressaltando que Euler permitiu-se ampliar o seu próprio conceito de função, a partir das reflexões decorrentes do problema das cordas vibrantes.

A generalidade dessa definição mostra a influência do problema físico das cordas vibrantes na concepção de Euler sobre o que deve ser uma função. Ao passo que D'Alembert deixou que seu conceito de função limitasse as configurações iniciais possíveis da corda. Euler permitiu que a variedade de formas iniciais estendesse seu conceito de função.
(ROQUE, 2012, p.378)

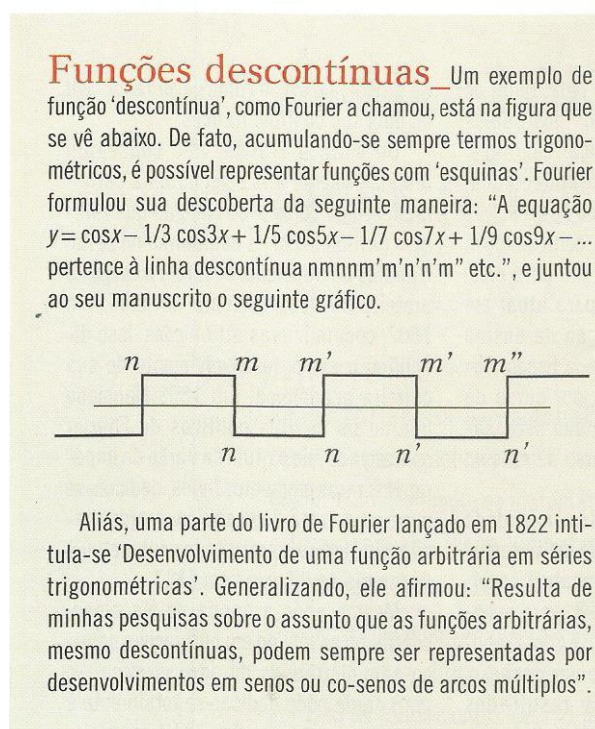
No entanto, com o esfriamento dos debates referentes ao conceito de função a partir da segunda metade do século XVIII, avanços significativos se deram apenas no século XIX.

Na virada entre os séculos XVIII e XIX, os estudos acerca do calor foram intensificados na Europa, especialmente na França, Alemanha e Inglaterra. Nesse contexto, localiza-se a importante contribuição dada por Jean-Baptiste Joseph Fourier

(1768-1830). Fourier elaborou um modelo que possibilitou a dedução da equação de propagação de calor no interior de corpos. Em termos matemáticos, trabalhou-se com o conceito de superposição de funções, mais especificamente das funções periódicas, revelando, além de um novo conceito de função, uma nova categoria de função, definida como funções descontínuas, conforme salienta Schubring (2011):

A superposição de funções revela um novo conceito de função. Enquanto o conceito tradicional admitia o desenvolvimento de funções algébricas em séries de polinômios, Fourier concebeu funções (que chamou “arbitrárias”) a partir daquelas funções trigonométricas. Por tais meios, representou funções que denominou “descontínuas”.
(SCHUBRING, 2011, p.70)

Figura 3: Um exemplo de função descontínua



Fonte: Schubring (2011)

Por outro lado, a solução concebida por Fourier levava em consideração uma função expressa como uma série trigonométrica, na qual os coeficientes deveriam ser encontrados. Nesse contexto, Fourier identifica que a série pode tornar-se idêntica a função $f(x) = 1$, para todos os valores entre -1 e 1 . Assim, a partir da solução dada, surge, de alguma maneira, um embrião para que a noção de intervalo possa ser estabelecida em tempos posteriores.

Diante desse quadro, surge um horizonte propício para que o conceito de função possa ser ampliado, uma vez que, nesse contexto, a expressão algébrica não caracterizava sozinha uma função, mas deveria ser considerada conjuntamente com as possibilidades de variação de x .

Ao fornecer a solução de um problema considerando somente um intervalo, ou definir uma função somente em um intervalo, Fourier apresenta um recurso inovador com relação à definição da função pela sua expressão analítica. Nesse caso, uma função era determinada automaticamente se a expressão analítica estivesse bem estabelecida. Não era necessário prestar atenção ao domínio da função; aliás, sequer existia essa noção de domínio. Essa e outras definições desse tipo, que nos são bastante familiares, começaram a aparecer nesse momento, mas só se desenvolverão com o estudo dos conjuntos numéricos.

(ROQUE, 2012, p.393-394)

Entretanto, o trabalho de Fourier encontrou forte resistência até por volta de 1820, por conta das novas concepções apresentadas, as quais entravam em conflito com as noções de função anteriormente estabelecidas. Até que, finalmente, em 1822, após ganhar um concurso promovido pela *Académie*, foi publicada sua obra *Théorie analytique de la chaleur*, difundindo suas ideias e, desta vez, passando a ocupar um papel de destaque do meio científico francês.

Sendo assim, a ampliação do conceito de função realizada por Fourier fica evidente quando melhor examinamos sua definição para o conceito.

Em geral, a função fx representa uma sucessão de valores, ou ordenadas, os quais cada um é arbitrário. Uma infinidade de valores sendo atribuídos à abscissa x , existe um número igual de ordenadas fx . Todas tem valores numéricos *atuais*, ou positivos, ou negativos, ou nulos. Não se supõe que essas ordenadas estejam sujeitas a uma lei comum; elas se sucedem uma à outra de um modo qualquer, e cada uma delas é dada como se fosse uma única quantidade.

(FOURIER, 1822, apud ROQUE, 2012, p.395)

Observemos ainda que, nessa definição, a expressão analítica deixa de ser um fator imprescindível e que para cada valor dado da abscissa deve existir somente um valor correspondente da ordenada, pois o número de abscissas e ordenadas devem ser o mesmo.

O trabalho de Fourier despertou a atenção de vários matemáticos. Em particular, destacamos os desdobramentos obtidos pelo matemático alemão Johann Peter Gustav

Lejeune Dirichlet (1805-1859), propondo reflexões que levaram a uma nova ampliação do conceito de função.

Dirichlet dedicou-se ao estudo das séries de Fourier, especialmente sobre convergência das séries. Em particular, tratou mais especificamente sobre as condições para que se possa calcular a integral de uma função, uma vez que o cálculo dos coeficientes exigia o cálculo de tais integrais. Mostrou ainda que, as condições as quais uma função é integrável em determinado intervalo eram necessárias para a resolução do problema das séries.

Nesse contexto, Dirichlet exhibe um exemplo emblemático no seu clássico artigo “*Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites données*”, em 1829, esclarecendo, nesse contexto, que nem toda função pode ser integrada.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1, & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

Devemos notar que a função apresentada por Dirichlet não pode ser expressa por uma expressão analítica (segundo Dirichlet), não é derivável e é descontínua em todos os pontos. Dessa forma, o exemplo apresentado sinaliza um primeiro passo efetivo no sentido de estender o conceito de função, uma vez que busca desvinculá-lo de sua expressão analítica e das propriedades que a caracterizavam implicitamente, conforme relata Roque (2012):

Mas o exemplo de Dirichlet é tido como o primeiro passo para que se percebesse a necessidade de expandir a noção de função, uma vez que, nesse caso, não tinha nenhuma das propriedades admitidas tacitamente como gerais: não pode ser escrita como uma expressão analítica (segundo Dirichlet); não pode ser representada por uma série de potências; e não é contínua em nenhum ponto (também não é derivável nem integrável). Logo, o exemplo de Dirichlet só pode ser visto como uma função se esse conceito for entendido como uma relação arbitrária entre variáveis numéricas.

(ROQUE, 2012, p.457-458)

Assim, embora o texto de Dirichlet, de 1829, não tenha apresentado uma definição formal de função, sua intenção, no sentido da expansão do conceito, fica mais evidente em uma nova versão do texto, publicada em alemão, no ano de 1837, contendo finalmente, uma definição formal.

Sejam a e b dois números fixos e x uma quantidade variável que recebe sucessivamente todos os valores entre a e b . Se a cada x corresponde um único y , finito, de maneira que, quando x se move continuamente no intervalo entre a e b , $y = f(x)$ também varia progressivamente, então y é dita uma função contínua de x nesse intervalo. Para isso, não é obrigatório, em absoluto, nem que y dependa de x de acordo com uma mesma e única lei, nem mesmo que seja representada por uma relação expressa por meio de operações matemáticas. (DIRICHLET, apud ROQUE, 2012, p.458)

Observemos que a definição apresentada descaracteriza, ou pelo menos, desobriga a função ser expressa por uma expressão analítica e, além disso, determina que, para cada valor da abscissa exista um, e somente um, valor da ordenada a ser relacionado com a respectiva abscissa, visto que, “*a cada x corresponde um único y* ”.

Assim, vemos que, já nesse contexto, apresenta-se o conceito presente na definição atual, de que para cada x exista um único y vinculado. Contudo, devemos notar que, a definição de Dirichlet, embora apresente traços da configuração atual, é independente da noção de conjunto que só virá a ser consolidada posteriormente.

Portanto, há de se ressaltar a importância do trabalho de Dirichlet, por um lado, expandindo substancialmente a noção de função e, por outro lado, abrindo caminho para que uma nova abordagem envolvendo os conjuntos possa estabelecer-se definitivamente, principalmente com contribuições de Riemann, Dedekind e Cantor.

2.3 Conceito de Limite

A consolidação do conceito de limite foi um importante passo no estabelecimento do grande edifício da análise. O conceito de limite foi utilizado, pela primeira vez, na obra de Newton, por meio da sua abordagem intitulada “primeiras e últimas razões”, sobre a qual intencionava evitar o uso das quantidades infinitamente pequenas.

Dessa maneira, na implementação de seu novo método, Newton tinha o propósito de evitar as extensas demonstrações “por absurdo” herdadas dos gregos antigos, ao mesmo tempo que visualizava seu procedimento como uma alternativa ao método dos indivisíveis.

Há de se notar que não foram concebidos, nesse momento, cálculos, procedimentos ou mesmo notações relacionadas ao limite, mas foi estabelecido um

princípio, desenvolvido por seus sucessores, o qual o limite poderia ser tratado por meio do comportamento de variáveis num contexto finito. “*Quantidades, e razões de quantidades, que, em qualquer tempo finito tendem constantemente à igualdade, e antes do final da abordagem do tempo um outro mais próximo do qualquer quantidade dada, em última análise, tornam-se iguais.*”³⁰ (NEWTON, 1969 a ,29;orig.1972,73, apud SCHUBRING, 2005 p.166)

No entanto, tais conceitos não foram retomados pelos seus sucessores imediatos, mas somente após as duras críticas do Bispo George Berkeley (1685-1731) dirigidas a Newton, relativas ao uso de grandezas infinitesimais.

Nesse cenário de busca da refutação dos ataques de Berkeley, destaca-se a atuação do Professor escocês Colin MacLaurin (1698-1746).

Schubring (2005) esclarece que MacLaurin admitia apenas grandezas com “real existência” e que as quantidades infinitamente pequenas não eram consideradas como quantidades. Nessa linha, acrescenta ainda que, o termo chave de seu trabalho era “atribuível”, sendo permitido, por exemplo, a divisão de uma magnitude dada em um números “atribuível” de partes, não sendo permitido efetuar a divisão da referida magnitude em um número de partes maior do que pode ser “assignável”.

MacLaurin admitiu apenas quantidades com “existência real”. Quantidades infinitamente pequenas, portanto, não eram quantidades admissíveis; uma divisão finita não era executável. O termo chave da discussão de MacLaurin era “atribuível”. Divisão em um numero atribuível de partes era admissível: mas [uma dada magnitude] não pode, portanto, ser concebida para ser dividida em várias partes maiores do que é assignável.³¹

(SCHUBRING, 2005, p.206, TRADUÇÃO NOSSA)

Schubring aponta ainda que, a utilização do limite é realizada desde o início da obra de MacLaurin sob um enfoque geométrico e retórico, não sendo realizado algum tipo de reflexão acerca de sua natureza, tampouco sendo o conceito definido e/ou introduzido. De alguma forma, o seu uso foi estabelecido como se fosse um conceito tacitamente conhecido.

³⁰ Quantities, and the ratios of quantities, that in any finite time tend constantly to equality, and before the end of time approach one another more closely than by any given difference, become ultimately equal.

³¹ MacLaurin admitted only quantities having a “real existence”. Infinitely small quantities hence were not admissible quantities; an infinite division was not executable. The key term in MacLaurin discussion is “assignable”. Division into an assignable number of parts is admissible: but it [a given magnitude] cannot therefore be conceived to be divided into a number of parts greater than what is assignable.

As ideias de MacLaurin foram recepcionadas e difundidas por meio do trabalho tecido por Jean le Rond D'Alembert (1717-1783). Na busca por um melhor entendimento sobre os conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, D'Alembert foi o primeiro a empenhar-se para produzir reflexões conceituais sobre o conceito de limite. “O principal objetivo de D'Alembert na *Encyclopédie* era esclarecer acerca dos fundamentos dos conceitos básicos da análise, ou esclarecer acerca da metafísica do cálculo diferencial.”³² (SCHUBRING, 2005, p. 210, TRADUÇÃO NOSSA)

Em sua concepção, a teoria dos limites consistia na verdadeira metafísica do Cálculo Diferencial, não sendo necessária, nessa visão, maiores reflexões acerca da metafísica das quantidades infinitamente pequenas, as quais dentro dessa visão eram desconsideradas.

A definição de limite considerava que a grandeza em questão poderia aproximar-se cada vez mais, diferindo tão pouco se queira da quantidade a qual é o limite, sem jamais atingi-la. Dessa forma, foi criada uma distinção entre o chamado *limite géométrique* e o *limite algébrique*, sendo evidenciada a clara predominância do caráter geométrico na abordagem do limite, uma vez que, o *limite géométrique* de quantidades, consistia na determinação de uma determinada linha ou figura e o *limite algébrique* do termo algébrico que expressa a grandeza por meio de letras.

Dessa maneira, há de se ressaltar que o conceito básico expresso por D'Alembert é o de uma grandeza geométrica e não de uma função.

Paralelamente ao verbete *Limite* redigido por D'Alembert na *Encyclopédie* é escrito um segundo artigo por Abbé de la Chapelle (1710-1792). O verbete tecido por de la Chapelle já havia sido concebido em sua obra anterior de Geometria intitulada *Institutions de Géométrie*, em 1746. Nesse trabalho esteve presente, pela primeira vez, uma explicação metodológica sobre o método dos limites.

De la Chapelle apresentou pela primeira vez sua noção de limite no seu livro-texto *Institutions de Géométrie* 1746, sendo assim provavelmente o primeiro a aplicar explicitamente os limites na geometria elementar, em vez da análise, como já havia sido comum.³³ (SCHUBRING, 2005, p.212, TRADUÇÃO NOSSA)

³² D'Alembert's primary objective in the *Encyclopédie* was to clarify the foundations of the basic concepts of analysis, or to clarify la métaphysique du calcul différentiel.

³³ De la Chapelle first presented his notion of limit in his textbook *Institutions de Géométrie* 1746, thus being probably the first to explicitly apply limits in elementary geometry rather than in analysis, as had been common.

A noção de limite apresentada esteve fortemente vinculada com noções geométricas e não foi apresentada como uma novidade, mas baseada na autoridade dos antigos por meio da identificação do método dos limites com o método da exaustão, desenvolvido na Grécia Antiga.

No entanto, baseado nessa autoridade, conforme salienta Schubring (2005), foram acrescentadas duas proposições consideradas como indubitáveis, a saber:

1) A primeira proposição buscava permitir a inserção de um limite já numericamente conhecido. *Se duas quantidades A e B são o limite de uma mesma quantidade C, as duas quantidades A e B são iguais a uma outra.*

2) A segunda proposição consistia em estender a propriedade do limite para o produto. *Se C é o limite da quantidade A, e D é o limite da quantidade B, $C \times D$ é o limite de $A \times B$.* Em particular, essa proposição foi utilizada na determinação do volume de alguns sólidos.

A última proposição pode ser considerada como um início para as operações com limites, consistindo, dessa forma, em um primeiro elemento do processo de algebrização do conceito de limite que vinha sendo tratado somente no âmbito da geometria.

De la Chapelle foi o primeiro a apresentar uma definição formal para o limite, embora tenha sido expressa apenas em uma nota de rodapé:

Diz-se que uma magnitude é o limite de outra magnitude quando a segunda pode aproximar-se da primeira mais e mais perto do que uma dada grandeza, tão pequena quanto possa se supor, de modo que a diferença entre a quantidade e seu limite seja absolutamente desprezível.³⁴

(De la CHAPELLE, 1762 apud SCHUBRING, 2005,p.213)

É notável a não utilização dos termos “variável” e “constante” na definição, fato que reforça a abordagem geométrica no conceito. Notemos ainda que a definição dada é apresentada de forma indeterminada e em termos apenas retóricos.

³⁴ One says that a magnitude is the limit of another magnitude when the second can approach the first closer than a given amount, as small as one is able to suppose. From which the difference between a quantity and its limit is absolutely indeterminable.

Um importante avanço no desenvolvimento do conceito foi alcançado por Jacques-Antoine-Joseph-Cousin (1739-1800) com a introdução de um sinal específico para o limite na obra *Leçons de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral*, em 1777.

“Ele obviamente percebeu que o método dos limites demandava um sinal próprio para o limite.”³⁵ (SCHUBRING, 2005, p.223)

Em termos da metafísica do Cálculo, Cousin deu grande mérito ao pensamento de D’Alembert, por reconhecer que a origem do verdadeiro fundamento do Cálculo Diferencial e Integral é deduzido do método dos antigos, nomeado agora como “Méthode des limites”.

A concepção de limite, expressa por Cousin, assim como seus antecessores, esteve fortemente baseada na intuição geométrica, entendendo o limite como uma quantidade que é arbitrariamente aproximada por uma variável sem tornar-se idêntica a essa. Tal concepção foi evidenciada por meio do exemplo de um círculo inscrito e circunscrito por polígonos.

Por outro lado, embora tenha baseado seus conceitos na intuição geométrica, Cousin expandiu conceitos na direção da operacionalização do conceito de limite, conservando o primeiro enunciado por De la Chapelle e enunciando um segundo princípio referente ao produto de quantidades, não apresentando, todavia, uma justificação para tais, considerando-os como base para o método dos limites.

No entanto, conforme já registrado, Cousin teve o mérito de ter materializado um sinal específico na utilização do conceito de limite. Porém, não foi concebido um símbolo a ser utilizado em situações gerais, somente restrito ao limite do quociente diferencial. “Usaremos um sinal para indicar o limite da razão entre as diferenças de duas quantidades variáveis; sejam duas quantidades x e y e $\Delta y : \Delta x$ a razão entre suas diferenças; usaremos sempre $dy : dx$ para designar o limite dessa razão.”³⁶ (SCHUBRING, 2005, p.223, TRADUÇÃO NOSSA)

No contexto do desenvolvimento do método dos limites, deve ser destacado o momento em que a distinção entre o processo de aproximação envolvendo a variável e o valor constante da variável como limite acontece. Tal distinção é alcançada, no primeiro momento de forma ainda regional, por meio da definição de limite concebida pelo Professor do Collège de Toulouse, Roger Martin (1741-1811):

³⁵ He had obviously realized that limit method required the limit to have a sign of its own.

³⁶ We shall use a sign to indicate the limit of the ratio of the differences of two variable quantities; let the two quantities be x e y e $\Delta y : \Delta x$ the ratio of their differences; we shall always use in what follows $dy : dx$ for the limit of this ratio.

Entende-se por *Limite* de uma quantidade variável, o **valor** ou estado a que ela sempre tende em suas variações, sem jamais o alcançar e do qual ela pode entretanto aproximar-se, de modo que, ela se difere por uma quantidade menor do que qualquer quantidade dada.³⁷
(SCHUBRING, 2005,p.224, GRIFO NOSSO, TRADUÇÃO NOSSA)

Martin, embora ainda baseado em concepções da geometria elementar, adota o segundo princípio elaborado por Cousin e, mais especificamente, explicita uma “demonstração” para este.

Uma extensão considerável do método dos limites foi conseguida pelo suíço Simon L’Huillier (1750-1840), motivado pela questão proposta pela Academia de Berlim que procurava dissertações que buscavam estabelecer uma base segura para o novo cálculo.

L’Huillier efetuou uma elaboração sistemática acerca do limite, acrescentando “teoremas” àqueles que já haviam sido propostos anteriormente. A concepção acerca do conceito de limite expressada em sua obra, parte de sua definição de limite para variáveis geométricas e é complementada por outra definição para razões variáveis

Embora exista uma discussão acerca da noção de função e de seus limites, não foi definido e/ou refletido acerca do conceito de limite para funções. Assim, tanto o conceito de variável quanto o conceito de limite tiveram motivações e aplicações geométricas, ficando evidente que o contexto primordial era o de curvas geométricas e não de funções.

Os sinais e símbolos ocuparam importante papel na obra de L’Huillier. De início, as proposições tinham o estilo retórico, como por exemplo falava-se de “o limite de”, mas abruptamente surgem os símbolos “*lim*” e “*Lim*”, sem reflexões acerca do uso de símbolos.

Isto posto, reiteramos que o maior impacto do trabalho de L’Huillier está vinculado com a considerável extensão da aplicabilidade do conceito de limite, visto que seus antecessores só haviam concebido duas regras principais para as aplicações e, a partir daí, que foram sistematizados e obtidos novos resultados, solidificando, dessa maneira, novas pavimentações na direção da operacionalização e da algebrização do conceito. “*Em contraste com a marginalização de sua própria abordagem original,*

³⁷ By the *Limit* of a variable quantity is understood the value or state to which it always tends as it varies, without ever reaching it; but which, however, it can approach so that it differs from it by a quantity less than any given quantity.

*L'Huilier aumentou consideravelmente o número de proposições sobre o comportamento do limite, apresentando também um uso operacional mais incisivo do sinal $\lim$.*³⁸” (SCHUBRING, 2005, p.233-234, TRADUÇÃO NOSSA)

O uso sistemático dos símbolos passam a ser utilizados operacionalmente, a partir da obra *Reflexions sur la metaphysique du calcul infinitésimal*, de Lazare Carnot (1753-1823). O símbolo $\mathcal{L}$ foi utilizado extensamente tanto na operacionalização com os limites como em demonstrações.

Todavia, embora o trabalho de Carnot tenha caminhado na direção da consolidação da utilização algébrica do conceito de limite, o conceito básico utilizado não foi o de função, mas o conceito geométrico de curva.

A criação da École Polytechnique possibilitou um bom ambiente para a disseminação do método dos limites. Já nos primeiros anos foi instituído o método dos limites como base do ensino, por meio da atuação do professor Jean-Guillaume Garnier (1766-1812). Após a saída de Garnier, o método continuou a ser difundido por seu substituto, Sylvestre-François Lacroix (1765-1843), tanto nas aulas de análise quanto em seu tratado *Traité du Calcul Differentiel et du Calcul Intégral*, adotado como livro-texto oficial na École Polytechnique.

Na visão de Lacroix, o método dos limites consistia como base para o cálculo diferencial e integral, sendo legitimado pela necessidade da investigação da divergência ou convergência do desenvolvimento em série.

No entanto, seu método foi apresentado de maneira verbal e retórica, não lançando mão do uso de símbolos, significando um retrocesso na comparação com os avanços alcançados por Martin, L'Huilier e Carnot, por exemplo.

A atuação posterior de Ampère e Cauchy foi marcada por reflexões mais profundas no sentido da algebrização, embora a apresentação do conceito por Cauchy tenha se dado também retoricamente, lançando mão também de argumentos geométricos.

Quando os valores atribuídos a uma mesma variável, sucessivamente, aproximam-se indefinidamente de um valor fixo, de maneira a diferir tão pouco quanto se queira, essa última é chamada limite de todas as outras. Assim, por exemplo, a área do círculo é o limite das áreas dos

³⁸ In contrast to this marginalization of his own original approach, L'Huilier considerably increased the number of prepositions about limit behavior, also presenting a more strongly operative use of the sign $\lim$.

polígonos regulares inscritos, ao passo que o número de lados cresce cada vez mais;³⁹ (CAUCHY, p.1, 1823, TRADUÇÃO NOSSA)

Por outro lado, além da disseminação posterior do método dos limites, principalmente após a criação da *École Polytechnique*, em 1799, existiram passos significativos no processo de algebrização do conceito de limite, mesmo em países que não eram considerados importantes em termos de desenvolvimento da Matemática, como Portugal, por exemplo.

Em particular, Schubring (2005) destaca a importância da obra *Compêndio da Theoria dos Limites*, de 1794, do matemático português Francisco de Borja Garção Stockler (1759-1829), consistindo em uma primeira abordagem de uma elaboração algebrizada do conceito de limite. Encontra-se nesse autor o começo de operações com desigualdades. “A importância desse livro especial ainda não tem sido reconhecida.”⁴⁰ (SCHUBRING, 2005, p.234, TRADUÇÃO NOSSA)

Após a colocação de suas bases conceituais, Stockler desenvolveu uma concepção puramente algébrica na operação com limites, sendo estabelecidas sistematicamente as operações com limites envolvendo adição, subtração, multiplicação e divisão. As demonstrações foram efetuadas conseqüentemente por meio do uso das desigualdades.

Entretanto, foi na Alemanha que o conceito de limite foi definitivamente algebrizado por meio do trabalho do Professor Catedrático da Universidade de Berlim, Enno Heeren Dirksen (1788-1850).

Dentro do nacionalismo alemão, típico de sua época, Dirksen recusou a utilizar o sinal *lim.*, preferindo utilizar a abreviação *Gr.*. Por meio de sua notação, Dirksen foi capaz de tratar limites com várias variáveis diferentes, investigar processos múltiplos de aproximação e de distingui-los simbolicamente e analiticamente.

³⁹ Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. Ainsi, par exemple, la surface du cercle est la limite vers laquelle convergent les surfaces des polygones réguliers inscrits, tandis que le nombre de leurs côtés croît de plus en plus;

⁴⁰ The importance of this special book has not been recognized and acknowledged as yet.

2.4 Conceito de Continuidade

No contexto do desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, o conceito de continuidade é considerado a princípio com um estatuto essencialmente geométrico.

Euler em sua tradicional obra, *Introductio in Analysin Infinitorum*, entende a continuidade como um conceito intimamente ligado às curvas, compreendendo que uma curva seria contínua quando pudesse ser expressa como uma expressão analítica. Nesse sentido, por exemplo, uma hipérbole com dois ramos era considerada por Euler como uma curva contínua. Em contrapartida, as curvas descontínuas foram entendidas como aquelas que eram formadas por vários segmentos, sendo, conseqüentemente, regidas por várias expressões analíticas.

Novas propostas referentes ao conceito de continuidade foram trazidas por meio do tratado de Louis Arbogast (1759-1803), em 1791. Em particular, ressaltamos sua formulação explícita da propriedade do valor intermediário para funções contínuas.

A lei da continuidade consiste em que, a quantidade não pode passar de um estado para outro, sem passar por todos os valores intermediários que estão sujeitos a mesma lei. As funções algébricas dependem da mesma maneira das variáveis e, supondo que a variável cresce continuamente, a função sofrerá as variações correspondentes, mas não passará de um valor para o outro, sem passar por todos os valores intermediários.⁴¹

(EDWARDS, 1979, p.303, TRADUÇÃO NOSSA)

Dessa forma, inaugura-se uma nova visão de continuidade além da que já havia sido concebida por Euler, ao mesmo tempo que é enunciada, em uma primeira versão, uma propriedade que se tornaria importante no estabelecimento da Análise.

No entanto, Schubring (2005) chama a atenção que Arbogast entende o conceito de função como conceito fundamental somente na reflexão sobre os valores intermediários. Nas demais considerações, as curvas ocupam o protagonismo, desempenhando as funções um papel secundário na representação de partes particulares da curva.

⁴¹ The law of continuity consists in that a quantity cannot pass from one state to another without passing through all the intermediate states which are subject to the same law. Algebraic functions depend in the same manner on those of the variable; and, supposing that the variable increases continually, the function will receive corresponding variations; but it will not pass from one value to another without also passing through all the intermediate values.

Por outro lado, somente cerca de três décadas depois, por meio dos escritos de Cauchy e Bolzano, que foram dados os passos decisivos para que o estatuto do conceito de continuidade fosse consolidado.

No contexto da *École Polytechnique*, a continuidade de funções tornou-se um tópico bastante pesquisado nas áreas de Análise e de Mecânica. Em particular, Schubring (2005) ressalta a presença do tópico intitulado “*sobre a distinção entre funções contínuas e descontínuas*”⁴², na reforma do programa de ensino para Análise feita por Ampère e Cauchy em 1816, fato que, no mínimo, evidencia o interesse e a importância do referido conceito.

Com a publicação do seu *Cours d'Analyse*, em 1821, Cauchy começa a estabelecer uma nova arquitetura na Análise, a qual o conceito de continuidade é tecido como um dos elementos principais. De maneira que possamos mensurar a importância desse conceito para o trabalho de Cauchy, ressaltamos que, segundo Schubring (2005), Cauchy quase que utopicamente, almejava estabelecer base sólida para a Análise lançando mão de apenas um princípio universal: a continuidade.

Cauchy enuncia três definições de continuidade em sua clássica obra. Já na primeira definição, fica evidente, por um lado, a completa diferença com relação à concepção euleriana de continuidade predominante até então.

Seja $f(x)$ uma função de variável x , e suponhamos que, para cada valor de x intermediário entre dois limites dados, essa função admite constantemente um valor único e finito. Se, partindo de um valor de x compreendido entre estes limites, atribui-se à variável x um incremento infinitamente pequeno α , a própria função receberá por incremento a diferença $f(x + \alpha) - f(x)$, que dependerá ao mesmo tempo da nova variável α e do valor de x . Dito isso, a função $f(x)$ será, entre os dois limites atribuídos à variável x , função *contínua* dessa variável, se, para cada valor de x intermediário entre esses limites, o valor numérico da diferença $f(x + \alpha) - f(x)$ decresce indefinidamente com aquele de α .

(SCHUBRING & ROQUE, 2016, p.22)

Desse modo, segundo Lützen (2003), ao contrário da noção de continuidade prevalecente até então, de caráter global e predominante algébrico, a proposta de Cauchy procura explorar, de alguma forma, o caráter local do conceito.

⁴² *Sur la distinction des fonctions continues et discontinues*

A maior novidade e provavelmente o conceito central no *Cours d'analyse* de Cauchy é a noção de continuidade, que diferia notavelmente da noção Euleriana de continuidade, amplamente aceita até então. A noção de Euler era algébrica e de natureza global; a noção de Cauchy era o que podemos anacronicamente chamar de topológica e de natureza local; Essa etapa do global para o local estava em completa harmonia com a rejeição de Cauchy à “generalidade da álgebra”⁴³ (LÜTZEN, 2003,p.164)

Há de se ressaltar ainda, conforme faz Schubring (2005), a clareza conceitual quando são salientados os dois parâmetros que definem a diferença da função, a variável α e o valor de x .

Logo a seguir, uma segunda definição é tecida, sintetizando o que já havia sido colocado anteriormente e, além disso, formulando segundo Schubring (2005), que o incremento “ δ ” “produz” um incremento “ ε ”.

“Em outras palavras, a função $f(x)$ manter-se-á contínua em relação à x entre os limites dados, se, entre esses limites, um incremento infinitamente pequeno da variável produzir sempre um incremento infinitamente pequeno da própria função.” (SCHUBRING & ROQUE, 2016, p. 22)

Notemos, outrossim, que ambas definições expressam que a função deve ser contínua em “todos os valores do intervalo”.

Uma terceira definição é enunciada por Cauchy, desta vez enfatizando o intervalo definido pela vizinhança de um valor específico da variável independente.

Diz-se ainda que a função $f(x)$ é, na vizinhança de um valor particular atribuído à variável x , uma função contínua dessa variável, todas as vezes que ela é contínua entre dois limites de x , mesmo muito próximos, que envolvem o valor em questão.
(SCHUBRING & ROQUE, 2016, p. 22-23)

Em termos das definições concebidas por Cauchy, cabe-nos mencionar rapidamente a discussão presente na literatura acerca de seus significados subjacentes, ou mais especificamente, se tais definições carregavam consigo a ideia de continuidade pontual, de continuidade uniforme ou ainda de outro significado.

⁴³ The most novel and probably most central concept in Cauchy's *Cours d'analyse* is the notion of continuity, which differed strikingly from the widely accepted Eulerian notion of continuity. Euler's notion was algebraic and global in nature; Cauchy's was what we could anachronistically call topological and local in nature; This step from the global to the local was in full harmony with Cauchy's rejection of the “generality of algebra”.

Lützen (2003), por exemplo, argumenta que a segunda definição expressa por Cauchy traz o significado de continuidade uniforme. “A segunda formulação não fala de um valor específico de x , mas do crescimento da “função”. Isso pode ser interpretado como continuidade uniforme.”⁴⁴ (LÜTZEN, 2003, p.166, TRADUÇÃO NOSSA)

Ao contrário, Schubring (2005) nos traz a concepção de Spalt, o qual acredita que a definição de Cauchy refere-se à uma continuidade pontual, argumentando que o papel de x na diferença $f(x + \alpha) - f(x)$ não é o de uma variável, mas de um valor específico, caracterizando, nessa visão, uma continuidade pontual.

Dessa maneira, não sendo nosso intuito descrever minuciosamente tal discussão, trazemos o que Schubring chama de “a melhor interpretação do estilo da notação pessoal de Cauchy”. Por meio do pensamento expresso por Giusti, é colocada a seguinte questão: O que realmente acontece com x , enquanto α está sucessivamente assumindo diferentes valores? Em termos dessa questão, Giusti acredita que essa variável também muda. Assim, sua posição é formalizada como: “Enquanto a variável assume sucessivamente os valores α_n decrescendo até zero, a outra variável x_n assumirá valores x_n restritos ao intervalo (a, b) , no qual f é definida.”⁴⁵ (GIUSTI, 1984, apud SCHUBRING, 2005, p.466, TRADUÇÃO NOSSA)

Nessa linha, conforme nos mostra Schubring, Giusti afirma que para testar a continuidade de $f(x)$ no intervalo (a, b) é necessário mostrar que a variável dependente $f(x_n + \alpha_n) - f(x_n)$ tem limite zero, o que é equivalente à continuidade uniforme no intervalo (a, b) .

Por fim, conclui Schubring, “pode ser visto que a definição de continuidade de Cauchy é baseada em uma dupla passagem ao limite; e são particularmente os problemas com as múltiplas passagens ao limite que são tão persistentes no teorema da continuidade.”⁴⁶ (SCHUBRING, 2005, p.466, TRADUÇÃO NOSSA)

Por outro lado, devemos salientar que todos os que refletiram e/ou enunciaram sobre a noção de continuidade, raramente fizeram uso prático de seus próprios enunciados. Cauchy, ao contrário, introduziu extensivas aplicações e utilizou sua

⁴⁴The second formulation does not speak of a specific value of x but of the increase of the “function” This can be interpreted as uniform continuity.

⁴⁵ While the variable successively assumes the values α_n decreasing to zero, the other variable x will assume values x_n confined to the interval (a, b) in which f is defined.

⁴⁶ It can be seen that Cauchy’s continuity definition is based on a twofold passage to the limit; and it is particularly the problems with such multiple passages to the limit that are also so persistent in the continuity theorem.

própria definição na análise de onze funções consideradas básicas. Outras relevantes contribuições foram alcançadas pelo filósofo-teólogo, alemão, Bernard Bolzano (1781-1848). Apesar da relevância de seus escritos, o seu trabalho permaneceu desconhecido durante pelo menos algumas décadas. Fato esse que não encobre a importância de suas contribuições, principalmente, com respeito ao conceito de continuidade, definido como:

Uma função $f(x)$ varia de acordo com a lei da continuidade para todos os valores de x dentro ou fora de determinados limites significa que: se x é algum valor, a diferença $f(x - \omega) - f(x)$ pode ser feita menor que qualquer quantidade visto que ω pode ser tomado tão pequeno quanto quisermos.⁴⁷

(LÜTZEN, 2003, p.174)

Lützen (2003) salienta que, por um lado, ao contrário de Cauchy, Bolzano não fez uso de infinitesimais, tanto em suas definições como nas demonstrações e, por outro lado, a definição estabelecida por Bolzano é mais clara que a estabelecida por Cauchy, trazendo mais fortemente a ideia de convergência pontual. Particularmente, o próprio Bolzano afirmou que a continuidade não implica a continuidade uniforme, embora não tenha expressado reflexão mais profunda a respeito da importância da uniformidade.

É remarcado ainda por Lützen que, embora Bolzano tenha tecido algumas conclusões errôneas, seus trabalhos extrapolaram os de seus antecessores, no sentido do rigor na Análise. Lamentando, ainda que, se seus trabalhos tivessem sido conhecidos no tempo em que foram escritos, certamente teriam tido enorme influência no desenvolvimento dos fundamentos da Análise. De maneira que, quando foram descobertos, por Hankel e Schwarz, por volta de 1870, o consequente interesse neles era apenas histórico.

2.5 Conceito de Convergência

A partir de Newton e Leibniz, o estudo das séries infinitas tornou-se um importante campo de pesquisa em matemática.

No século XVIII, o entendimento predominante acerca da convergência de séries era de que a série convergia se seus termos (em valores absolutos) tornavam-se cada vez

⁴⁷ A function $f(x)$ varies according to the law of continuity for all values x inside or outside of certain limits just means that: if x is some such value, the difference $f(x - \omega) - f(x)$ can be made smaller than any given quantity provided that ω can be taken as small as we please.

menores, aproximando-se do valor 0. Nesse sentido, tal entendimento, pode ser exemplificado pela definição formulada por Klügel, em 1803. “*A série é convergente se seus termos tornam-se sucessivamente menores.*”⁴⁸ (SCHUBRING, 2005, p.28, TRADUÇÃO NOSSA)

Entretanto, Schubring (2005) chama a atenção de que a literatura tende a negligenciar Louis Antoine de Bougainville (1729-1811) e que existiram importantes discussões, mesmo em países periféricos.

Bougainville, em 1754, discutiu detalhadamente acerca do desenvolvimento da somabilidade das séries e, em particular, sobre o desenvolvimento de critérios de convergência. Em sua concepção, somente as séries convergentes poderiam ser consideradas como as “séries verdadeiras”.

No contexto das contribuições advindas dos matemáticos procedentes de países periféricos, Schubring (2005) sublinha importantes contribuições do matemático português José Anastácio da Cunha (1744-1787). Em sua obra *Principios Mathematicos*, publicada postumamente, em 1790, destaca-se sua definição de convergência, a qual aproximava-se do que foi posteriormente chamado critério de Cauchy, ou seja, para que a série seja convergente é necessário e suficiente que as somas parciais tornem-se arbitrariamente pequenas a partir de um índice suficientemente grande.

Serie convergente chamam os Mathematicos àquela, cujos termos são semelhantemente determinados, cada hum pelo numeros de termos precedente, de sorte que sempre a serie se possa continuar, e finalmente venha a ser indifferente o continua-la ou não, por se poder desprezar sem erro notavel a soma de quantos termos se quizesse ajuntar aos já escritos ou indicados: e estes ultimos indicam-se escrevendo &c. (CUNHA, 1790, p.106)

Já no contexto da *École Polytechnique*, podem ser notadas diferenças entre as próprias edições do clássico *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral*, de Lacroix. Enquanto que, a versão original, em três volumes, discute o conceito de convergência, a versão abreviada, em um volume, destinada aos estudantes da *École Polytechnique*, não continham tais discussões.

⁴⁸ As series is convergent if its terms become successively ever smaller.

Em contrapartida, o *Cours d'Analyse* (1821), direcionado aos mesmos estudantes, conferiu ao conceito de convergência uma posição central na teoria desenvolvida por Cauchy.

De fato, o conceito de convergência atingiu um status superior por meio da nova arquitetura da Análise forjada por Cauchy. Em particular, Grabiner (1981) destaca que o tratamento do conceito de convergência é a primeira demonstração prática e sofisticada de como o conceito de limite pode ser transladado em complicadas inequações para resolução de problemas.

Nas primeiras definições enunciadas sobre séries, Cauchy propõe notações inovadoras, indexando os termos de uma sequência no sentido de caracterizá-los como elementos da própria sequência. “*Chama-se série uma sequência indefinida de quantidades $u_0, u_1, u_2, \dots$ que derivam uma das outras segundo uma lei determinada.*” (SCHUBRING & ROQUE, 2016, p. 83)

Logo a seguir, o conceito de convergência é definido como o limite da soma s_n , com n cada vez maior, desde que exista o limite.

Essas quantidades são, elas próprias, os diferentes termos da série que se considera. Seja $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$ a soma dos n primeiros termos, n designando um número inteiro qualquer. Se, para valores de n sempre crescentes, a soma s_n aproximar-se indefinidamente de um certo limite s , a série será dita *convergente*, e o limite em questão será chamado a soma da *série*. Do contrário, se, quando n aumenta indefinidamente, a soma s_n não se aproximar de nenhum limite fixo, a série será *divergente*.

(SCHUBRING & ROQUE, 2016, p. 83)

Podemos perceber, a partir da definição, a superação da visão predominante no século XVIII, de que a série seria convergente se cada um dos termos da sequência tendessem para zero. Nessa visão, expressa por Cauchy, a série será convergente se a soma dos termos convergir para um limite.

Nesse sentido, Grabiner (1981) destaca que a preocupação de Cauchy não era mais se cada um dos termos aproxima-se de zero, mas se a série infinita produz um número bem definido para a sua soma. Nessa visão, o mais importante era estabelecer a convergência das séries, antes mesmo de encontrar os valores das respectivas somas.

Por outro lado, Lützen (2003) afirma que o maior mérito de Cauchy não foi necessariamente o de ter feito uma escolha adequada na definição de convergência, mas fazer a caracterização por meio do uso dos $\varepsilon - N$ nas demonstrações, e ainda, em sua

insistência em permanecer afirmando, em todos os seus livros-textos, que as séries divergentes não possuem soma.

Em particular, devemos destacar ainda os testes de convergência enunciados e provados, tanto no *Cours d'Analyse*, quanto no seu *Calcul Infinitésimal*. De maneira que, Grabiner (1981) chega a afirmar que os testes de convergência, estabelecidos por Cauchy, deram origem a um novo objeto de estudo.

Assim, não restam dúvidas de que o patamar do conceito de convergência foi substancialmente elevado com o advento da nova arquitetura da Análise desenvolvida por Cauchy. Em sua teoria, foi capaz de consolidar os resultados obtidos pelos seus antecessores, inaugurando um novo nível de rigor com relação às séries de potências, explorando novas formas de demonstração nos teoremas relativos às séries e, desta forma, dando um significativo passo para a consolidação da teoria das séries de potências, importantíssimos para a solidificação da Análise do século XIX.

2.6 Conceito de Derivada

Os problemas envolvendo tangentes e quadraturas são estudados, com algum êxito, desde a antiguidade, mas com notável sucesso no período de meio século anterior ao período de Newton e Leibniz.

Alguns trabalhos, anteriores a eles, já consideravam a relação inversa dos problemas da tangente e o da quadratura. Contudo, a descoberta do Cálculo é costumeiramente atribuída a Newton e Leibniz, não exatamente por terem reconhecido o “Teorema Fundamental do Cálculo” como um fato matemático, mas por o empregarem, de tal forma, que ao partirem de uma série de técnicas infinitesimais, desenvolvem poderosos instrumentos algorítmicos que são capazes de sistematizarem os cálculos.

De fato, nesse sentido, iniciaremos nosso pequeno recorte partindo dos métodos das fluxões, de Newton, e das diferenciais, de Leibniz.

No final dos anos 1660, Newton iniciou o desenvolvimento de seu método, introduzindo dois conceitos fundamentais de sua teoria: fluente (por exemplo x), entendido como a quantidade que “flui” com o tempo, e a fluxão (denotado por $\dot{x}$) concebida pela sua velocidade ou taxa de variação.

Dessa forma, Newton busca encontrar a relação entre as fluxões $\dot{x}$ e $\dot{y}$, dada uma relação $f(x, y) = 0$ entre x e y . O primeiro exemplo investigado foi a polinomial

$f(x, y) = \sum a_{ij} x^i y^j$. Nesse texto, simplificaremos o argumento, explicitando somente o caso de $y = x^2$.

Efetua-se a substituição na relação original de $x + \dot{x}o$ por x e de $y + \dot{y}o$ por y , onde o é um intervalo de tempo infinitamente pequeno. Dessa forma, tem-se então que:

$$\begin{aligned} y + \dot{y}o &= (x + \dot{x}o)^2 \\ y + \dot{y}o &= x^2 + 2x\dot{x}o + \dot{x}^2 o^2 \end{aligned}$$

Considerando que $y = x^2$, temos:

$$\begin{aligned} x^2 + \dot{y}o &= x^2 + 2x\dot{x}o + \dot{x}^2 o^2 \\ \dot{y}o &= 2x\dot{x}o + \dot{x}^2 o^2 \end{aligned}$$

Assim, no intento de encontrar a razão entre as fluxões e desprezando o termos envolvendo o^2 , por considerá-los infinitamente pequeno em relação aos outros termos, tem-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\dot{y}}{\dot{x}} o &= 2xo + \dot{x}o^2 \\ \frac{\dot{y}}{\dot{x}} o &= 2xo \end{aligned}$$

E, finalmente efetuando a divisão por o chega-se na esperada relação:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x$$

A abordagem de Leibniz no Cálculo foi inteiramente diferente da abordagem cinemática feita por Newton. No meado dos anos 1670, Leibniz concebeu sua teoria baseada fortemente na utilização de diferenças entre termos de sequências numéricas. A aplicação da teoria se deu, principalmente, no estudo de curvas, por meio da suposição de que as diferenças entre termos dessas sequências seriam infinitamente pequenos.

Dessa maneira, a chamada diferencial dy de uma variável finita y é definida como a diferença entre y e a ordenada mais próxima a ela, numa sequência infinita de

ordenadas. Nessa linha de raciocínio, a diferencial do produto xy , a saber, $d(xy)$, será a diferença entre dois valores adjacentes, ou seja, xy e $(x + dx)(y + dy)$. Daí:

$$\begin{aligned}d(xy) &= (x + dx)(y + dy) - xy \\d(xy) &= xy + xdy + ydx + dxdy - xy \\d(xy) &= xdy + ydx + dxdy\end{aligned}$$

Considerando que $dxdy$ é infinitamente pequeno com relação às quantidades remanescentes, segue a famosa relação $d(xy) = xdy + ydx$.

Embora tenha sido disseminada a visão de que o cálculo de Leibniz baseava-se nos infinitesimais, a partir do livro-texto de L'Hospital de 1696, ressaltamos que o presente raciocínio evidencia a visão leibniziana de que as diferenciais são, em essência, variáveis sobre um domínio de sequências infinitas de valores ao longo dos eixos, das curvas, ou mesmo em domínio de outras variáveis, refutando, dessa forma, tal visão disseminada.

O cálculo de Leibniz alcançou enorme impacto nos matemáticos do século XVIII.

Em particular, Euler fez uso por meio das diferenciais estabelecidas por Leibniz na concepção de seu cálculo diferencial. Em sua abordagem da diferenciação das funções elementares, Euler simplesmente desprezou as diferenciais de ordem superior, após a devida expansão da diferencial dy . Por exemplo, no caso de $y = x^n$ chegou-se, pela expansão binomial, em:

$$\begin{aligned}dy &= (x + dx)^n - x^n \\dy &= \left(x^n + nx^{n-1}dx + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}dx^2 + \dots \right) - x^n \\dy &= nx^{n-1}dx + \frac{1}{2}n(n-1)x^{n-2}dx^2 + \dots\end{aligned}$$

Daí, desprezando os termos que possuem diferenciais de ordem superior, chega-se em $dy = nx^{n-1}dx$.

As regras de diferenciação para as funções transcendentais também foram deduzidas utilizando o mesmo padrão. A diferenciação de $y = \log x$, por exemplo, foi também efetuada por meio do desprezo posterior das diferenciais de ordem superior.

$$d(\log x) = \log(x + dx) - \log x$$

$$d(\log x) = \log\left(\frac{1 + dx}{x}\right) = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \dots$$

Então, ignorando os termos envolvendo $dx^2, dx^3, \dots$, chega-se em $d(\log x) = \frac{dx}{x}$.

No entanto, a preocupação com os fundamentos do cálculo levou vários matemáticos a questionarem a legitimidade dos procedimentos e teorias desenvolvidos, principalmente por Newton e Leibniz. A voz mais eloquente foi a do Bispo George Berkeley que afirmava não haver uma justificativa ontológica para atribuir existência aos limites e/ou infinitesimais.

Nos anos posteriores, mas ainda com esse ambiente gerado por Berkeley, Lagrange propõe uma abordagem para o cálculo, abandonando fluxões, diferenciais e limites, atribuindo ao conceito de função e seu desenvolvimento em série um papel central na teoria.

Em sua *Théorie des fonctions analytiques*, em 1797, Lagrange intentou demonstrar algebricamente que qualquer função $f(x)$ poderia ser expandida em uma série de Taylor:

$$f(x) = A + B(x - A) + C(x - A)^2 + D(x - A)^3 + \dots$$

Nessa teoria, as derivadas são definidas como os coeficientes da série de Taylor:

$$A = f(a), \quad B = f'(a), \quad 2!C = f''(a), \quad 3!D = f'''(a), \dots$$

Lagrange almejou deduzir o seu cálculo baseando-se em ferramentas algébricas, certamente pela preocupação com as questões dos fundamentos. Assim, embora tenham existido falhas em sua demonstração do Teorema de Taylor, é importante salientar que a sua proposta de basear o cálculo, tendo o desenvolvimento das funções em séries de Taylor como conceito principal, consolidou-se como um importante passo no desenvolvimento do cálculo diferencial.

Nesse sentido, Baron & Bos (1985) ressaltam que o enfoque dado por Lagrange foi importante no sentido de apresentar uma concepção diferente de derivada, contribuindo para “a transformação do cálculo de uma teoria de variáveis e suas diferenciais em uma teoria de funções e derivadas.” (BARON & BOS, 1985, p.26)

Em termos dos avanços alcançados no tocante ao conceito de derivada, Grabiner (1981) destaca o importante papel desempenhado por Cauchy nessa questão. Nessa linha, argumenta-se que sua abordagem ainda baseada no antigo conceito de coeficiente diferencial trouxe um novo e preciso significado.

Cauchy estabeleceu o seu conceito de derivada, condicionando-o à noção de limite, continuidade e convergência. Assim, assume-se como hipótese que a função seja contínua entre dois dados valores extremos da variável x , esperando-se, dessa forma, garantir que um acréscimo infinitamente pequeno na variável produza um acréscimo infinitamente pequeno na função.

Quando a função $y = f(x)$ permanece contínua entre dois dados limites da variável x , e atribuímos a essa variável um valor entre os dois limites em questão, um acréscimo infinitamente pequeno, atribuído à variável, produz um acréscimo infinitamente pequeno na função. Consequentemente, se tomarmos $\Delta x = i$, os dois termos da razão entre as diferenças $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ serão quantidades infinitamente pequenas. Mas, ao mesmo tempo, que esses dois termos aproximam-se indefinidamente e simultaneamente para o limite zero, a razão poderá convergir para outro limite, seja positivo, seja negativo. Esse limite, quando existe, tem um valor determinado, para cada valor particular de x , mais ele varia com x .⁴⁹

(CAUCHY, 1823, p.9 TRADUÇÃO NOSSA)

Observamos que Cauchy teve o cuidado de ressaltar que cada valor de x , determina um limite (quando existe), apontando para a visão da derivada como função. Entendimento esse que, de fato, vem a confirmar-se logo a seguir.

Será o mesmo em geral, unicamente, a forma da nova função que servirá de limite na razão $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ dependerá da forma da função

⁴⁹ Lorsque la fonction $y = f(x)$ reste continue entre deux limites données de la variable x , et que l'on assigne à cette variable une valeur comprise entre les deux limites dont il s'agit, un accroissement infiniment petit, attribué à la variable, produit un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Par conséquent, si l'on pose alors $\Delta x = i$, les deux termes du rapport aux différences $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ seront des quantités infiniment petites. Mais, tandis que ces deux termes s'approcheront indéfiniment et simultanément de la limite zéro, le rapport lui-même pourra converger vers une autre limite, soit positive, soit négative. Cette limite, lorsqu'elle existe, a une valeur déterminée, pour chaque valeur particulière de x ; mais elle varie avec x .

proposta $y = f(x)$. Para indicar essa dependência, damos a nova função o nome de *função derivada*, e a designaremos, com a ajuda de um acento com a notação y' ou $f'(x)$.⁵⁰
(CAUCHY, 1823, p.9 TRADUÇÃO NOSSA)

Destacamos ainda, conforme a posição trazida por Grabiner (1981), a importante contribuição dada por Cauchy acerca do uso da definição de derivada para provar teoremas, já fazendo uso dos símbolos ε e δ (atualmente tão conhecidos) e assim criar uma robusta teoria, aprimorando-se e consolidando-se em momentos posteriores.

Por fim, registramos que, segundo Grabiner (1983), Cauchy foi o primeiro matemático a efetuar demonstrações por meio dos símbolos ε e δ em sua obra de 1823, apesar de não ter o devido reconhecimento, uma vez que, trouxe uma definição verbal de limite, em sua tradicional obra de 1821.

De fato, Grabiner (1983) evidencia trechos em que já podemos observar as inequações como tradução das afirmações verbais outrora tecidas.

Sejam δ, ε dois números muito pequenos; o primeiro é escolhido para que todo valor numerico [i.e., absoluto] de h menor que δ , e para todo valor de x incluído [no intervalo de definição], a razão $\frac{(f(x+h)-f(x))}{h}$ será sempre maior que $f'(x) - \varepsilon$ e menor que $f'(x) + \varepsilon$.⁵¹
(CAUCHY, 1823, apud GRABINER, 1983, p. 185)

2.7 Conceito de Integral

Diferentemente dos conceitos explicitados até esse momento, o conceito de integral não foi considerado inicialmente como uma das ideias fundamentais. Após o estabelecimento do cálculo diferencial, os clássicos problemas de determinação de áreas e volumes foram transpostos em simples inversões da diferenciação.

Schubring (2005) nos lembra que o Cálculo Integral, nesse contexto chamado de “problema inverso das tangentes”, já nos primeiros trabalhos de Newton e Leibniz, era

⁵⁰ Il en sera de même en général ; seulement, la forme de la fonction nouvelle qui servira de limite au rapport $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ dépendra de la forme de la fonction proposée $y = f(x)$. Pour indiquer cette dépendance, on donne à la nouvelle fonction le nom de *fonction dérivée*, et on la désigne, à l'aide d'un accent, par la notation y' ou $f'(x)$.

⁵¹ Let δ, ε be two very small numbers; the first is chosen so that for all numerical [i.e., absolute] values of h less than δ , and for any value of x included [in the interval of definition], the ratio $\frac{(f(x+h)-f(x))}{h}$ will always be greater than $f'(x) - \varepsilon$ and less than $f'(x) + \varepsilon$.

concebidos por meio de processos de inversão. Dessa forma, nos são trazidos ainda, as críticas de Medvedev contra a visão comum que credita à Newton a ideia da integral definida como uma função primitiva e à Leibniz a ideia da integral definida como o limite de aproximação de somas.

Ao contrário, Medvedev (1974) mostrou que Newton já havia introduzido o conceito de integral definida como limite de somas, em 1686, e a integração constante tendo sido usado pela primeira vez para resolver problemas concretos em um dos artigos de Leibniz, em 1694.

No entanto, a integral foi apresentada apenas como o processo inverso da diferenciação nos livros-textos no século XVIII, tendo como principal tarefa o cálculo da função primitiva sem que acontecessem reflexões acerca da existência.

A propósito, é importante destacarmos que tal visão, predominante no século XVIII, estava em consonância com a estabelecida por Euler, que concebia o Cálculo Integral como um método para encontrar relações entre quantidades, a partir da relação entre diferenciais.

Ao mesmo tempo, a vinculação da integral com a ideia de soma e/ou de área era familiar, mas usada somente em aproximações de integrais que eram inconvenientes ou impossíveis de encontrar a antiderivada. Em particular, não se percebia a necessidade de buscar uma definição precisa para a noção de área, uma vez que, o conceito era completamente intuitivo.

No entanto, lembra-nos Edwards (1979), que com a intensificação dos estudos das séries de Fourier, tornou-se necessária uma reflexão qualitativa acerca das condições para a realização dos cálculos das integrais das funções descontínuas (pelo menos no sentido de Euler), funções essas que apareciam naturalmente nas aplicações e nos coeficientes da série de Fourier, expressadas como integrais que não se enquadravam no padrão analítico da integração, no século XVIII.

Nesse sentido, Cauchy foi o primeiro a defender a necessidade de demonstrar a existência das integrais antes mesmo de se conhecer suas diversas propriedades. Retomou a visão leibniziana de integral como soma, mas tinha consciência de que não era suficiente dizer que a integral definida seria um limite de somas, mas caracterizar especificamente a soma e provar que tal limite existia.

De fato, na vigésima primeira lição de seu *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*, em 1823, Cauchy parte de uma função contínua $f(x)$ em um determinado intervalo, definido pelos extremos x_0 e X .

Dividiu o intervalo em n partes, de maneira que o comprimento do intervalo fosse dado por $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, X - x_{n-1}$. Dessa forma, após multiplicar cada um dos elementos acima pela função calculada no menor valor do respectivo intervalo, chegou-se a primeira forma da soma:

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + (x_3 - x_2)f(x_2) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

É notado que o valor da soma S , depende efetivamente de n e do modo de divisão do intervalo. Assim, o cerne da questão passa a ser, se a escolha particular dos intervalos torna-se irrelevante, quando os intervalos tornam-se cada vez menores e o valor de n cada vez maior.

Dessa forma, Cauchy empenha-se para mostrar que quando o “comprimento” dos intervalos torna-se muito pequeno e o valor de n muito grande, o modo de divisão do intervalo não terá mais que uma influência insensível sobre o valor de S .

Nesse intento, Cauchy segue o raciocínio pensando no caso mais simples, em um único subintervalo, cuja soma seria reduzida à $S = (X - x_0)f(x_0)$, mostrando que existe uma constante θ entre 0 e 1, tal que:

$$S = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)]$$

A partir daí, aplica-se o mesmo raciocínio para todos os outros subintervalos, fazendo $f[x_k + \theta_k(x_{k-1} - x_k)] = f(x_k) \pm \varepsilon_k$, chegando-se em:

$$S = (x_1 - x_0)[f(x_0) \pm \varepsilon_0] + (x_2 - x_1)[f(x_1) \pm \varepsilon_1] + \dots + (X - x_{n-1})[f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}]$$

Assim, com uma rearrumação da equação acima, tem-se que:

$$S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_0(x_1 - x_0) \pm \varepsilon_1(x_2 - x_1) \pm \dots \pm \varepsilon_{n-1}(X - x_{n-1})$$

Cauchy então argumenta que, se os subintervalos de comprimentos $x_k - x_{k-1}$ forem tomados suficientemente pequenos, quando os ε_k tornarem-se “muito próximos

de zero” então a subpartição tomada da partição original não mudará substancialmente o valor de S dado anteriormente. Nessa visão, os valores de S gerados por duas diferentes partições que satisfazem as condições anteriores, vão diferir imperceptivelmente uma da outra, de maneira que, tais valores se tornarão, para todos os propósitos práticos, sensivelmente (*sensiblement*) constantes, ou seja, atingirão um determinado limite.

No entanto, tal entendimento tem sido reformulado na historiografia recente. Viertel (2014) argumenta que a passagem da soma estabelecida por $\sum hf(x)$ para a integral $\int f(x)dx$ não é suficientemente demonstrada por Cauchy. Nessa linha de raciocínio, a independência da escolha da partição não teria sido de fato demonstrada por Cauchy, conforme é afirmado pelo próprio.

Essa descrição possui o seu análogo formal da notação citada e, portanto, dá a impressão de que o Cálculo é estritamente justificado. Cauchy tem, efetivamente (com pouco trabalho de interpretação do leitor: O tamanho h tem no primeiro lado da equação de x_0 a x_{n-1}) mostrou que $\sum hf(x) = (x_1 - x_0)f(x_0) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$ aplica-se, mas a transição a partir da soma $\sum hf(x)$, que é um valor médio de S , pra n finito, ou para $\sum hf(x)$. $\int f(x)dx$ baseia-se em observações por escrito (ibid). Consequentemente, Cauchy não deu nenhuma prova matemática da independência da soma e da escolha da subdivisão.⁵² (VIERTEL, 2014, TRADUÇÃO NOSSA)

Não obstante, na linha de raciocínio tecida por Cauchy é concluído que tal limite, que dependerá unicamente da função $f(x)$ e de seus valores extremos x_0 e X , será definido então como a *integral definida*.

Assim, denotando $S = \sum f(x)\Delta x$, a integral definida a qual convergirá a quantidade S foi expressa por $\int f(x)dx$, onde o símbolo $\int$, não simbolizava mais a soma em questão, mas o limite dessas somas. Além do que, mais especificamente, ao considerar-se o intervalo dado pelos extremos x_0 e X , a respectiva integral definida foi denotada como:

⁵² Diese Beschreibung erhält ihr formales Analogon durch die zitierte Notation und erweckt damit den Anschein eines streng begründeten Calculus. Cauchy hat zwar (mit wenig Interpretationsarbeit des Lesers: Die Größe h muss auf der ersten Seite der Gleichung die Werte x_0 bis x_{n-1} durchlaufen) gezeigt, dass $\sum hf(x) = (x_1 - x_0)f(x_0) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$ gilt, aber der Übergang von der Summe $\sum hf(x)$, die für ein endliches n ein Mittelwert von S bleibt, zu $\sum f(x)dx$ bzw. $\int f(x)dx$ wird auf Erklärungen in Textform gegründet (ibid.). Folglich hat uns Cauchy keinen mathematischen Beweis für die Unabhängigkeit der Summe von der Wahl der Unterteilung geliefert.

$$\int_{x_0}^x f(x)dx$$

Destaquemos que a definição de integral definida, foi deduzida de maneira nova e precisa, com relação aos que já haviam sido feitos até então, ou seja, primeiro, foi provado que o limite das expressões dadas por S existe, e, somente então, a integral é definida como o limite.

Por outro lado, na busca por estender a aplicabilidade da prova de convergência, feita por Dirichlet, para uma classe mais ampla de funções, Riemann, em suas investigações, não impressas até 1867, formulou mudanças e/ou ampliações no conceito de integral proposto por Cauchy.

A partir do conceito e das partições estabelecidas por Cauchy, Riemann toma uma sequência de valores $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ entre a e b , sendo $\delta_1 = x_1 - a$, $\delta_2 = x_2 - x_1$, e assim sucessivamente, até $\delta_n = b - x_{n-1}$ e, toma ainda frações próprias positivas, denotadas por ε_i .

Dessa forma, Riemann toma um ponto arbitrário $\bar{x}_i = x_{i-1} + \varepsilon_i \delta_i$, no i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ da partição, com $i = 1, 2, 3, \dots, n$ e, finalmente, define a integral definida como:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\bar{x}_i)(x_i - x_{i-1})$$

Riemann passa então a investigar quais são os casos em que a função é integrável e em quais casos ela não é integrável. Para tal define as noções de oscilação, norma de uma partição. Em particular, define $s = S(\sigma, P)$ como a soma dos comprimentos δ_i dos subintervalos de P para os quais a oscilação $D_i > \sigma$.

Dessa forma, são então estabelecidas condições necessárias e suficientes para a existência da integral de uma função limitada. “Se $f(x)$ é limitada para $x \in [a, b]$, então $\int_a^b f(x)dx$ existe, se, e somente se, dado $\sigma > 0$, segue que $s(\sigma, P)$ aproxima-se

de zero, como a norma da partição P aproxima-se de zero.⁵³” (EDWARDS, 1979, p.324, TRADUÇÃO NOSSA)

Por volta dos anos 1870 vários autores, independentemente, introduziram as chamadas somas de Riemann, para uma função $f(x)$ limitada em um intervalo $[a, b]$, sendo M_i e m_i são os valores máximos e mínimos de $f(x)$ no i -ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ da partição P , como:

$$U = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) \quad e \quad P = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$$

Dessa forma, Edwards (1979) conclui que a definição de integral desenvolvida por Riemann teve um carácter mais geral, do que a definição dada por Cauchy. Lembra ainda que, nas últimas três décadas do século XIX, esta definição foi reformulada de várias formas, enriquecendo o conceito de integral e pavimentando o caminho para as importantes generalizações que aconteceriam no século XX.

⁵³ If $f(x)$ is bounded for $x \in [a, b]$, then $\int_a^b f(x)dx$ exists if and only if, given $\sigma > 0$, it follows that $s(\sigma, P)$ approaches zero, as the norm of the partition P approaches zero.

3. Análise dos livros-textos transmitidos

*“ Je crus donc devoir ne m’astreindre à la marche d’invention
que pour faire l’introduction des Éléments.”*

S.F Lacroix, *Éléments d’Algèbre*, 1800

Conforme já salientado anteriormente, a análise dos livros-textos que fizeram parte do processo de transmissão e de recepção dos conceitos de Cálculo no Brasil é parte importante de nossa pesquisa.

Dessa forma, serão analisadas três obras nesse capítulo. Na primeira parte, será apresentado um estudo comparativo entre a tradução do livro de Lacroix, por Francisco Cordeiro da Silva Torres, em 1812 e a obra escrita por José Saturnino da Costa Pereira, baseada exatamente sobre a obra de Lacroix, em 1842. Entendemos ser bastante relevante o estudo acerca da referida obra de Saturnino, uma vez que, constitui uma primeira própria produção no Brasil, enquanto essencialmente ainda baseado no modelo francês. Diante disso, pensamos que as mudanças realizadas por Saturnino irão facilitar uma primeira revelação do que foi achado ser necessário mudar, no interesse do ensino, dentro do novo contexto.

A segunda parte apresenta uma análise da obra de Charles Sturm, considerado como um ponto de acumulação, de acordo com os critérios estabelecidos por nossa pesquisa. A obra de Boucharlat também constituiu-se como um ponto de acumulação. A análise de sua obra será apresentada na terceira parte.

Por outro lado, devemos ressaltar que utilizaremos o trabalho de Zerner (1994) como uma das referências para a análise realizada. Nesse estudo, Zerner (1994) procura entender como os tratados franceses foram incorporados aos padrões de rigor na Análise, fazendo uma distinção entre três gerações.

A primeira geração é composta por dois tratados publicados no início do século XIX, Lacroix (1802) e Bourchalat (1813). Essas duas obras ganham um status importante, ao lembrarmos que elas têm um grande número de edições, nove cada uma.

As obras da primeira geração não falam diretamente sobre os infinitamente pequenos, com raras exceções e não citam as funções contínuas. No tocante à diferenciabilidade, essas obras só falam de coeficientes diferenciais. Segundo Zerner, a palavra “derivada” foi proposta por Lagrange, não tendo alcançado em tempo as referidas obras.

A segunda geração começa com a obra de Duhamel, caracterizada pelo chamado “princípio da substituição dos infinitamente pequenos”, pautada pela seguinte definição: *“Dois infinitamente pequenos a e b podem ser substituídos um pelo outro e podemos negligenciar sua diferença na busca pelo limite da razão ou do limite de uma soma, desde que essa diferença seja infinitamente pequena com relação a um deles.*⁵⁴” (ZERNER, 1994, p.9, TRADUÇÃO NOSSA) Em geral, os livros da segunda geração definem a noção de função contínua limitando-se a propriedade do valor intermediário.

Por fim, a terceira geração não se caracteriza apenas pelo princípio da substituição, mas por temas como a construção dos números reais e teoremas sobre funções contínuas.

Assim, a diferença entre a segunda e a terceira gerações fica mais evidente, considerando principalmente, o trabalho com as funções contínuas e com a construção dos números reais, na maioria deles por cortes de Dedekind.

Nesse ponto, notemos ainda a reflexão trazida por Schubring (2005, p.593-594) com respeito às críticas tecidas ao “princípio dos infinitamente pequenos” pelo matemático belga Paul Mansion, que detecta inconsistências no uso do princípio. Mansion apresenta “exemplos de falsa aplicação do princípio”, a partir de três séries, indexadas por duas variáveis, nas quais as razões entre os termos de diferentes séries tem a unidade como limite, mas somente em determinadas sequências dos processos de limite. A partir disso, aplica-se a hipótese do princípio da substituição dos infinitamente pequenos e chegam-se a três valores diferentes para as somas, contrariando o princípio.

Mansion conclui que a condição do princípio é apenas suficiente, não sendo uma condição necessária. Percebe-se assim que o princípio mantém-se correto, apenas se todos os processos de limite são conduzidos simultaneamente.

Portanto, fica evidente que o princípio da substituição, largamente usado nas obras pertencentes à segunda geração, apresenta inconsistências, não tendo validade em todos os casos.

Por fim, salientemos que praticamente todos os livros-textos da segunda geração foram concebidos para a formação de engenheiros.

⁵⁴ Deux infiniment petits a et b peuvent être substitués l'un à l'autre et l'on peut négliger leur différence soit dans la recherche d'une limite de rapport, soit dans celle d'une limite de somme, pourvu que cette différence soit infiniment petite par rapport à l'un d'eux.

3.1 Análise comparativa entre o livro de Lacroix e a versão feita por José Saturnino.

Nessa seção, além de procurarmos saber quais são as diferenças fundamentais entre o texto original, escrito por Lacroix, e uma sua versão, escrita por Saturnino, trinta anos depois, almejamos também entender de que forma os conceitos básicos da Análise foram recebidos no Brasil e, conseqüentemente em seus livros-textos.

Figura 4

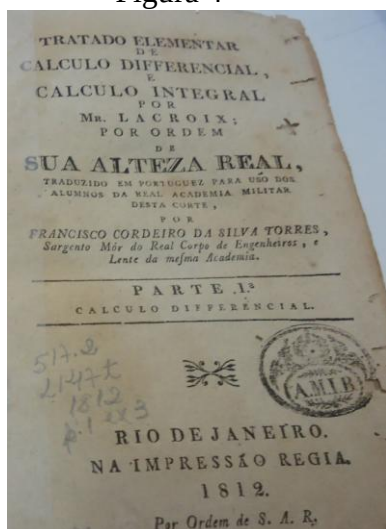
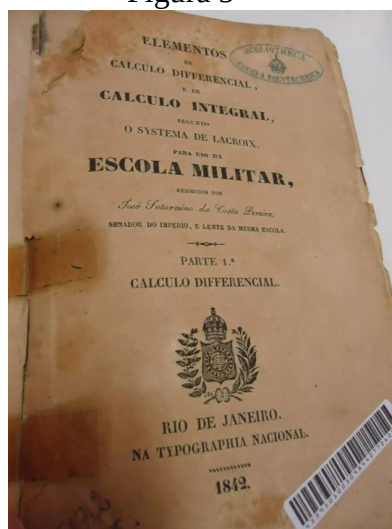


Figura 5



Fonte: Biblioteca de Obras Raras da UFRJ

Vejamos abaixo a estrutura original de ambas as obras.

TRATADO ELEMENTAR DE CÁLCULO DIFFERENCIAL E DE CÁLCULO INTEGRAL por Mr Lacroix

- I – Noções Preliminares e princípios da differenciação das funcções de uma só variável
- II – Das differenciações sucessivas
- III- Da differenciação das funcções transcendentess
- IV – Da differenciação de quaesquer equações a duas variáveis
- V – Indagação dos máximos, e dos mínimos, das funcções de huma só variável
- VI - Dos valores, que tomão em certos casos os coeficientes diferenciais e das expressões que se tornam $\frac{0}{0}$.
- VII - Applicaçõ do cálculo differencial a theoria das curvas
- VIII – Indagação dos pontos singulares das curvas
- IX – Exemplo da análise de uma curva
- X – Das curvas osculatrices
- XI - Das curvas transcendentess

- XII – Da mudança da variável independente, ou como se muda a diferencial, que se tem tomado por constante, em uma outra, que não o seja mais.
- XIII – Da differenciação de duas, ou de hum número maior de variáveis.
- XIV – Indagação dos máximos e dos mínimos das funções de duas variáveis.
- XVI – Noções geraes sobre a applicação do cálculo differencial a Theoria das Curvas de dupla curvatura, e das superficies curvas.

ELEMENTOS DE CÁLCULO DIFFERENCIAL E DE CÁLCULO INTEGRAL SEGUNDO O SISTEMA DE LACROIX por José Saturnino da Costa Pereira

- I – Noções Preliminares e princípios da differenciação das funções de uma só variável
- II – Das differenciações sucessivas
- III- Da differenciação das funções transcendentess
- IV – Da differenciação das funções de duas, ou de hum maior número de variáveis
- V – Da differenciação ds equações a duas variáveis
- VI - Applicação do calculo differencial à teoria das curvas.
- VII – Das curvas osculatrizes
- VIII – Indagação dos máximos, e mínimos das funções de huma só variável.
- IX- Dos valores que em certos casos tomão os coefficients differenciaes, e das expressões que se tornão 0/0.
- X – Indagação dos pontos singulares das curvas.
- XI – Das curvas transcendentess
- XII – Da mudança de variável independente, ou um meio de mudar em outra a diferencial que se tem tomado como constante.
- XIII – Da differenciação das equações, que contém mais de huma variável independente.

Um de nossos intuitos é o de analisar quais eram as concepções predominantes dos conceitos básicos do Cálculo, em particular, nessas duas obras em questão.

Nesse sentido, por meio do confronto entre os textos, esperamos obter indícios que nos permitam entender de que maneira se deu a evolução de tais conceitos.

3.1.1 Conceitos de Função e de Limite

Os procedimentos infinitesimais desenvolvidos, tanto por Newton em seu cálculo fluxional, quanto por Leibniz em seu cálculo diferencial, traziam consigo alguns esboços da noção de função, sem contudo, explicitarem uma definição para tal conceito.

Anteriormente, os fundamentos adotados por Descartes na construção de sua Geometria Analítica explicitam, de forma inédita, que a dependência entre duas

quantidades variáveis pode ser vista como uma equação em x e y . Sem dúvida, tal percepção pode ser encarada como um embrião da noção de função.

Descartes conclui que, tomando infinitos valores para x , acham-se também infinitos valores para y . Uma das grandezas indeterminadas pode ser, assim, determinada a partir da atribuição de valores à outra grandeza indeterminada, por meio de um número finito de operações algébricas. Introduz-se aqui, pela primeira vez de modo absolutamente claro, a idéia de que uma equação em x e y é uma forma de representar uma dependência entre duas quantidades variáveis, de modo que se possa calcular os valores de uma delas a partir dos valores da outra. (ROQUE, 2012, p.372)

Segundo Roque (2012, p.363), “a discussão sobre a legitimidade dos métodos infinitesimais levará à definição de função no século XVIII”

Euler, em um ponto de vista desvinculado da natureza geométrica, apresenta, em seu trabalho *Introductio in analysin infinitorum*, editada em 1748, uma definição de função da seguinte forma: “Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer dessa quantidade e de números, ou de quantidades constantes.”⁵⁵ (EULER, 1748, TRADUÇÃO NOSSA)

Assim, não há dúvidas de que a partir de Euler, o cálculo passa a ser visto como uma teoria de estudos de funções.

O conceito de função é o primeiro conceito matemático definido em ambos os trabalhos. Lacroix caracteriza o conceito de função, como relação de dependência entre quantidades.

Para exprimir que uma quantidade depende de huma ou muitas outras, seja por quaesquer operações, seja mesmo por meio das relações impossíveis de assignar algebricamente, mas de que a existência he determinada por condições certas, diz-se que a primeira he função das outras. A quantidade considerada como mudando de grandeza, ou podendo mudar, chama-se variável, e da-se o nome de constante aquella, que se consicurso do cálculo. (LACROIX, 1812, p.2)

Notemos que a definição apresentada por Lacroix, considera tanto as funções algébricas quanto as funções transcendentais.

⁵⁵ Functio quantitalis variabilis est expressio analytica quomodocunque compósita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus

Porém, devemos perceber que a noção de variável é colocada de maneira um tanto vaga, de forma que poderemos considerá-la como um conceito não definido. Euler define o conceito de variável, aproximadamente seis décadas antes, como:

[...] uma quantidade variável compreende todos os números nela mesma, tanto positivos quanto negativos, inteiros e fracionários, os que são racionais, transcendentos e irracionais. Não devemos excluir nem mesmo o zero e os números imaginários⁵⁶.

(EULER, 1748,p.18, TRADUÇÃO NOSSA)

Por outro lado, podemos dizer que a caracterização feita na obra de Saturnino, também salienta a dependência entre grandezas. Contudo, diferentemente de Lacroix, Saturnino restringe a definição de função às funções algébricas.

A palavra função, de que temos de usar, denota a dependencia de huma quantidade tem de outras, e que póde exprimir-se por equações; assim se diz que u é função de x, quando se pode ter huma equação em que se exprima a dependência que u tem de x; de maneira que, das mudanças dos valores de x, resultem as que devão ter os valores de u. Exprime-se que u é função de x, pela forma $u = f(x)$, designando a característica f huma qualquer maneira com que x se possa achar na equação supposta.

(SATURNINO, 1842, p.1)

Ao analisarmos a definição de função apresentada por Saturnino, podemos conjecturar uma possível influência dos trabalhos de Euler, visto que, além da definição apresentada por Saturnino aproximar-se bastante da definição feita por Euler, a definição é feita por meio da notação $f(x)$ cuja criação é atribuída a Euler.

Spalt (2011) nos informa que, provavelmente, a primeira vez que Euler usou a notação “ $f x$ ” foi num trabalho publicado em 1734.

Euler denomina, uma tal função, em geral, por uma letra (maiúscula), às vezes por „fx“ (no caso de argumentos compostos por $f(x + a)$), pela primeira vez provavelmente em “*Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis eiusdem generis*”. Temos o nome $f(x)$ associado a Euler até os dias de hoje. No *Introductio* e no seu cálculo diferencial, Euler denominava as funções por letras maiúsculas, por exemplo uma função de variável z por Z.⁵⁷

(SPALT, 2011, p.486-487, TRADUÇÃO NOSSA)

⁵⁶ Quantitas ergo vaiabilis in se complectitur omnes prorsus numeros , tam affirmativos quam negativos, tam integros quam fractos, tam rationales quam irrationales et transcendentis. Quin etiam cyphra et numeri imaginarii a significatu quantitatis variabilis non excluduntur.

⁵⁷ Eine solche Funktion bezeichnet EULER in der Regel durch einen (großen) Buchstaben, gelegentlich durch „fx“ (bei zusammengesetzten Argumenten dann durch „f(x+a)“) erstmals wohl in „Additamentum ad dissertationem de infinitis curvis eiusdem generis.“ Wir haben die Bezeichnung „f(x)“ bis heute von ihm übernommen. In der Introductio wie auch in seiner Differenzialrechnung bezeichnet EULER Funktionen in aller Regel durch Großbuchstaben, etwa eine Funktion von der Veränderlichen z durch Z.

Entretanto, Euler não utiliza tal notação em suas principais obras sobre o Cálculo. Spalt (2011) visualiza os trabalhos de Lagrange, principalmente *Théorie des Fonctions Analytiques*, como um elemento decisivo para o estabelecimento dessa tradição.

De fato, notemos que, imediatamente após à definição de função dada por Lagrange, são feitas considerações acerca da notação a ser utilizada, bem como de seu significado.

Chama-se *função* de huma, ou de muitas quantidades, toda a expressão de cálculo, em que ellas entrão de qualquer modo, combinadas ou não com outras quantidades, que tem valores dados, e invariáveis, ao mesmo tempo, que as da função podem ter todos os valores possíveis.

[...] Para indicar a função de huma so variavel como x , escreveremos antes della simplesmente a letra, ou característica f , ou F ; mas querendo-se designar a função de huma quantidade já composta dessa variável, como x^2 , ou $a + bx$, ou &c, se encerrará esta quantidade entre dous parenthesis. Assim fx designará a função de x ; $f(x^2)$, $f(a + bx)$, &c. designarão funções de x^2 , de $a + bx$, &c.

(LAGRANGE, 1798, p.1-2)

A análise da relação de dependência entre quantidades é expandida em ambas as obras, por meio da observação do que Lacroix chama de “augmento da função e da variável”. Tais observações são realizadas a partir de exemplos dados.

Após considerar a função $u = ax$, define-se $u' = a(x + h)$ e são realizados pequenos cálculos até chegar em $\frac{u' - u}{h} = a$. Donde Lacroix conclui que “a relação do o augmento da função para o da variável é independente de seu valor particular” (LACROIX, 1812, p.2).

No exemplo seguinte, envolvendo a função $u = ax^2$ salienta-se que $\frac{u' - u}{h} = 2ax + ah$, concluindo-se que: “Aqui a relação dos augmentos da função, e da variável, he composta de duas partes, huma não depende do valor particular dos augmentos, e a outra e affectada por h ” (LACROIX, 1812, p.2).

No entanto, devemos notar a ausência de uma definição formal para o conceito de limite, já sendo usado em vários exemplos.

Se se concebe que esta quantidade vá diminuindo, o resultado se aproximará sem cessar de $2ax$, e não lhe será igual senão supondo $h = 0$; de sorte que $2ax$ he o limite da relação $\frac{u' - u}{h}$, isto he, o valor,

para o qual Ella tende à medida que a quantidade h diminua, e do qual Ella póde aproximar-se tanto quanto se queira.

(LACROIX, 1812, p.3)

Observemos ainda que $u' - u$ “se aniquilla” ao mesmo tempo que h , sem mas, contudo acontecer o mesmo com $\frac{u' - u}{h}$.

Após uma análise similar com a função $u = ax^3$ Lacroix apresenta um argumento de generalidade para o raciocínio trabalhado. “*Este primeiro termo, ou este limite não he particular às funções, que vimos de examinar, elle se encontra em toda função em geral*” (LACROIX, 1812, p.3). Explica, ainda, o procedimento com mais detalhes:

Desvanescem os augmentos de huma função, e da variável, conservão ainda a relação, de que se tem aproximado por grãos e que conserva, por dizer, o caráter da função da qual deriva, que existe uma dependência, que determina huma pela outra e reciprocamente. A determinação desta relação he o objeto do cálculo, de que vamos tratar
(LACROIX, 1812, p. 3-4)

No texto de Saturnino, os conceitos acima descritos são introduzidos de maneira quase idêntica ao texto original. No entanto, devemos salientar uma notação não usada no texto de Lacroix. “*todavia a relação não se aniquila, e he das espécies das quantidades de que se falou na álgebra, que se tornão em $\frac{0}{0}$, tendo com tudo hum valor assignavel*” (SATURNINO, 1842, p.3)

Podemos perceber aqui alguma similaridade com conceitos do cálculo diferencial desenvolvidos por Euler. Schubring (2005), após estudo sobre o trabalho de Euler, conclui que: “*Para Euler, portanto, o cálculo diferencial era cálculo com zeros*”⁵⁸ (SCHUBRING, 2005, p.284, TRADUÇÃO NOSSA).

Em sua explanação a respeito das quantidades infinitamente pequenas, Euler deixa claro sua concepção, de que uma quantidade infinitamente pequena não deve ser concebida como uma quantidade menor que qualquer quantidade dada, mas, ao contrário, ela deve ser vista como sendo um valor que, de fato, é zero.

Mas se uma quantidade infinitamente pequena é nada mais que uma quantidade que vai desaparecendo então é realmente igual a zero. Existe também a definição de que uma quantidade infinitamente pequena é aquela que é menor do que qualquer quantidade dada. Se uma quantidade é tão pequena que é menor do que qualquer quantidade dada então ele não pode ser 0, a menos que seja igual a ele,

⁵⁸ For Euler, therefore, the differential calculus was calculating with zeros.

e isso contradita nossa hipótese. Para alguém que pergunta o que uma quantidade infinitamente pequena é em matemática, podemos responder que ela é realmente igual a zero⁵⁹.

(EULER, 1755, p.62-63, TRADUÇÃO NOSSA)

Na concepção de Euler não havia maiores problemas no trabalho com as quantidades infinitamente pequenas, uma vez que ele as concebia como um valor nulo. *“Realmente não existe um mistério tão grande, implícito nessa ideia, como alguns comumente pensam, e assim, tornando o cálculo dos infinitamente pequenos suspeito para tantos.”*⁶⁰ (EULER, 1755, p.63, TRADUÇÃO NOSSA)

Reparemos que a afirmação de Saturnino, *“que se tornão em $\frac{o}{o}$, tendo com tudo hum valor assignavel”*, vem de encontro com as ideias estabelecidas por Euler:

De forma similar, podemos considerar as quantidades infinitamente pequenas dx e dy . Embora ambas quantidades sejam iguais a zero, a relação permanece não sendo entre iguais. De fato, toda a força do cálculo diferencial está vinculada com a investigação das razões de duas quantidades infinitamente pequenas desse tipo. A aplicação dessas razões, à primeira vista, para ser mínima. No entanto, ela tem-se tornado muito importante, o que torna-se claro a cada dia⁶¹

(EULER, 1755, p.64, TRADUÇÃO NOSSA)

3.1.2 Conceito de Diferencial e Quantidades Infinitamente Pequenas

Novos conceitos fundamentais são definidos tendo a noção de função como fio condutor. Em particular, a partir da função $u = ax^3$, com $u' = a(x + h)^3$ e $u' - u = 3ax^2h + 3axh^2 + ah^3$, temos:

[...] o desenvolvimento da diferença dos dous estados da função u , ordenado segundo as potências do augmento h , que se supõem à variável x , e o limite $3ax^2$ da relação dos augmentos $u' - u$ e h , não depende senão da consideração do primeiro termo $3ax^2h$ desta diferença. Este primeiro termo não sendo senão huma porção da

⁵⁹ Sed quantitas infinite parva nil aliud est nifi quantitas evanescens, ideoque revera erit = 0. Consentit quoque ea infinite parvorum definitio, qua dicuntur omni quantitate assignabili minora : si enim quantitas tam suerit parva, ut omni quantitati assignabili sit minor, ea certe nou poterit non est nulla; namque nisi esset = 0, quantitas assignari posset ipsi aequalis, quod est contra hypotesin. Quaerenti ergo, qui sit, quantitas infinite parva in Mathesi, responderemus eam esse revera = 0.

⁶⁰ Neque ergo in hac idea tanta Mysteria latent, quanta vulgo putantur, & quae pluribus calculum infinite parvorum admodum suspectum reddiderunt.

⁶¹ Simili modo, si diversa occurrunt infinite parva dx & dy , etiamsi utrumque sit = 0, tamen eorum ratio non constat. Atque in investigatione rationis inter duo quaeque huiusmodi infinite parva omnis vis calculi differentialis versatur. Usus autem huius comparationis, etiamsi primo intuitu admodum exiguus videatur, tamen amplissimus deprehenditur, atque adhuc indies magis elucet.

diferença, nós o chamaremos de *diferencial*, e o designaremos por du , servimo-nos da letra d como de huma característica, teremos pois no exemplo, de que tratamos $du = 3ax^2h$. Para passar daqui a $3ax^2$, que he o limite buscado, será necessário dividir por h , e obter-se-ha $\frac{du}{h} = 3ax^2$, mas quanso se trata de huma variável simples, como a quantidade de x se muda em $x' - x = h$, a diferença, e a diferencial não são senão a mesma cousa: escrevemos pois em lugar da quantidade h o final dx , a fim de conservar uniformidade nos cálculos, e termos $du = 3ax^2dx$, $\frac{du}{dx} = 3ax^2$, a primeira expressão será a *diferencial de u* ou de ax^3 , e a segunda, que exprime o limite da relação das mudanças simultâneas da função e da variável, tomara o nome de *coefficiente diferencial*. (LACROIX, 1812, p.4-5)

Saturnino define tais conceitos, de forma bastante similar ao texto original. Notamos, no entanto que, em pelo menos dois momentos, Saturnino prefere usar o termo “crescimento” em vez “augmentos simultâneos” conforme o texto de Lacroix.

Na explicação dos procedimentos para se obter o coeficiente diferencial tal preferência é evidenciada.

Segue-se daqui, que o limite da relação dos **augmentos**, ou o coefficiente diferencial da função, se obterá dividindo a diferencial da função pela diferencial da variável, e reciprocamente obter-se-há a diferencial multiplicando o limite da relação dos **augmentos**, ou o coefficiente diferencial pela diferencial da variável.
(LACROIX, 1812, p.5, GRIFO NOSSO)

A mesma definição no texto de Saturnino é dada por:

Daqui se segue que, o limite da relação dos **crescimentos**, ou o coefficiente diferencial, se obtém, dividindo a diferencial da função pela diferencial da variável; e reciprocamente, obtém-se a diferencial da função, multiplicando o coefficiente diferencial pela diferencial da variável.
(SATURNINO, 1842, p.6, GRIFO NOSSO)

Na caracterização de Cálculo Diferencial tal preferência também se evidencia. Segundo Lacroix, “*o Calculo Differencial será a indagação do limite das relações dos **augmentos simultâneos** de huma função, e da variável, de que ella depende*” (LACROIX, 1812, p.5, GRIFO NOSSO)

Analogamente, Saturnino define que “*O Calculo Differencial tem por objecto a indagação do limite da relação entre os **crescimentos** de huma função, e os da variável, de que ella depende*” (SATURNINO, 1842, p.6, GRIFO NOSSO).

Ao visualizarmos a maneira como os autores preocupam-se em distinguir a diferença entre duas funções e a sua diferencial, temos mais uma oportunidade para perceber como o conceito de limite é discutido, bem com a diferença de abordagem entre os dois autores.

Ambos os autores afirmam que *“há tanto menor erro em tomar a diferencial pela diferença, quanto menor se supõe o aumento da variável”* (LACROIX, 1812, p.6).

Assim, Lacroix continua sua argumentação, ressaltando que seu princípio está em consonância com Leibniz *“He sobre esse principio que Leibniz fundou o calculo diferencial, considerando as diferenciais como diferenças infinitamente pequenas”* (LACROIX, 1812, p.6).

A percepção de Lacroix, quanto ao estatuto do conceito de diferencial no cálculo leibniziano, coincide de alguma forma, com um certo senso comum estabelecido pela historiografia tradicional, o qual acredita que Leibniz fundamentou seu cálculo sobre a diferencial e as quantidades infinitamente pequenas. Boyer (1949) afirma que, *“Leibniz, através de seu trabalho, considerava a diferencial como fundamental, como um recente estudo tem mostrado”*⁶² (BOYER, 1949, p. 210-211, TRADUÇÃO NOSSA).

Contudo, o brilhante estudo realizado por Bos (1974) acerca do cálculo Leibniziano, sugere que, ao contrário do que se acreditava, o cálculo diferencial de Leibniz não está fundamentado no conceito de diferencial como quantidade infinitamente pequena. Nesse sentido, Bos nos mostra que, por um lado, Leibniz não privilegiava o uso das quantidades infinitamente pequenas e, por outro lado, seu cálculo não estava fundamentado na diferencial como objeto.

A preocupação comum dos historiadores com as dificuldades associadas à infinita pequenez das diferenciais distraiu sua atenção do fato de que, na prática do cálculo Leibniziano, as diferenciais quase nunca aparecem como entidades solitárias. As diferenciais estão localizadas em sequências sobre os eixos, sobre a curva e sobre os domínios das outras variáveis que dependem, elas mesmas, das outras variáveis envolvidas no problema, e essa dependência é estudada em termos de equações diferenciais⁶³.

(BOS, 1974, p.17, TRADUÇÃO NOSSA)

⁶² “Leibniz, throughout his work, regarded the differential as fundamental, as a recent study has shown.” Tal estudo refere-se ao trabalho “Über Leibnizens Methode der direkten Differentiation” de Petronievics, publicado em 1934.

⁶³ The common concern of historians with the difficulties connected with the infinite smallness of differentials has distracted attention from the fact that in the practice of the Leibnizian calculus differentials as single entities hardly ever occur. The differentials are ranged in sequences along the axes, the curve and the domains of the other variables involved in the problem, and this dependence is studied in terms of differential equations.

Bos salienta que o conceito de diferencial deve ser encarado como variável, e a diferenciação como um operador que associa variáveis.

E, finalmente, após considerar o trabalho de Bos, Roque (2012) conclui que, “*não é sobre a diferencial como objeto, que se funda o cálculo lebniziano, mas sobre a idéia de diferenciabilidade*”.

Por outro lado, Schubring (2005) afirma que “*Leibniz sempre evitou basear as quantidades infinitamente pequenas no status de conceito fundamental de sua teoria*”⁶⁴ (SCHUBRING, 2005, p.170, TRADUÇÃO NOSSA) e mostra evidências, por meio de vários trechos de correspondências entre Leibniz e outros matemáticos, de que Leibniz não fundamentou seu cálculo nas quantidades infinitamente pequenas.

A opinião generalizada formada por aqueles que aplicaram e praticaram o cálculo diferencial lebniziano atribuem a Leibniz o uso das quantidades infinitamente pequenas para estabelecer seu cálculo. Mesmo os primeiros que aplicaram, e outros mais tarde, ficaram surpresos que Leibniz não adotou tal ponto de vista. Na verdade, Leibniz repetidamente o dissociou de tal reconhecimento. Algumas das muitas provas disso serão citadas aqui ⁶⁵

(SCHUBRING, 2005, p.171, TRADUÇÃO NOSSA)

Voltando nossa atenção novamente à forma como Lacroix e Saturnino tratam o conceito de limite, no contexto da diferenciabilidade, Lacroix, afirma que:

A mesma consequencia se tira tambem da consideração dos limites; porque se a relação dos aumentos simultaneos $u' - u$, e h tem por limite uma função p , ella se aproximará deste limite sem cessar; ter-se-ha $\frac{u' - u}{h} = p$, tanto mais exactamente, quanto o augmento h for menor, e nessa hipótese $u' - u = ph$. (LACROIX, 1812, p.6)

Nesse ponto, a opção feita por Saturnino, em sua reescrita, foi a detalhar mais o raciocínio, acrescentando inclusive outras notações.

Tira-se a mesma consequência da consideração dos limites; porque, se a relação dos crescimentos simultâneos $u' - u$, e h , tem por limite

⁶⁴ Leibniz always avoided raising infinitely small quantities to the status of fundamental concepts of his own theory.

⁶⁵ The general opinion formed by those who applied and practiced the Leibnizian differential calculus ascribed to leibniz having used the infinitely small quantities himself to found his calculus. Even the first users, and others later, were surprised that Leibniz did not accept such a point of view. Actually, Leibniz repeatedly dissociated himself from such recognition. Some of the many proofs for this shall be quoted here.

uma função p , qualquer que seja o valor de h , tem-se $\frac{u'-u}{h} = P$, que he equivalente a $\frac{u'-u}{h} = p + (P - p)$ e he necessario que $P - p$ diminua ao mesmo tempo que h , e se desvaneca quando $h = o$. A equação $\frac{u'-u}{h} = p$ será pois tanto mais exacta, quanto o crescimento h for mais pequeno; e nesta hypothese, pode fazer-se $u' - u = ph$.
(SATURNINO, 1842, p.7)

Saturnino, continuando seu desenvolvimento, tece ainda algumas considerações referentes ao limite.

Daqui nasce a fórma do primeiro termo do desenvolvimento do segundo estado u' . Com effeito, desvanecendo-se a quantidade $P - p$ com h , deve necessariamente ter essa quantidade no número de seus factores; e o que póde ter-se de mais geral he suppor-se $P - p = Qh^n$, sendo n um número inteiro positivo qualquer, não tomando Q a fórma $\frac{k}{o}$ quando $h = o$: então a equação $\frac{u'-u}{h} = p + Qh^n$ dá $u' = u + ph + Qh^{n+1}$.
(SATURNINO, 1842, p.7-8)

Notemos que o tratamento dado por Saturnino não somente é mais detalhado, mas também traz algumas notações que não constavam no texto original, tais como $\frac{k}{o}$.

Os autores mostram que diferenciais de funções iguais são iguais. Lacroix admite que tal resultado é quase evidente e apresenta sinteticamente sua argumentação, “se $u = v$ he necessario que substituir $x + dx$ no lugar de x , e desenvolvendo, se tenha $u + pdx + \&c. = v + qdx + \&c.$ qualquer que seja dx ; logo $pdx = qdx$, isto he, $du = dv$ ” (LACROIX, 1812, p.6).

No entanto, a argumentação de Saturnino se mostra bem mais detalhada.

Se, por exemplo, u e v designão funcções de x , taes que seja $u = v$, seja x o que for; e, que quando x se torna $x + dx$, u se mude em u' , e v em v' , ter-se-ha ainda $u' = v'$, tirando esta equação da primeira, resulta $u - u' = v - v'$: e dividindo por dx , $\frac{u-u'}{dx} = \frac{v-v'}{dx}$, quaesquer que sejam x , e dx ; se pois, p , e q designão os limites respectivos destas relações, seus valores geraes poderão, pelo que precede, ser representados por $p + \alpha$, e $q + \beta$, não dependendo p e q de dx , em tanto que α e β decrescem, e se desvanecem ao mesmo tempo que dx ; e ter-se-há $p + \alpha = q + \beta$ e $p - q = \beta - \alpha$. Daqui se segue que $p = q$; porque suppondo-se $p - q = D$, resultaria que a quantidade $\beta - \alpha$ não poderia ser menor que D , devendo aliás desvanecer-se: he pois necessario que $D = o$: logo $pdx = qdx$, e $du = dv$; observando que, pelo que se disse no numero 5, pdx e qdx são as differenciaes das funcções u e v .
(SATURNINO, 1842, p.8-9)

Em pelo menos, dois momentos até aqui, Saturnino apresenta explicações bem mais detalhadas na comparação com o texto original. Tal fato, talvez se explique, por meio de um possível esforço, para deixar os conceitos básicos mais claros, de maneira que os alunos da Academia Real Militar tivessem maior facilidade em os assimilar.

Nesse ponto, Lacroix caracteriza novamente o conceito de função da seguinte forma: “Quando duas quantidades u , e x são ligadas por uma dependencia mutua, pode-se dizer igualmente que u é função de x , ou que x é função de u , segundo se quer considerar u como determinada por x ou x determinada por u ” (LACROIX, 1812, p.7)

Por outro lado, embora o cálculo desenvolvido por Leibniz estivesse baseado prioritariamente nas curvas e nas relações entre quantidades geométricas vinculadas a elas, Bos (1974) salienta que a diferencial é uma variável definida em um espectro de valores infinitamente pequenos e que “isto é importante para enfatizar o conceito de diferencial como uma variável, e o de diferenciação como um operador que associa variáveis a variáveis⁶⁶” (BOS, 1974, p.17, TRADUÇÃO NOSSA).

Nesse sentido, Bos nos mostra que, no cálculo leibniziano, a escolha do universo, o qual as variáveis estão definidas, desempenha um papel extremamente importante no tratamento de diferenciais de ordem superior.

A escolha da progressão das variáveis está relacionada com o que seria a escolha de uma variável independente ao considerarmos variáveis como funções.

[...] A correspondência entre a variável com diferencial de primeira ordem constante e a variável “independente” ocorrendo em funções, também pode ser esclarecida considerando a fórmula que ainda se encontra em uso para a segunda derivada⁶⁷.

(BOS, 1974, p.30-31, TRADUÇÃO NOSSA)

Dessa forma, o desenvolvimento das diferenciais de ordem superior implica em uma relação funcional.

Portanto, somente se dx for tomado constante faz d^2y ter uma relação com a segunda derivada de y como função de x . Assim, a variável a

⁶⁶ It is important to stress the concept of the differential as a variable, and of differentiation as an operator assigning variables to variables.

⁶⁷ The choice of the progression of the variables is related to what would be the choice of an independent variable if one wanted to consider the variables as functions.

[...]The correspondence between the variable with constant first-order differential and the "independent" variable occurring in functions may also be clarified by considering the formula which is at present still in use for the second derivative.

qual a diferencial de primeira ordem é suposta constante, desempenha um papel equivalente ao da variável independente⁶⁸.

(BOS, 1974, p.31, TRADUÇÃO NOSSA)

Notemos que a teoria desenvolvida por Leibniz já considera uma importante distinção entre as variáveis dependentes e independentes.

Assim, ao considerarmos tais afirmações, podemos entender que, no que se refere ao estatuto das variáveis, o texto de Lacroix não faz como nos outros estudos. Lacroix sequer fez a distinção entre as variáveis, algo que, como já vimos, Leibniz já considerava, aproximadamente um século antes, na formulação de seus conceitos. Mesmo em textos de sua época, tal distinção é salientada.

Quando quantidades variáveis são tão relacionadas entre si que, dado o valor de uma delas, pode-se concluir o valor de todas as outras, concebe-se normalmente essas diversas quantidades expressas por meio de uma dentre elas, que toma, então, o nome de *variável independente*; e as outras quantidades expressas por meio da variável independente, são o que chamamos de *funções* dessa variável.

(SCHUBRING & ROQUE, 2016, p. 13)

Podemos perceber que a definição apresentada por Lacroix é fundamentada em termos de uma “*dependência mútua*”, a qual é fundamentalmente diferente da definição apresentada por Cauchy, que faz uma separação do estatuto das variáveis, classificando uma delas como variável dependente e a outra como variável independente.

A partir dessa definição Lacroix dedica-se a estabelecer as bases para o cálculo da diferencial da soma, da subtração, do produto e do quociente de duas funções.

Para calcular a diferencial da função x^n , Lacroix afirma que:

$$\frac{dx^n}{x^n} = \frac{d.xxxx..}{xxxx..} = \frac{dx}{x} + \frac{dx}{x} + \frac{dx}{x} + \frac{dx}{x} + \dots = n \frac{dx}{x}$$

Lacroix conclui que $d.x^n = nx^{n-1}dx$ e verifica que tal relação permanece verdadeira quando n toma valores fracionários e negativos. Dessas considerações uma conclusão mais geral é tomada:

Desta enumeração concluiremos que para differenciar huma potencia qualquer de huma quantidade variavel, he necessario multiplica-la

⁶⁸ Hence only if dx is taken constant does d^2y have a relation to the second derivative of y as function of x . Thus the variable whose first-order differential is supposed constant takes a role equivalent of that of the independent variable.

pelo seu expoente, diminuir depois este expoente de uma unidade e multiplicar o resultado pela diferencial da variável.

(LACROIX, 1812, p.12-13)

Lembremos que na definição de variável dada por Euler, as variáveis poderiam assumir valores racionais, transcendentos, irracionais e imaginários. Mas, no texto de Lacroix, fica evidente que as variáveis deveriam assumir apenas valores racionais nos expoentes.

No texto de Saturnino, por sua vez, devemos ressaltar que, nesse ponto, embora o texto siga o mesmo padrão e até os mesmos exemplos apresentados por Lacroix, existem pequenas diferenças nos conceitos apresentados.

Por exemplo, para mostrar que $d(u + v - w) = du + dv - dw$, Lacroix efetua a substituição de x por $x + dx$ e, em seguida, subtrai a função original, concluindo o que se queria demonstrar.

Nesse caso específico, Saturnino também faz a substituição de x por $x + dx$, mas chega a conclusão usando argumentos diferentes. É observado que ao fazer tal substituição, u se torna em $u + \alpha$, v se torna $v + \beta$ e w em $w + \gamma$.

Assim, $u + v - w$ torna-se em $u + v - w + \alpha + \beta - \gamma$ e, quando comparada com o crescimento dx da variável x , resulta em $\frac{\alpha}{dx} + \frac{\beta}{dx} - \frac{\gamma}{dx}$. Tal quantidade tem como limite, $p + q - r$.

Reparemos que, em sua argumentação, Saturnino, diferentemente de Lacroix, refere-se ao uso do conceito de limite, embora não tenham sido realizados maiores considerações nesse aspecto.

Saturnino mostra as mesmas propriedades das operações de diferenciais realizadas por Lacroix, mas utiliza menos exemplos, que são apresentados como exercícios resolvidos.

3.1.3 Diferenciações Sucessivas e Diferenciação de Funções Transcendentes

No tópico acerca das diferenciações sucessivas, o texto de Lacroix, bem como a tradução por Saturnino, apresenta essa noção, a partir da argumentação de que, se o coeficiente diferencial de uma função for uma função de x , então pode ser submetido novamente à diferenciação. A partir da observação de padrões das sucessivas diferenciações de $a \cdot x^n$ nota-se que:

$$\begin{aligned}\frac{d \cdot ax^n}{dx} &= nax^{n-1} \\ \frac{d^2 ax^n}{dx^2} &= n \cdot (n-1) \cdot ax^{n-2} \\ &\vdots \\ \frac{d^n ax^n}{dx^n} &= n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 1 \cdot a\end{aligned}$$

Após o estabelecimento da noção de diferenciação sucessiva, o texto original direciona-se no sentido de fazer deduções com culminância na apresentação da fórmula de Taylor⁶⁹.

Lacroix, então, considera a função $u = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \&c$ e faz sucessivas diferenciações de u , encontrando:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dx} &= B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + \&c \\ \frac{d^2u}{dx^2} &= 2C + 2 \cdot 3 \cdot Dx + 3 \cdot 4Ex^2 + \&c \\ \frac{d^3u}{dx^3} &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot D + 2 \cdot 3 \cdot 4Ex + \&c\end{aligned}$$

Designando por U , U' , U'' , U''' , $\&c$ o que vem após as expressões acima, quando $x = 0$ conclui-se que:

$$A = U, B = \frac{1}{1}U', C = \frac{1}{1 \cdot 2}U'', D = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3}U'''$$

Portanto:

$$u = U + U' \cdot \frac{x}{1} + U'' \cdot \frac{x^2}{1 \cdot 2} + U''' \cdot \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \&c$$

Utilizando um raciocínio análogo por meio da substituição de x por $x + h$ e mostrando que os coeficientes diferenciais são os mesmos, tanto x sendo a variável, quanto h sendo a variável. Lacroix, chega a seguinte expressão, onde u' é a função calculada em $x + h$:

⁶⁹ Termo utilizado por Lacroix. (LACROIX, 1812, p. 24)

$$u' = u + \frac{du}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3u}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \&c$$

Lacroix completa: “Esta fórmula, que deve ser considerada como a base do calculo differencial, he conhecida debaixo do Theorema de Taylor, porque esse Geometra Inglez foi o primeiro que a deo” (LACROIX, 1812,p.24)

Lacroix, apresenta ainda, em uma nota de rodapé, uma demonstração dessa fórmula.

Em contrapartida, apesar do texto de Saturnino também culminar com a fórmula de Taylor, ele a faz de forma substancialmente diferente àquela realizada no texto original. Assim como no texto original, Saturnino mostra que o coeficiente diferencial de $(x + y)^n$ é o mesmo, se tomarmos x ou y como variável. Baseado nessa premissa, o texto apresenta argumentos para a dedução da fórmula de Taylor.

Daí, considerou-se a função $f(x + y) = L + My^\alpha + Ny^\beta + Py^\gamma + \&c$ e os seus coeficientes diferenciais tomando-se, respectivamente, x e y como variáveis, a saber:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dx} + \frac{dM}{dx}y^\alpha + \frac{dN}{dx}y^\beta + \frac{dP}{dx}y^\gamma + \&c \\ \alpha My^{\alpha-1} + \beta Ny^{\beta-1} + \gamma Py^{\gamma-1} + \&c \end{aligned}$$

Por meio da comparação entre tais coeficientes descobre-se então que $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = 3$, $\&c$. E ainda que:

$$M = \frac{dL}{dx}, \quad N = \frac{1}{2} \cdot \frac{dM}{dx}, \quad P = \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{dN}{dx}, \quad \&c$$

E, finalmente, chega-se ao chamado “Theorema de Taylor”. Saturnino, mantém a aplicação do Teorema de Taylor para o desenvolvimento de $(x + y)^n$. Ressalta-se ainda que após a dedução, Saturnino usa o termo “Série de Taylor”.

Nas duas obras, a seção seguinte, trata acerca das funções transcendentais. O primeiro estudo sobre a diferenciação dessa classe de funções é realizado com a função exponencial $u = a^x$. O texto de Saturnino, segue a mesma linha do texto original, mas

Saturnino mostra uma maior preocupação em explicitar com mais clareza as operações matemáticas usadas.

Ambos os textos desenvolvem o binômio $a^{dx} = (1 + b)^{dx}$, a saber:

$$(1 + b)^{dx} = 1 + \frac{dx}{1} \cdot b + \frac{dx(dx-1)}{1 \cdot 2} \cdot b^2 + \frac{dx(dx-1)(dx-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot b^3 + \&c$$

E, consequentemente:

$$a^{dx} - 1 = \frac{dx}{1} \cdot b + \frac{dx(dx-1)}{1 \cdot 2} \cdot b^2 + \frac{dx(dx-1)(dx-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot b^3 + \&c$$

Nesse ponto podemos perceber a diferença de tratamento dos dois textos. Daí, Lacroix imediatamente conclui que:

$$a^{dx} - 1 = dx \cdot \left(\frac{b}{1} - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \&c \right) + \&c$$

Por outro lado, Saturnino afirma “*Se se faz $dx = 0$ no segundo membro dessa equação, ficará por limite*” (SATURNINO, 1842, p.27)

$$\frac{b}{1} - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \&c$$

Percebemos a intenção de Saturnino, em evidenciar ao leitor as operações matemáticas embutidas no texto original, embora a noção de limite seja apenas citada, visto que não é definida, nem desenvolvida no texto.

Ao examinarmos o estudo da diferenciação das funções envolvendo logaritmo, vemos que as notações envolvendo os logaritmos são diferentes. O número e é definido exatamente por essa série. O texto original denota o logaritmo de um número x , em uma determinada base, como lx , e, mais especificamente, por $l'x$ o logaritmo tomado sobre a base e . Saturnino, por sua vez, mantém a mesma notação para logaritmos em uma base a , mas denota por $\log x$, o logaritmo de um número x tomado sobre a base e .

Nos dois textos foram feitas diversas considerações a respeito dos logaritmos por meio da sua expansão em série de Taylor. Nesse sentido, pudemos perceber a noção de

convergência, embora, existam somente citações de que determinadas séries são convergentes, não existindo maiores argumentações que pudessem evidenciar tais afirmações.

Se se toma a por base de hum systema de logarithmos, denotado simplesmente pela característica l , será $la = 1$, e $x = lu$; e consequentemente, $u = 1 + \frac{1}{1} \cdot \frac{lu}{le} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \left\{ \frac{lu}{le} \right\}^2 + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left\{ \frac{lu}{le} \right\}^3 + \&c$; serie que faz conhecer um numero por meio de seu logarithmo, e que acaba sempre por ser convergente. (SATURNINO, 1842, p.29)

As funções trigonométricas são definidas como funções circulares. A primeira função a ser estudada em termo de sua diferenciação é $\text{sen}x$. Aqui, podemos observar novamente, como a noção de convergência é tratada.

Nesse ponto, não apenas é afirmado que tal limite existe, mas as argumentações acerca de sua existência, dessa vez são feitas de forma retórica.

O factor $\frac{\text{sen}dx}{dx}$, tende sem cessar para a unidade; porque de $\text{tang}A = \frac{\text{sen}A}{\text{cos}A}$, se deduz $\frac{\text{sen}A}{\text{tang}A} = \text{cos}A$; e pois que $\text{cos}A = 1$ quando $A = 0$, a unidade será o limite da relação entre o seno e a tangente, quando o arco se desvanece; ora, he visivel que o arco sendo menor que a tangente, e maior que o seno, segue-se que por que maior forte razão a sua relação com o seno tende sem cessar para a unidade. (LACROIX, 1812, p.37)

As diferenciais das outras funções trigonométricas básicas, ou seja, $\text{cos}x$, $\text{tan}x$, $\text{cot}x$, $\text{sec}x$, $\text{cossec}x$, foram obtidas por meio de diferenciações de funções já obtidas com o uso de identidades trigonométricas.

Por sua vez, o texto de Saturnino apresenta a diferenciação da função $\text{sen}x$ de outra maneira e, ao contrário do texto original, não faz a dedução da diferencial das outras funções trigonométricas, tais diferenciais são apenas explicitadas. Tal fato se repete, no que se refere à diferenciação das funções trigonométricas inversas. Enquanto o texto de Lacroix, faz a dedução da diferenciação das funções inversas de $\text{sen}x$, $\text{cos}x$ e $\text{tan}x$, Saturnino faz a dedução somente da primeira delas e limita-se a apresentar o resultado da diferenciação das outras .

Cabe notar a diferença de notação usada para expressar as funções trigonométricas inversas. Lacroix considera que $u = \text{sen} x$ e mostra que $dx = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$.

Por outro lado, Saturnino utiliza a notação $d \cdot \text{Arc}(\text{sen} = y) = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$.

Saturnino, assim como no texto original, faz a expansão por meio da série de Taylor de $\text{sen} x$ e $\cos x$, bem como das funções inversas de $\text{sen} x$ e $\tan x$. Porém, realiza uma análise mais aprofundada acerca do arco de 45° , que não consta no texto original.

Com effeito, pondo $u = 1$, tem-se $\text{Arco de } 45^\circ = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \&c$, mas, esta serie he pouco convergente, para ser empregada com vantagem; pôde-se porem calcular-se o mesmo arco por muitas partes, cada huma das quaes, tendo huma tangente menor que a unidade, seja expressa por huma serie muito convergente. Segundo hum calculo feito por Machin, o arco de 45° he igual a quatro vezes o que tem por tangente $\frac{1}{5}$, menos o arco que tem por tangente $\frac{1}{239}$, do que nos podemos certificar. (SATURNINO, 1842, p.42)

Podemos notar novamente comentários sobre séries convergentes, sem, no entanto, serem tecidos maiores detalhamentos.

Na continuação do raciocínio apresentado acima, Saturnino conclui que “o valor da semicircunferência” é dado por $\pi = 3,141592653$, por meio da relação:

$$\text{Arc. } 45^\circ = 4 \left\{ \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{5 \cdot 5^7} + \&c \right\} - \left\{ \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^7} - \&c \right\}$$

Nesse sentido, cabe ressaltarmos a similaridade entre esse raciocínio e o estabelecido por Euler, em sua clássica obra “*Introductio in Analysin Infinitorum*”, em sua tradução para o francês:

Embora esse arco tenha um valor expresso por uma série pouco convergente $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \&c$; conservamos-o dependente, e imaginemos a divisão em dois arcos a e b , de maneira que $a + b = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$.

(...) os arcos a e b serão expressos por uma série racional muito mais convergente que a anterior, e sua soma será o valor do arco $\frac{\pi}{4}$.

Portanto,
$$\pi = 4 \cdot \left\{ \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} - \dots \right\} - \left\{ \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} - \dots \right\} . \quad \text{Assim,}$$

podemos encontrar desta forma o comprimento da semi-circunferência mais rapidamente do que a série dada anteriormente.⁷⁰

(EULER, 1796, p.105, TRADUÇÃO NOSSA)

O texto de Saturnino, a partir desse momento, apresenta uma mudança na ordem de apresentação dos capítulos. Nesse ponto, o texto original trata acerca da diferenciação de equações a duas variáveis. Saturnino opta por trazer o capítulo intitulado “Da diferenciação das funções de duas, ou de hum maior número de variáveis” imediatamente antes do tratamento da diferenciação de equações a duas variáveis.

Lacroix tece uma longa explanação, com vários exemplos acerca da diferenciação implícita de equações, como, $y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0$, vários desses exemplos referem-se às diferenciações de ordens superiores.

Por outro lado, embora Saturnino também faça a análise por meio de vários exemplos, em um número menor na comparação com o texto original, ressalta-se a abordagem funcional dada. Assim, o tratamento de uma equação com variáveis x e y é feito por meio de $f(x, y) = 0$.

Supposemos porém que se tem a equação $f(x, y) = 0$. Se suppozermos que x , e y se tornão respectivamente em $x + h$, e $y + k$, he preciso que se tenha ainda $f(x + h, y + k) = 0$ donde se tira $f(x + h, y + k) - f(x, y) = 0$. Desenvolvendo essa equação pela serie do número 10 tem-se $\frac{1}{1} \left\{ \frac{du}{dx} h + \frac{du}{dy} k \right\} + \frac{1}{1 \cdot 2} \left\{ \frac{d^2u}{dx^2} h^2 + 2 \frac{d^2u}{dx dy} kh + \frac{d^2u}{dy^2} k^2 \right\} = 0$ representando $u = f(x, y)$. Isto posto, procurar o coefficiente differencial de y he achar o limite da relação $\frac{k}{h}$.

(SATURNINO, 1842, p.56)

Por meio da análise de tal relação, fazendo $k = \omega h$ e tomando $h = 0$, Saturnino mostra que $\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy = 0$ e enuncia que:

⁷⁰ Quoique ce arc ait une valeur exprimee par serie a peine convergente $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$; conservons-le dependant, & imaginons-le partagé em deux arcs a & b , de maniere que $a + b = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$.

(...) alors les deux arcs a & b seront exprimes par une série rationnelle beaucoup plus convergente que la precedente, & leur somme donnera la valeur de l'arc $\frac{\pi}{4}$. Donc,

$$\pi = 4 \cdot \left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{7 \cdot 2^7} + \frac{1}{9 \cdot 2^9} - \dots \right) \\ &\left(\frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} - \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} - \dots \right) \end{aligned} \right\}$$

On auroit donc pu trouver de cette maniere la longueur de la demi-circonférence beaucoup plus promptement qu'on ne l'a fait,, en se servant de la série que nous avons donnée auparavant.

Este resultado mostra que, para achar o coefficiente differencial da primeira ordem de huma funcção y , dada por huma equação $u = 0$, entre duas variáveis x e y , deve differenciar-se o primeiro membro desta equação, como se as variaveis fossem independentes huma da outra, igualar o resultado a nada, e tomar o valor de $\frac{dy}{dx}$.
(SATURNINO, 1842, p.57)

Nessa seção, num certo sentido, o texto de Saturnino se mostra bem mais resumido do que a versão original. Contudo, a abordagem dada aos conceitos foi completamente modificada, destacando-se a abordagem por meio de funções.

3.1.4 Análise sobre o Cálculo Diferencial em Funções

Lacroix dedica um capítulo de sua obra no estudo dos valores máximos e mínimos que uma função de uma variável pode assumir. Em sua argumentação, considerando a função $y = b - (x - a)^2$, deixa claro que os valores máximos e mínimos são considerados localmente.

O caracter essencial do maximo consiste, em que os valores, que o precedem, ou que se lhe seguem immediatamente são menores; o minimo pelo contrario, he excedido pelos valores, que o precedem, ou se lhe seguem imediatamente.
Disse immediatamente, porque acontece muitas vezes huma função ter valores, que excedem seu maximo, ou que são menores que seu minimo, ou em fim ter muitos maximos, e muitos minimos desiguaes; entre si.
(LACROIX, 1812, p.48)

A partir do estudo de uma função genérica calculados em $x + h$ e $x - h$, e da expansão em série de Taylor são encontradas as condições as quais os pontos máximos e mínimos devem satisfazer.

Saturnino expõe as mesmas considerações tecidas por Lacroix, mas, por meio de um exemplo não contemplado no texto original, traz uma pequena análise das cônicas, em termos de seus pontos máximos e mínimos. Após o estudo da função $y^2 = 2cx \cdot (1 + e) - x^2(1 - e^2)$ é concluído que:

Este valor só póde ser real se $e < 1$, o que mostra que, nas três curvas, que representa a equação acima, somente a ellypse tem duas ordenadas máximas iguaes, huma positiva e outra negativa,

correspondentes ao centro, pois que o valor $\frac{d^2y}{dx^2}$ achados no numero 72, he negativo na mesma hypotese de $e < 1$.
(SATURNINO, 1842, p.94)

Lacroix, a partir da problematização relativa aos pontos máximos e mínimos de uma função, inicia um novo capítulo direcionado ao estudo das funções tais que $\frac{dy}{dx} = \frac{0}{0}$, quando se toma $x = 0$. Inicialmente é observada a necessidade da eliminação dos fatores comuns no numerador e denominador.

Logo pois que huma expressão qualquer se apresenta debaixo da fórma $\frac{0}{0}$, he necessario, para conhecer a sua verdadeira significação, desembaraça-la dos factores, que são communs a seu numerador, e denominador. A differenciação nos vai fornecer o meio.
(LACROIX, 1812, p.70)

Por meio da análise de alguns exemplos, Lacroix desenvolve o argumento de que o processo de eliminação dos fatores comuns ao numerador e denominador está relacionado com o processo de diferenciações sucessivas.

Applicando, o que se precede à fração $\frac{P(x-a)^m}{Q(x-a)^n}$ ver-se-ha, que differenciando muitas vezes seguidas, o seu numerador, e o seu denominador, serão desembaraçados ambos ao mesmo tempo do factor $(x-a)$, se $m = n$. Se he o numerador, que dá primeiro hum resultado, que não se desvaneça, será esta huma prova de que o factor $(x-a)$ se acha elevado neste a huma potencia menor qu no denominador, e por consequência a fracção proposta será infinita; se he, pelo contrário, o denominador, a fracção proposta será nulla.
(LACROIX, 1812, p.72)

Após o desenvolvimento desse raciocínio, Lacroix enuncia o procedimento, que hoje conhecemos como Regra de L'Hopital.

Póde-se pois enunciar a regra seguinte: *Para obter o verdadeiro valor de huma função, que se torna em $\frac{0}{0}$ quando se da a x hum valor particular, he necessário differenciar o seu numerador, e o seu denominador até que se ache para hum, ou outro hum resultado, que não se desvaneça, a função proposta será infinita no primeiro caso, nulla no segundo, e terá hum valor finito, se se achão ao mesmo tempo dous resultados, que não se anniquilem.*
(LACROIX, 1812, p.72)

Notemos que, embora trabalhe com os mesmos exemplos do texto original, Saturnino faz uma abordagem genérica a partir de uma função $\frac{F(x)}{f(x)}$, tal que $F(a) = f(a) = 0$.

Daí, fazendo a expansão de $F(x)$ e $f(x)$ pela série de Taylor, considerando que as funções se anulam em $x = a$ e fazendo $h = 0$, Saturnino conclui que:

Daqui se segue, que para obter o valor de huma fracção, que se torna $\frac{o}{o}$, pela substituição de hum valor particular de x , se deve dividir o coefficiente differencial do numerador pelo coefficiente differencial do denominador, pondo nestes coefficientes, por x o valor que aniquila os termos da fracção proposta.

(SATURNINO, 1842, p.98)

Lacroix optou por escrever o procedimento em termos das diferenciações sucessivas. Saturnino, descreve o procedimento em termos do coeficiente diferencial e continua a desenvolver tal raciocínio para a generalização do procedimento.

No capítulo denominado, Teoria Geral das Curvas, Lacroix apresenta, o que chama de explicação filosófica das propriedades do cálculo diferencial. Segue abaixo, na íntegra, a concepção de Lacroix referente ao cálculo diferencial e a outros conceitos:

He por indagações relativas às linhas curvas, que os Geometras tem chegado ao Calculo Differencial, que depois tem sido apresentado debaixo de pontos de vista muito variados; mas qualquer que seja o pontos de vista que se de a este calculo, elle repousara sempre immediatamente sobre um *facto analytico* preesistente a toda hypothese, como a quéda dos corpos graves a superfície da terra, preexiste a todas as explicações que lhe se tem dado: e este facto he precisamente a propriedade de que gozão todas as funções, de admitir um limite na relação, que seus augmentos tem com os augmentos da variavel de que ellas dependem.

Este limite, differente para cada função, mas constantemente o mesmo para huma mesma função, e sempre independente dos valores absolutos dos augmentos, caracteriza de huma maneira, que lhe he própria a marcha desta função nos diversos estados, pelos quaes ella póde passar. Com effeito, mais os augmentos da variável independente são pequenos, mais os valores sucessivos da função são restringidos; mais em fim esta função se aproxima de ser submetida à lei da continuidade em suas mudanças, e mais a relação destas mudanças para as mudanças da variável independente se aproxima de ser igual ao limite assignado pelo cálculo. Pela lei de continuidade se deve entender aquella, que se observa na descripção das linhas pelo movimento, e segundo a qual os pontos consecutivos de huma mesma linha se succedem sem intervalo algum. A maneira de encarar as grandezas no cálculo, não parece admittir esta lei, pois que supõem

sempre hum intervallo entre dous valores consecutivos da mesma quantidade, a qual o limite convém perfeitamente; he tambem em virtude desta lei de continuidade que os augmentos já desvanecentes, conservão ainda a relação de que elles se tem aproximado por grãos antes de desvanecer-se. (LACROIX, 1812, p.84-85)

Observemos que na metafísica apresentada, Lacroix caracteriza o limite de uma função como uma característica preexistente, intrínseca às funções. Logo após, explicita-se o motivo da importância das considerações geométricas no cálculo e sua relação com o conceito de diferencial:

As considerações geometricas provão de huma maneira bem evidente que a relação dos augmentos de huma função e de sua variável, he em geral susceptivel de limites. Toda a função de huma só variavel pode ser representada pela ordenada de huma curva, de que esta variavel he a abscissa, e a relação da ordenada da curva com a sua subtangente, corresponde ao coeficiente differencial da função.

(LACROIX, 1812, p.85)

Lacroix salienta ainda que sua maneira de abordar o tema assemelha-se ao ponto de vista expressado por Leibniz. De fato, assim como Leibniz, Lacroix considera que a curva pode ser aproximada tomando o limite de polígonos, cujos vértices são pontos sobre a curva, com abscissas distantes uma mesma quantidade entre si.

(...) formar-se-ha o polygono MM'M''&c defferirá tanto menos da curva proposta, quanto os pontos M, M', M'', &c forem mais próximos, mas ao mesmo tempo o numero de seus lados augmentará de mais em mais, pois que a distancia PP' será contida hum maior numero de vezes na abscisa determinada AB. A curva CD será evidentemente o limite de todos estes polygonos, e por consequencia as propriedades, que convierem a este limite, convirão tambem à curva proposta. (LACROIX, 1812, p.87)

Saturnino, por sua vez, não reescreve as considerações metafísicas tecidas por Lacroix, mas desenvolve sua argumentação de forma similar à apresentada por Lacroix. Por outro lado, ao afirmar que *“um pequeno arco de curva póde ser tomado pela sua corda; isto he, que a relação do arco á sua corda tem por limite a unidade. Mas essa proposição, por muito importante, carece ser demonstrada”* (SATURNINO, 1842, p.70), Saturnino manifesta uma maior preocupação, em termos de formalização, ao fazer a demonstração de sua afirmação.

Nesse ponto, Saturnino tece ainda algumas considerações a respeito da quadratura de uma região, referindo-se a diferencial de área, concluindo que $dS = ydx$.

Lacroix apresenta vários exemplos na determinação de tangentes e normais a curvas, cálculo do comprimento de arcos da curva. Saturnino, por sua vez, apresenta nessa seção alguns exemplos diferentes e não utiliza todos os problemas trabalhados por Lacroix.

Na seção referente à indagação dos pontos singulares de uma curva, Lacroix faz uma longa explanação, com análise de vários exemplos, acerca, principalmente, dos pontos de inflexão. É realizado também um estudo com respeito aos possíveis valores que $\frac{dy}{dx}$ e $\frac{d^2y}{dx^2}$ podem assumir e suas respectivas relações com o comportamento da função.

Saturnino apresenta tal seção de maneira bastante sintética, chegando a deixar claro que os detalhes a respeito de tal tópico fugiam dos objetivos estabelecidos. “*Não insistiremos mais sobre essa matéria, por não ser de imediata utilidade aos nossos fins, pode consultar-se o original do Cálculo diferencial de Lacroix, no título relativo a esse objeto*” (SATURNINO, 1842, p.107).

Lacroix, na seção seguinte intitulada “Análise de uma curva”, faz uma análise, por meio de exemplos, dos pontos singulares de curvas com equações polinomiais. Tal seção não aparece na obra de Saturnino. Após isso, escreve ainda uma seção direcionada ao problema das tangentes de algumas funções transcendentais. Em particular são explorados detalhes da função logarítmica, da cicloide e das espirais, estas últimas analisadas por meio das coordenadas polares. A escrita dessa seção por Saturnino é feita de forma bastante similar à realizada por Lacroix.

A última seção escrita por Saturnino é referente a diferenciação de equações que contém mais de uma variável independente e aborda essencialmente as propriedades relativas às diferenciais parciais.

Contudo, mais uma vez, a abordagem de Lacroix mostra-se mais detalhada. Devemos ressaltar, nesse ponto, que pela primeira vez na obra, Lacroix faz uso da notação $f(x, y)$.

Representemos por $f(x, y)$ uma função qualquer de x , e de y , suppondo primeiro que a variável x muda, e se torna em $x + h$, será necessario considerar y como uma constante, e tratar a função proposta da mesma sorte que uma função de x ; ter-se-ha logo pelo

theorema do numero 12, fazendo para abreviar $f(x, y) = u$, $f(x + h, y) = u + \frac{du}{dx} \cdot \frac{h}{1} + \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{h^2}{1 \cdot 2} + \frac{d^3u}{dx^3} \cdot \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \&c$
(LACROIX, 1812, p.168-169)

São desenvolvidas as propriedades relativas à diferenciação das funções de várias variáveis e generalizadas as propriedades válidas para as funções de uma variável.

Podem-se logo applicar ás funções as duas variáveis as regras dadas para a differenciação de funções, que dependem de huma só, e para isso differenciar-se-ha a função proposta primeiro em relação a huma das variaveis , e depois em relação a outra: a somma dos dous resultados, será a differencial procurada. Vê-se immediatamente segundo esta regra que:

$$d(x + y) = dx + dy$$

$$d.xy = ydx + xdy$$

$$d\frac{x}{y} = \frac{ydx - xdy}{y^2}$$

(LACROIX, 1812, p.176)

Por fim, o texto original de Lacroix traz ainda duas seções não consideradas no texto de Saturnino, a saber, o estudo dos pontos máximos e mínimos das funções de duas variáveis e considerações acerca da Teoria das curvas de dupla curvatura.

3.1.5 Algumas Conclusões Parciais

Ao efetuarmos a comparação entre os textos de Lacroix e Saturnino, percebemos claramente a preocupação de Saturnino em elaborar um texto mais conciso e didático. Observa-se ainda que, em alguns pontos, Saturnino acrescenta vários detalhes e demonstrações que não constavam no texto original de Lacroix, possivelmente pela demanda de aprendizagem advinda dos alunos da Academia Real Militar.

O conceito de limite é considerado de maneira similar em ambas as obras. Embora ele não tenha sido definido formalmente, seu uso é frequente no desenvolvimento de vários outros resultados.

Por outro lado, cabe-nos notar que, em termos do conceito de função, Saturnino trabalha com a notação $f(x)$. Nesse sentido, chamou-nos também a atenção o fato de

Lacroix, durante praticamente todo o texto, não utiliza a notação $f(x)$, enquanto no trabalho com funções de duas variáveis fez uso de $f(x, y)$.

Devemos salientar também que encontramos em ambos os textos características advindas de Euler e Leibniz.

A preocupação de tornar o texto mais didático, observado em Saturnino, pode ser percebido na sua mudança de ordem dos capítulos na comparação com o texto de Lacroix.

Em tempo, devemos sublinhar que, conforme já dito, sequer é apresentada uma definição para o conceito de limite, seu uso é estabelecido por meio da intuição ou da substituição tácita de uma variável por zero.

3.2 Análise do Cours d'Analyse de Ch Sturm - 2ª Edição 1863

Charles Sturm (1803-1855), eleito para a Academia das Ciências em 1836, exerceu um papel importante no ensino da Matemática na França, tanto por sua atuação como professor na École Polytechnique, a partir de 1838, quanto pelo alcance do seu Cours d'Analyse.

Sturm foi um sucessor de Cauchy na École Polytechnique, a importância do impacto exercido por seu livro pode ser melhor mensurada quando percebemos que foi reeditada quinze vezes. Nesse sentido, cabe-nos realizar uma análise da referida obra⁷¹, considerando sua posição enquanto um ponto de acumulação, dentro do contexto da metodologia adotada.

As primeiras páginas da obra, além de conterem os prefácios da primeira (1857) e segunda edições, abrangem também a seção intitulada, *Notice sur la vie et les travaux de M. Ch. Sturm*, que apresenta uma pequena biografia e uma extensa lista dos trabalhos publicados por Charles Sturm.

As primeiras definições da obra referem-se às definições de variável e de função.

Chamamos de *variável* uma quantidade que assume diferentes valores, e de *constante* aquela que mantém o mesmo valor ao longo de um mesmo cálculo.

(...) Quando os valores sucessivos de uma quantidade variável dependente, segundo uma determinada lei, estão associados à outra

⁷¹ Cabe-nos destacar que não encontramos na historiografia, análise referentes ao conteúdo dessa obra de Sturm, o que torna, a nosso ver, relevante a presente análise.

variável, a primeira é chamada de uma função da segunda. Podemos afirmar que duas quantidades que variam em conjunto são funções uma da outra, quando se sabe que cada valor de uma delas corresponde a um valor específico da outra, mesmo que a relação entre eles não seja conhecida e não possa ser expressa analiticamente.⁷²

(STURM, 1863, p.1, TRADUÇÃO NOSSA)

Em seguida, Sturm traz a definição de funções contínuas.

Basta considerar uma variável independente x como abscissa e a função y como ordenada correspondente a curva de equação $y = f(x)$. Geralmente, se diz que a curva é contínua se para os valores de x que variam imperceptivelmente a ordenada também varia imperceptivelmente; y é então uma função contínua de x .⁷³

(STURM, 1863, p.2, TRADUÇÃO NOSSA)

Notemos que a definição de continuidade dada por Sturm não apresenta nenhuma forma de algebrização e tampouco algum sinal, se caracterizando apenas por uma noção geométrica.

A fim de fazermos um pequeno contraponto, examinemos a definição de continuidade dada por Cauchy, em sua clássica obra:

Seja $f(x)$ uma função de variável x , e suponhamos que, para cada valor de x intermediário entre dois limites dados, essa função admite constantemente um valor único e finito. Se, partindo de um valor de x compreendido entre estes limites, atribui-se à variável x um incremento infinitamente pequeno α , a própria função receberá por incremento a diferença $f(x + \alpha) - f(x)$, que dependerá ao mesmo tempo da nova variável α e do valor de x . Dito isso, a função $f(x)$ será, entre os dois limites atribuídos à variável x , função *contínua* dessa variável, se, para cada valor de x intermediário entre esses limites, o valor numérico da diferença $f(x + \alpha) - f(x)$ decresce indefinidamente com aquele de α .

(SCHUBRING & ROQUE, 2016, p.22)

⁷² On appelle variable une quantité qui prend successivement différent valeurs, et constante celle qui conserve une valeur fixe dans le cours d'un même calcul.

(...) Quand les valeurs successives d'une quantité variable dépendent, suivant une certaine loi, de celles que prend une autre variable, la première est dite une fonction de la seconde. On peut affirmer que deux quantités qui varient ensemble sont fonctions l'une de l'autre, lorsqu'on sait qu'à chaque valeur de l'une d'elles correspond une valeur déterminée de l'autre, quand même la relation qui existe entre elles ne serait pas connue ni même susceptible d'être exprimée analytiquement

⁷³ Il suffit pour cela de considérer la variable indépendante x comme une abscisse et la fonction y comme l'ordonnée correspondant de la courbe plane définie par l'équation $y = f(x)$.

Ordinairement cette courbe est continue, c'est-à-dire que, pour des valeurs de x qui varient par degrés insensibles; l'ordonnée varie aussi par degrés insensibles; y est alors une fonction continue de x .

Embora, Cauchy, em sua definição, tenha lançado mão de argumentos intuitivos como, por exemplo: “aumentos infinitamente pequenos na variável produzem aumentos infinitamente pequenos na função”, sua definição de continuidade reveste-se com uma concepção mais algébrica.

Após apresentar as definições de função explícita e implícita, Sturm começa o trabalho com o chamado Método dos Limites, apresentando a definição de limite de uma variável:

Quando valores sucessivos de uma quantidade variável aproximam-se indefinidamente de uma quantidade fixa e determinada, de maneira a diferir tão pouco quanto se queira, esta quantidade fixa é chamada de limite dos valores da variável.⁷⁴

(STURM, 1863, p.3, TRADUÇÃO NOSSA)

Dois exemplos são apresentados como aplicação da definição dada, mas sem a apresentação de demonstrações. Sturm afirma que a área de um círculo é o limite das áreas de uma série de polígonos regulares inscritos, visto que, em geometria, prova-se que a área de um polígono regular inscrito pode diferir da área do círculo por uma quantidade tão pequena quanto se queira.

Notemos que a abordagem inicialmente trazida por Sturm apegase fortemente ao aspecto intuitivo por meio de instrumentos advindos da Geometria Clássica.

O segundo exemplo refere-se à análise da relação $\frac{\text{sen}x}{x}$. É observado que os valores de $\frac{\text{sen}x}{x}$ sempre são menores que a unidade e, mais especificamente, diferem da unidade tão pouco quanto se queira, à medida que os valores de x sejam suficientemente pequenos. A partir do argumento de que os valores de $\frac{\text{sen}x}{x}$ aumentam continuamente quando x diminui indefinidamente, Sturm conclui que o limite de $\frac{\text{sen}x}{x}$ é a unidade quando x decresce indefinidamente.

Observemos que, a análise da relação $\frac{\text{sen}x}{x}$ expressa nesse segundo exemplo é a mesma concepção concebida por De la Chapelle, em 1762, considerando que, uma magnitude é o limite de outra magnitude, quando a segunda pode aproximar-se da primeira, de tal forma que, a diferença entre a quantidade e seu limite seja absolutamente desprezível.

Sturm enuncia o método dos limites, explicitando o seu princípio fundamental:

⁷⁴ Quand les valeurs successives d'une quantité variable approchent indéfiniment d'une quantité fixe et déterminée, de manière à n'en différer qu'aussi peu qu'on voudra, cette quantité fixe est appelée la limite des valeurs de la variable.

Se duas quantidades que variam simultaneamente, permanecem constantemente iguais em todos os estados de grandeza pela qual passam e, se sabe que uma delas tende a um limite, é evidente que a outra grandeza também tende ao mesmo limite ou a um limite igual à aquela.⁷⁵ (STURM, 1863, p.5, TRADUÇÃO NOSSA)

Como aplicação desse princípio chave, Sturm afirma que a área de um círculo pode ser obtida por meio do produto entre o comprimento de sua circunferência pela metade do raio. Para chegar a essa conclusão apresenta-se a relação $a = p \times \frac{r}{2}$, em um polígono inscrito, onde a , p e r representam respectivamente a área, o perímetro e o apótema do polígono. Assim, o argumento segue salientando que a e $p \times \frac{r}{2}$ são quantidades que variam em função do número de lados do polígono e que permanecem iguais entre eles, tendo, portanto limites iguais. Nessa linha, a área do círculo seria o limite da área do polígono, o perímetro da circunferência o limite do perímetro do polígono e o raio do círculo o limite do apótema do polígono.

O método infinitesimal é exposto, logo em seguida, por meio da apresentação das noções de quantidades infinitamente pequenas e infinitamente grandes.

Quando uma quantidade variável tem seus valores cada vez menores, de maneira que eles podem ser menores que qualquer quantidade dada, dizemos que ele ela é *infinitamente pequena*.
(...) Quando uma quantidade variável tem seus valores cada vez maiores, de maneira que elas podem ser maiores do que qualquer quantidade dada, dizemos que ela deve ser *infinita* ou *infinitamente grande*, e é representada pelos símbolos ∞ ou $\frac{k}{0}$.⁷⁶ (STURM, 1863, p.6, TRADUÇÃO NOSSA)

Nesse sentido, ressalta-se ainda a importância das quantidades infinitamente pequenas no cálculo de quantidades finitas. No intento de exemplificar tal importância são colocados dois problemas:

⁷⁵ Si deux quantités qui varient simultanément restent constamment égales entre elles dans tous les états des grandeur par lesquels elles passent, et si l'on sait que l'une d'elles tend vers une limite, il est evident que l'autre tend aussi vers la même limite ou vers une limite égale à celle-là.

⁷⁶ Lorsqu'une quantité variable prend des valeurs de plus en plus petites, de manière qu'elle puisse devenir moindre que toute quantité donné, on dit qu'elle devient *infiniment petite*.
(...) Quand une variable prend des valeurs de plus en plus grandes, de manière qu'elle puisse surpassertoute grandeur donnée, on dit qu'elle devient *infinie* ou *infiniment grande*, et la représente alors par le signe ∞ ou $\frac{k}{0}$.

- Encontrar o limite da razão de duas quantidades infinitamente pequenas que dependem uma da outra.
- Encontrar o limite da soma de quantidades infinitamente pequenas à medida que o número de termos cresce infinitamente.

Como resposta a essas questões dois teoremas são propostos. O enunciado do primeiro teorema diz que o limite da razão entre duas quantidades infinitamente pequenas não muda quando essas quantidades são substituídas por outras, tais que sua razão tende à unidade.

Zerner (1986), conforme já colocado no capítulo anterior, identificou três gerações de textos, em seu clássico estudo sobre os tratados de análise franceses, no período entre 1870 e 1914. Em particular, na segunda geração dos tratados, Zerner aponta uma característica marcante, o chamado princípio da substituição, que na obra de Sturm aparece exatamente no segundo teorema, afirmando que o limite de uma soma de infinitamente pequenos não se altera quando são substituídos por outros, tais que a razão com os primeiros tenham por limite a unidade, ou que diferem dos primeiros por quantidades infinitamente pequenas.

Como aplicação desses teoremas, em particular, do princípio da substituição dos infinitamente pequenos, Sturm apresenta uma argumentação acerca do cálculo da área entre o eixo das abscissas, uma determinada curva e duas linhas verticais. A partir de uma partição no eixo horizontal, faz-se o comprimento das partições tender a zero, sendo concluído que o limite do somatório das áreas de determinados retângulos é zero.

Assim, cabe-nos apontar que os argumentos utilizados na demonstração apresentam uma caracterização bastante intuitiva. Nesse sentido, podemos perceber a intuição tem desempenhado um protagonismo na aplicação dos teoremas.

No encerramento da lição são apresentadas noções relativas às diferentes ordens das quantidades infinitamente pequenas: principal, de primeira ordem e de segunda ordem.

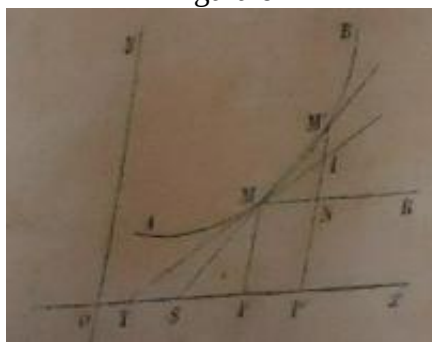
Sturm inicia a segunda lição considerando que a descoberta do cálculo diferencial foi obtida por meio da procura de um método geral para encontrar tangentes à curvas planas representadas por equações. A partir dessa consideração, Sturm define a tangente a uma curva em um determinado ponto.

Suponhamos certa curva real e contínua em alguma extensão, propomo-nos a descobrir a tangente a um ponto M, em que as

coordenadas são x e y . Definimos a tangente como o limite na qual tende uma secante, quando, essa secante move-se em torno de um de seus pontos de interseção, um segundo ponto aproxima-se indefinidamente do primeiro.⁷⁷

(STURM, 1863, p.12, TRADUÇÃO NOSSA)

Figura 6



Fonte: Sturm (1863)

A noção de derivada é motivada pela definição da reta tangente como o limite de retas secantes. Nesse sentido, é salientado que o limite da razão entre os acréscimos simultâneos de x e y são estabelecidos por meio da equação $y + k = f(x + h)$, e ainda que, quando h diminui indefinidamente obtém-se a exata inclinação da reta tangente.

Dessa forma, Sturm estabelece, por meio do estudo de tal limite, o objeto principal de estudo do cálculo diferencial e a definição de derivada de uma função.

O cálculo diferencial tem como objetivo determinar, para cada função, o limite da razão entre o acréscimo da função e o da variável, quando tal acréscimo diminui até zero. Esse limite, que depende do valor atribuído a variável x , mas não do acréscimo h , é chamado função derivada da função proposta. Ela é representada por y' ou por $f'(x)$.⁷⁸

(STURM, 1863, p.13, TRADUÇÃO NOSSA)

O problema da obtenção da reta tangente a uma curva, em um determinado ponto, está fortemente vinculado ao conceito de função, uma vez que, a definição de derivada está posta em relação a noção de função, uma vez que está definida em termos da função derivada de uma determinada função.

⁷⁷ Supposons cette courbe réelle et continue dans une certaine étendue, et proposons-nous de mener la tangente au point M dont les coordonnées sont x et y . On définit ordinairement la tangente comme la limite vers laquelle tend une sécante, lorsque, cette sécante tournant autour d'un de ses points d'intersection, un second point d'intersection s'approche indéfiniment du premier.

⁷⁸ Le calcul différentiel a pour but de déterminer, pour chaque fonction, la limite du rapport de l'accroissement de la fonction à celui de la variable, quand celui-ci diminue jusqu'à zero. Cette limite, qui dépend de la valeur attribuée à la variable x , mais nullement de son accroissement h , est appelée fonction dérivée de la fonction proposée. On la représente par y' ou par $f'(x)$.

Após a aplicação da definição de função derivada, o conceito de diferencial da variável y , a saber dy , foi definida como o produto do acréscimo da variável dependente x pela derivada da função. Já a diferencial da variável dependente x foi definida como o acréscimo h .

O conceito de diferencial, uma vez definido, permitiu uma nova releitura da definição de derivada em termos de diferenciais. Sturm define: “*a derivada de uma função de uma variável é o quociente da diferencial da função pela diferencial da variável. É por isso que chamamos também a derivada de razão diferencial ou quociente diferencial*”⁷⁹ (STURM, 1863,p.16, TRADUÇÃO NOSSA)

Após a interpretação gráfica do conceito de diferencial são colocadas e analisadas algumas propriedades das funções derivadas. A primeira propriedade trata da relação entre o crescimento e decréscimo da função e o sinal da função derivada.

A demonstração de que: “se a função derivada é nula para todos os valores de x entre dois valores quaisquer, por exemplo a e b , então a função é constante em um determinado intervalo”, nos mostra uma interessante aplicação do conceito de limite.

Assim, sendo $a < b$ e $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{k}{h} = 0$, por hipótese, temos $\frac{k}{h} < \varepsilon$ onde ε é menor do que qualquer quantidade dada. Segue que $k < h \cdot \varepsilon$. Considerando x_1 e x_2 entre a e b , mostra-se que os valores correspondentes y_1 e y_2 são iguais. Toma-se uma sequência de valores entre x_1 e x_2 , cuja a distância entre os termos seja pequena o bastante para garantir que $k < h \cdot \varepsilon$. Daí, argumenta-se que a soma dos sucessivos acréscimos em y será menor que a soma do produto $h \cdot \varepsilon$, o que implica que $y_2 - y_1 < \varepsilon \cdot (x_2 - x_1)$ e, como ε é tão pequeno quanto se queira conclui-se que $y_2 - y_1$ é menor do que qualquer quantidade dada. Portanto, $y_2 - y_1 = 0$ e $y_2 = y_1$.

Dessa maneira, percebamos que embora o conceito de limite tenha sido trabalhado de maneira retórica, Sturm tem utilizado, em suas argumentações, desigualdades e um valor ε , como uma quantidade tão pequena quanto se queira, não se limitando apenas a aplicar o conceito de forma retórica, mas tratando o conceito com elementos de algebrização.

No início da quarta lição, Sturm declara a necessidade de se estabelecer noções sobre séries para que possa ser realizado o estudo da diferenciação das funções transcendentais.

⁷⁹ Ainsi la dérivée d'une fonction d'une variable est le quotient de la différentielle de la fonction par la différentielle de la variable. C'est pourquoi on appelle aussi la dérivée rapport différentiel ou quotient différentiel.

Nesse contexto, as primeiras noções de séries são definidas da seguinte maneira:

Uma série é uma sequência formada por um número infinito de termos todos eles vinculados por uma lei específica. Representamos por S_n a soma dos n primeiros termos de uma série. Assim, $u_1, u_2, \dots, u_n$ designam termos sucessivos da série, desde o primeiro, definimos:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

Se a partir de um valor de n suficientemente grande, S_n se aproximar indefinidamente de um limite finito e determinado, quando n é cada vez maior, dizemos que a série é convergente, e o limite S para o qual ela tende é chamado soma da série. A diferença $S - S_n$ que designamos por R_n , é chamado de resto da série. Temos então, por definição:

$$R_n = S - S_n, \text{ ou } S = S_n + R_n$$

Se a soma dos n primeiros termos não se aproximar indefinidamente de um limite fixo, quando n aumentar indefinidamente, a série é divergente.⁸⁰ (STURM, 1863, p.40, TRADUÇÃO NOSSA)

Cabe ressaltarmos que a definição de série apresentada por Sturm é bastante próxima da definição apresentada por Cauchy, inclusive com as mesmas notações:

Chama-se série a uma sequência indefinida de quantidades $u_0, u_1, u_2, \dots$ que derivam uma das outras segundo uma lei determinada. Essas quantidades são, elas próprias, os diferentes termos da série que se considera. Seja $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$ a soma dos n primeiros termos, n designando um número inteiro qualquer. Se, para valores de n sempre crescentes, a soma s_n aproximar-se indefinidamente de um certo limite s , a série será dita *convergente*, e o limite em questão será chamado a soma da *série*. Do contrário, se, quando n aumenta indefinidamente, a soma s_n não se aproximar de nenhum limite fixo, a série será divergente.

(SCHUBRING & ROQUE, 2016, p. 83)

Por outro lado, novamente, a utilização do conceito de limite segue uma linha apenas retórica. A série geométrica é o exemplo apresentado após a definição. Afirma-se que a soma dos n primeiros termos da série $a, ak, ak^2, \dots, a^{k-1}, \dots$ é dada por:

⁸⁰ Une série est une suite composée d'un nombre infini de termes formés tous d'après une loi déterminée. On représente ordinairement par S_n la somme des n premiers termes d'une série. Ainsi, $u_1, u_2, \dots, u_n$ désignant divers termes successifs de la série, à partir du premier, on pose:

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

Si, à partir d'une valeur de n suffisamment grande, S_n approche indéfiniment d'une limite finie et déterminée, quand on prend n de plus en plus grand, on dit que la série est convergente, et la limite S vers laquelle elle tend est appelée la somme de la série. La différence $S - S_n$, que l'on désigne par R_n , se nomme le reste de la série. On a donc, par définition, $R_n = S - S_n$, ou $S = S_n + R_n$

Si la somme des n premiers termes n'approche pas indéfiniment d'une limite fixe, quand n augmente indéfiniment, la série est divergente.

$$S_n = a + ak + ak^2 + \dots + a^{k-1} = \frac{a \cdot (1 - k^n)}{1 - k} = \frac{a}{1 - k} - \frac{ak^n}{1 - k}$$

E logo a seguir, afirma-se ainda que, como a razão k é menor que a unidade, $\frac{ak^n}{1-k}$ pode ser tão pequena quanto se queira chegando-se à $S_n = \frac{a}{1-k}$.

O restante da lição é dedicado aos teoremas sobre a convergência das séries. Inicialmente, são feitas algumas considerações acerca de condições para a convergência de uma determinada série. A primeira delas estabelece que, uma condição necessária e suficiente para que uma série seja convergente é que a soma de um número qualquer de termos seja tão pequeno quanto se queira.

Sturm utiliza a soma dos termos de uma progressão geométrica na demonstração de vários resultados. “*Comparando-se uma série com uma progressão geométrica, somos levados aos seguintes teoremas*”⁸¹ (STURM, 1863, p.42, TRADUÇÃO NOSSA)

Os teoremas em questão enunciam critérios para a convergência de séries. O primeiro teorema afirma que, se em uma série com termos positivos, é verdade que, a partir de um determinado termo, a razão entre um termo qualquer o seu antecessor é menor que um determinado número k , que por sua vez é menor que a unidade, então a série é convergente.

Com respeito às séries que possuem termos negativos a partir de um dado termo, prova-se ainda que uma série é convergente quando os seus termos distantes são alternadamente positivos e negativos, e decrescem indefinidamente.

Nesse ponto, Sturm apresenta um subitem intitulado, “*Estudos de algumas séries*”⁸² a qual analisa a convergência de séries em função dos valores que a variável x pode assumir, ou seja, a análise realizada é a da convergência de séries de funções.

Schubring (2005) ressalta que “*Cauchy subitamente, sem preparação prévia, muda de séries de números e quantidades para séries de funções*”⁸³ (SCHUBRING, 2005, p.469, TRADUÇÃO NOSSA), sem introduzir sinais adaptados para tais séries.

Assim, notemos que semelhante à Cauchy, Sturm faz uma brusca mudança, no tratamento das séries. Após a demonstração desses teoremas, é analisada a convergência de diversas séries, com base nos resultados já demonstrados.

⁸¹ En comparant une série à une progression géométrique, on est conduit aux théorèmes suivants.

⁸² Étude de quelques séries

⁸³ Cauchy suddenly, without further preparation, shifts from series of numbers and quantities to series of functions.

A partir da vigésima sétima lição a obra trata a respeito do Cálculo Integral. A noção de integral é inicialmente estabelecida por meio da noção de anti-diferenciação.

Dessa forma, afirma-se que dada uma função uma de uma variável, pode-se sempre considerá-la como derivada de uma outra função desconhecida. Logo, dada uma função $f(x)$ sempre existirá uma outra função que tenha por diferencial $f(x)dx$.

A integral de $f(x)dx$ é definida como a função que tem $f(x)dx$ como diferencial, e denotada por $\int f(x)dx$.

Sturm salienta que as operações de diferenciação e de integração são duas operações inversas de forma que os símbolos d e $\int$, se destroem mutuamente, ou seja, $d \int f(x)dx = f(x)dx$ e $\int d\varphi(x) = \varphi(x)$

Após tais considerações, Sturm constrói uma tabela de integrais de várias funções e efetua demonstrações simples a partir das propriedades das diferenciais.

Posteriormente, na trigésima primeira lição são tecidas as considerações acerca do estudo das integrais definidas. Assim, a partir de uma função $\varphi(x)$ que possui $f(x)dx$ como diferencial, define-se $\varphi(x) + C$, como a integral indefinida de $f(x)dx$:

$$\int f(x)dx = \varphi(x) + C$$

Impondo a condição de que a integral deve ser nula para um valor particular a , segue que $C = -\varphi(a)$.

Repara-se ainda que ao atribuímos a x um valor particular b , o valor $\varphi(b) - \varphi(a)$ está completamente definido.

Desta maneira, define-se $\varphi(b) - \varphi(a)$ como a integral definida de $f(x)dx$ entre os limites de a e b , ou de $x = a$ até $x = b$, denotado por:

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

Daí, é associada a integral definida com a noção da área sob uma curva, considerando que $f(x)dx$ é a diferencial da área de um segmento a uma ordenada variável, Sturm conclui, baseado apenas nesse argumento, que o valor de $\int_a^b f(x)dx$

é valor da área entre a curva $f(x)$, o eixo-x e as duas ordenadas geradas por $x = a$ e $x = b$.

Após o trabalho com alguns exemplos específicos, a noção de integral definida é redefinida como limite de somas.

Assim, dada $f(x)$ contínua e finita entre $x = a$ e $x = b$, a integral definida $\int_a^b f(x)dx$ será o limite da soma dos valores infinitamente pequenos da diferencial $f(x)dx$, quando x varia forma insensível de $x = a$ até $x = b$.

Ilustrando tal resultado, Sturm, admite que $f(x)$ cresce constantemente de $f(a)$ até $f(b)$, e considera já visto que a área sob uma curva é igual ao limite da soma de infinitos retângulos, sendo tal resultado demonstrado de maneira analítica. Assim, demonstra-se que:

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)dx = \lim \sum [f(x)\Delta x] = \sum [f(x)dx]$$

Nesse ponto, cabe ressaltar que a abordagem ao conceito de integral definida, dada por Sturm, é completamente diferente da abordagem proposta por Cauchy em seu trabalho de 1823.

Assim, Gispert (1982) ressalta que:

Em sua demonstração em 1823, Cauchy supôs *implicitamente* a continuidade uniforme da função em um intervalo para provar a existência do limite das somas de Riemann quando o passo tende a zero, continuidade uniforme que será demonstrada rigorosamente em 1872 por Heine.⁸⁴ (GISPERT, 1982, p.22, TRADUÇÃO NOSSA)

Schubring (2005), salienta a importância da noção de integral definida, apresentada por Cauchy.

Cauchy, entretanto, foi o primeiro a erguer o conceito de integral definida para uma posição de privilegiada noção fundamental, e o primeiro a fazer de forma abrangente o conceito e a existência da integral como um tema próprio de pesquisa matemática em seu livro-

⁸⁴ Dans sa démonstration en 1823, Cauchy supposait *implicitement* la continuité uniforme de la fonction sur un intervalle pour prouver l'existence d'une limite des sommes dites de Riemann lorsque le pas tend vers 0, continuité uniforme qui ne sera démontrée rigoureusement qu'en 1872 par Heine.

texto de 1823. Esse foi o lugar o qual a integral definida foi introduzida como soma de quantidades infinitamente pequenas.⁸⁵
(SCHUBRING, 2005, p.32, TRADUÇÃO NOSSA)

Dessa forma, vemos que diferentemente de Cauchy, Sturm não posicionou o conceito de integral definida como elemento central em sua teoria das integrais.

Por outro lado, notemos que a abordagem no tratamento das séries parece ser apresentado em consonância com o desenvolvimento estabelecido por Cauchy. Assim, podemos entender que o conceito de convergência apresentado por Sturm é revestido por princípios similares já apresentados por Cauchy.

Por fim, temos visto que Sturm apresenta aos leitores dois métodos, a saber, o método dos limites e o método infinitesimal. Contudo, temos notado que a maioria de seu cálculo apresenta-se mais próximo do chamado método dos limites, apesar das quantidades infinitamente pequenas serem usadas em variados pontos do texto.

3.3 Análise da Obra de Boucharlat

Jean-Louis Boucharlat (1775-1848), não foi uma figura central na matemática francesa, embora tenha sido vinculado à École Polytechnique como “*répétiteur*”.

Além de ter tido vínculo com a École Polytechnique, sabe-se que foi professor da École Militaire de la Flèche. Além disso, segundo a apresentação contida em sua própria obra foi membro das Academias Reais de Boudeaux, de Lyon, de Marseille, de Rouen, de Toulouse, d’Orléans, de Dijon, de Caen e de Nancy.

Nessa seção analisaremos a quinta edição da obra “*Éléments de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral*” a qual alcançou nove edições, várias delas encontradas no Brasil.

Logo no prefácio, Boucharlat deixa claro seu posicionamento quanto aos métodos dos limites, dos infinitamente pequenos e de Lagrange.

Nessa visão, o método dos infinitamente pequenos é considerada como uma “abreviação” do método dos limites. “(..) *método dos infinitamente pequenos, método*

⁸⁵ Cauchy, however, was the first to raise the concept of the definite integral to the rank of a privileged fundamental notion, and the first to comprehensively make the concept and the existence of the integral a subject proper of mathematical research in his textbook of 1823. This is where the definite integral was introduced as a sum of infinitely small quantities.

que pode ser visto como uma espécie de abreviação do método dos limites”⁸⁶.(BOUCHARLAT, 1858, vj, TRADUÇÃO NOSSA)

Assim, especifica Boucharlat, o método dos infinitamente pequenos não é mais que uma forma específica de encontrar as diferenciais das diversas funções, de maneira que, o seu uso tornaria-se indispensável à áreas como mecânica e astronomia, cujos problemas seriam de difícil resolução sem lançar mão do referido método.

Dessa forma, continua-se salientando as vantagens de uso do método, uma vez que, parece ter um rigor matemático decorrendo naturalmente de um princípio fundamental.

A visão expressa por Boucharlat fecha o ciclo, ao argumentar que, assim como o método dos limites completa o método dos infinitamente pequenos, o método de Lagrange completa o método dos limites, relacionando os coeficientes diferenciais à pura álgebra. Consolidando sua concepção, Bouchalat deixa evidente sua percepção de que os métodos, além de serem complementares, são concernentes a um mesmo processo, guiados pelos mesmos princípios.

Podemos então considerar esses três métodos como sendo somente um. Além disso, comparando-os, reconhecemos que os princípios que emanam deles são comuns, e que devemos, para entendimento de todos, ajuntar poucas coisas para os limites.⁸⁷
(BOUCHARLAT, 1858, viij, TRADUÇÃO NOSSA)

A primeira definição apresentada por Boucharlat é a de função. Uma função é definida como uma variável que é função de outra variável, quando a primeira é igual a uma expressão analítica composta pela segunda. Notemos aqui que o conceito de variável sequer é definido.

Após apresentar tal definição Boucharlat lembra que toda função de variável x pode ser representada pela ordenada de uma curva, com abscissa x . Dessa forma, se a abscissa x sofre um acréscimo de h convencionam-se que a ordenada de $x + h$ será y' . A partir daí é apresentado um procedimento para encontrar a expressão dada por y' , a saber, por meio da substituição de $x + h$ por x e y' por y na equação da curva.

⁸⁶ (...)méthode des infiniment petits, méthode qui peut être regardée comme une espèce d'abréviation de celle des limites

⁸⁷ On peut donc considérer ces trois méthodes comme n'en formant pour ainsi dire qu'une seule; aussi, en les comparant, reconnait-on que les principes qui en découlent leur sont communs, et qu'il ne faut, pour les entendre toutes, qu'ajouter très peu de chose à celle des limites.

No exemplo apresentado, $y = x^3$ gera $y' = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3$. Após isso é analisada a relação $\frac{y'-y}{h}$, como a razão entre o acréscimo da função com respeito à variável x . Afirmar-se que, quando h torna-se zero, a relação $\frac{y'-y}{h}$, sendo $y = x^3$, se reduz a $3x^2$, por meio da simples substituição de h por 0 no segundo termo da igualdade $\frac{y'-y}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2$. Boucharlat conclui então que $3x^2$ é o limite da razão $\frac{y'-y}{h}$ quando h é diminuído.

Reparemos que Boucharlat trata a noção de limite, sem sequer definir tal conceito, efetuando apenas uma mera substituição da variável por um determinado número.

Boucharlat salienta que a equação $\frac{0}{0} = 3x^2$ não é absurda, visto que a relação $\frac{0}{0}$ pode representar toda sorte de quantidades. É argumentado ainda que uma fração não muda de valor quando multiplicamos seus termos pela mesma quantidade. Nessa linha de raciocínio, a pequenez dos termos da fração continuam sem alterar seu valor e se tornam nulos quando alcançam o “último grau de pequenez”.

Define-se então a relação $\frac{0}{0}$ como $\frac{dy}{dx}$. Nesse ponto, no que diz respeito ao trabalho com a relação $\frac{0}{0}$, vale ressaltarmos uma semelhança percebida com o texto de Saturnino, que trabalha com a mesma relação tendo um valor a ela assignável. Cabe-nos ainda apontar uma possível influência das idéias de Euler que, em última análise, entendia o Cálculo diferencial como um cálculo com zeros.

Vários outros exemplos de diferenciação são apresentados utilizando o mesmo procedimento, a saber, substitui-se x por $x + h$ (ou por $x - h$ quando o acréscimo da variável for negativo) e após descobrir o termo que corresponde a $\frac{y'-y}{h}$ iguala-se h a 0, encontrando-se então o chamado coeficiente diferencial.

Ressaltemos que Boucharlat chama tal substituição (h por 0) de passar ao limite, ou seja, podemos dizer que a aplicação do conceito de limite para Boucharlat corresponde a simples substituição de h por 0.

Boucharlat passa a usar a notação $y = fx$ e salienta que sendo, por exemplo $y = A$, tem-se $y' = A + Bh + Ch^2 + Dh^3 + etc$, fazendo-se a troca de x por $x + h$. Assim, temos:

$$\frac{y' - y}{h} = B + Ch + etc$$

Nas palavras de Bouchalat, “passando ao limite tem-se”

$$\frac{dy}{dx} = B$$

É concluído que, o coeficiente diferencial é igual ao coeficiente do termo que contém a primeira potência de h no desenvolvimento de $f(x + h)$, ordenado com relação as potências ascendentes de h . Fica claro que para Bouchalat não existe distinção entre $f(x + h)$ e y' .

Para encontrar a diferencial do produto de duas funções, Bouchalat efetua o procedimento da substituição de x por $x + h$ em duas funções y e z :

$$y' = y + Ah + Bh^2 + etc ...$$

$$z' = z + A'h + B'h^2 + etc...$$

Assim, “Passando-se ao limite” tem-se: $\frac{dy}{dx} = A$ e $\frac{dz}{dx} = A'$

Multiplicam-se as equações anteriores chegando em:

$$\frac{z'y' - zy}{h} = Az + A'y + (Bz + AA' + B'y)h + etc$$

Passa-se novamente ao limite e:

$$\frac{d.zy}{dx} = Az + A'y = \frac{dy}{dx} \cdot z + \frac{dz}{dx} \cdot y$$

Cabe observarmos que, embora Bouchalat tenha ressaltado a busca pela diferencial do produto de duas funções, doravante ele passa a tratá-las como variáveis.

“Assim, para encontrar a diferencial do produto de duas variáveis, devemos multiplicar cada uma pela diferencial da outra e adicionarmos os produtos”⁸⁸. (BOUCHARLAT, 1838, p. 9)

Inicialmente, Bouchalat continua fundamentando o seu cálculo diferencial no método dos limites, principalmente por meio do procedimento de “passagem ao limite”. Por outro lado, em uma seção posterior, Bouchalat passa a fundamentar o seu cálculo diferencial tendo por base o método dos infinitamente pequenos. A ideia fundamental

⁸⁸ Ainsi, pour trouver la différentielle d'un produit de deux variables, il faut multiplier chacune par la différentielle de l'autre, et ajouter les produits.

do método consiste no fato de que se temos $x + a$ e x torna-se infinito, então pode-se suprimir a . Assim, a é considerado infinitamente pequeno com relação à x .

Dessa forma, após a apresentação de proposições acerca da noção de infinitamente pequeno de várias ordens, explica-se a teoria da diferenciação tendo como base o método dos infinitamente pequenos.

Nesse sentido, a partir de uma função $f(x)$ dada e de um acréscimo infinitamente pequeno dx da variável x , de forma que x se torne em $x + dx$, a diferencial da função $f(x)$ é definida como a diferença entre o novo e o primeiro estado.

Assim, nessa linha de raciocínio, as diferenciais das várias funções poderão ser encontradas por meio do desenvolvimento da diferença expressa por $f(x + dx) - f(x)$ e posterior desprezamento das quantidades infinitamente pequenas de ordem superior.

Enfim, o problema das tangentes e o cálculo da diferencial de um arco também são tratados sob o ponto de vista do método dos infinitamente pequenos.

A teoria referente ao método de Lagrange é desenvolvida e, em seguida, o leitor é orientado a obter as diferenciais por meio do desenvolvimento da função $f(x + h)$ em série, observando os respectivos coeficientes.

Portanto, vemos que Boucharlat expressou sua concepção, inicialmente apresentando os resultados de seu cálculo diferencial fundamentados no método dos limites. Após esse momento, em capítulos posteriores, Boucharlat procurou fundamentar os principais resultados do cálculo diferencial por meio dos métodos dos infinitamente pequenos e de Lagrange. Fortalecendo, dessa forma, sua concepção de que os três métodos podem ser visto como um único.

Em termos do cálculo integral, Boucharlat o fundamenta por meio da relação de antidiferenciação, procurando a função que produz a diferencial indicada. Posteriormente são apresentadas as técnicas de integração, equações diferenciais, cálculo das diferenças e os princípios básicos do cálculo das variações.

Por fim, lembremos que o livro de Boucharlat foi bastante utilizado na França, traduzido em várias línguas e reeditado nove vezes, sendo a primeira edição em 1813 e, segundo Zerner (1986), foi reeditado mesmo nos anos de 1920.

Registremos ainda que encontramos várias obras de Boucharlat no Brasil, constituindo-se como um ponto de acumulação, com diversas edições, da quinta edição até a nona.

4. A Análise na Escola Politécnica do Rio de Janeiro.

*“Qual dos dous methods deve servir de base ao Cálculo
Diferencial? O dos Limites ou o dos Infinitamente- Pequenos.”*
João Ernesto Viriato de Medeiros, 1850

Nesse capítulo pretendemos delinear e estudar como se deu o ensino do Cálculo tanto na Escola Politécnica do Rio de Janeiro quanto nas Instituições que a precederam, Academia Real Militar, Escola Central e Escola Militar.

O ensino superior no Brasil esteve longe de ser uma realidade durante grande parte do Brasil Colônia. Num período caracterizado pelo extrativismo e monopólios de produtos comercializados pela metrópole, a criação de instituições de ensino superior na colônia não era vista com bons olhos, sendo completamente desincentivada, ou mesmo tolida, pela Coroa Portuguesa.

No entanto, o cenário é bruscamente modificado com a vinda da Família Real para o Brasil, em 1808. Assim, tornou-se necessário implementar mínimas condições de infra-estrutura para abrigar um contingente de, aproximadamente, 15 mil pessoas que chegariam à cidade do Rio de Janeiro, bem como adequar esta ao novo status de sede do Império Português.

Nesse contexto, surgem as primeiras instituições de ensino superior fundadas pelos portugueses no Brasil Colônia, em geral, diretamente vinculadas às atividades militares decorrentes da ocupação portuguesa e também de sua defesa. Em particular, destaca-se a criação da Academia Real Militar, em 1810.

4.1 Academia Real Militar e primeiros sinais de atividades matemáticas no Brasil a partir de 1808

A Academia Real Militar, fundada pela lei de 4 de dezembro de 1810, assinada pelo príncipe regente, tinha por objetivo ministrar na colônia um curso completo de ciências matemáticas, das ciências de observação, ou seja, da química, da física, da mineralogia, da metalurgia, além das ciências militares em toda a sua extensão, tanto de tática quanto de fortificação e artilharia. Assim, deveriam ser formados oficiais de artilharia e engenharia, bem como oficiais engenheiros geógrafos e topógrafos.

Na prática, o ensino da Academia abrangia um curso teórico de Ciências Matemáticas, Físicas e Naturais e um curso de Engenharia e Ciências Militares.

A Academia era dirigida por uma junta militar e o curso completo para os futuros “Officiaes Engenheiros e de Artilharia” tinha a duração de sete anos, composto por um “Curso Mathematico” de quatro anos e de um “Curso militar” de três anos.

O primeiro ano do curso possuía um caráter propedêutico, considerando-se o fato da quase inexistência do ensino secundário; o segundo, terceiro e quarto anos eram compostos pelas disciplinas básicas de ensino superior; e nos três últimos anos as disciplinas aplicadas militares e de engenharia.

A carta régia apresenta um detalhamento de vários aspectos relativos ao funcionamento da Academia. O ano letivo era de nove meses, entre os meses de abril e dezembro, ficando o mês de janeiro dedicado à aplicação dos exames. As aulas tinham a duração de noventa minutos, sendo especificado que, os primeiros quarenta e cinco minutos deveriam ser dedicados à explicação do respectivo professor, e os minutos restantes reservados à arguição de alguns alunos acerca de tópicos relativos à aula anterior.

Destaquemos também a realização de exercícios práticos, previstos no Título VII da carta régia, sendo os lentes obrigados a sair à campo com seus estudantes.

Os lentes serão obrigados a sahir a campo com os seus discípulos, para os exercitar na pratica das operações que nas aulas lhes ensinam; e assim o Lente da geometria lhes fará conhecer o uso dos instrumentos, e a practica, medindo distancias e alturas inacessiveis, nivelando terrenos e tirando planos; enquanto os de fortificação e artilharia lhes mostrarão todos os exercicios praticos das sciencias que explicam.
(BRASIL, 1810, TITULO VIII)

Telles (1994) salienta a existência da obrigatoriedade para que os oficiais de engenharia e artilharia fizessem o curso completo, sendo os de infantaria e cavalaria obrigados a fazer o primeiro ano do curso matemático e o primeiro ano do curso militar. No entanto, em qualquer caso, o aproveitamento nos cursos contava para as promoções.

O funcionamento efetivo da Academia Real Militar iniciou-se em 23 de abril de 1811, com 72 alunos matriculados no primeiro ano e outros alunos matriculados nos demais anos, possivelmente provenientes da Academia fundada em 1792. As aulas foram iniciadas em algumas salas na *Casa do Trem*, que também sediou a antiga *Academia de Artilharia, Fortificação e Desenho*. Apesar de não estar completamente

concluída, a histórica sede localizada no Largo de São Francisco já abrigou as aulas da Academia, a partir do ano letivo de 1812.

Dessa forma, com o estabelecimento da Academia, podemos visualizar a criação do Curso Matemático como a introdução da Matemática Superior no Brasil. A riqueza de detalhes contidas na Carta de Lei de 4 de dezembro nos informam as cadeiras, os conteúdos a serem ministrados em cada ano, o número de lentes responsáveis pelos respectivos anos letivos e ainda os livros que deveriam ser utilizados em cada uma das cadeiras. A nomeação dos lentes se deu de maneira oficial, por meio do Decreto de 11 de março de 1811.

No primeiro ano do curso deveriam ser ensinados, segundo a carta régia, aritmética, álgebra (até as equações de 3º e de 4º graus), geometria, trigonometria retilínea, noções de trigonometria esférica e desenho, indicando que, de fato, as cadeiras iniciais do curso tinham um propósito de fornecer uma melhor fundamentação matemática para estudantes que, possivelmente, não a tinham obtido em seus estudos anteriores. Nesse intento, a própria carta régia faz menção à matemáticos célebres e aos autores dos livros-textos que deveriam ser adotados.

E como os estudantes não serão admittidos pela Junta Militar sem saberem as quatro operações da Arithmetica, o Lente ensinará logo a Algebra, cingindo-se do celebre Euler nos seus excellentes elementos da mesma sciencia, debaixo de cujos principios e da arithmetica e algebra de la Croix, formará o compêndio para o seu curso, e depois explicará a excellente geometria e trigonometria rectilinea de le Gendre (...)

(BRASIL, 1810, TITULO II)

O Lente Antônio José do Amaral foi nomeado para ser o responsável pelo ensino das cadeiras relativas ao primeiro ano. Os livros adotados foram os de Lacroix, Legendre e Delambre.

Os conteúdos relativos ao Cálculo Diferencial e Integral deveriam ser ensinados no segundo ano de curso, juntamente com a álgebra superior (resolução de equações), geometria analítica, geometria descritiva e desenho. O Lente responsável pelo ensino das referidas disciplinas foi Francisco Cordeiro da Silva Torres.

No que tange ao ensino do Cálculo, a carta régia especifica que o livro-texto utilizado seria o *Cálculo Diferencial e Integral*, de Lacroix, salientando ainda que novos métodos e inovações deveriam ser acrescentadas ao curso. “O Lente deverá formar o seu compendio debaixo dos principios de algebra, calculo differencial e integral de la

Croix, e terá cuidado de ir adicionando todos os methodos e novas descobertas que possam ir fazendo-se.” (BRASIL, 1810, TITULO II)

Os conceitos relacionados com a física aparecem fortemente nos tópicos a serem ensinados aos alunos matriculados no terceiro ano de curso, tendo como Lente responsável o Tenente José Saturnino da Costa Pereira. Nessa fase do curso deveriam ser ministrados os conteúdos relacionados à mecânica (estática e dinâmica), hidráulica (hidrostática e hidrodinâmica), balística e desenho.

No quarto ano de curso deveriam ser estudados, além dos conceitos de física, astronomia, cartas geográficas e geografia terrestre, geodésia, desenho e toda a trigonometria esférica, tendo como Lente responsável o Capitão Manoel Ferreira de Araújo Guimarães.

Conforme já colocado, os conteúdos a serem ministrados nos três últimos anos de curso eram voltados principalmente à formação militar e, mais especificamente, procuravam promover o conhecimento necessário para construção de pontes, estradas, canais, portos, fortificações, etc.

Cabe-nos registrar a existência de estudos que apontam várias dificuldades no processo de implantação da Academia Real Militar. Telles (1994) traz a fala do professor Paulo Pardal destacando que o ambicioso programa da Academia era de difícil implantação, por um lado devido à carência de professores, livros e laboratórios e, por outro lado, considerando a dificuldade de permanência dos professores, visto que era frequente a convocação dos mesmos para o desempenho de cargos públicos, a serviço do Governo.

Sad (2011) aponta, ainda, alguns fatores que, possivelmente, dificultaram a consolidação da Academia:

Pode-se apontar como entraves: a instabilidade na fixação local de alunos e lentes com as campanhas militares intensivas, a insatisfação dos lentes com baixos soldos e os atrasos em receber, a dificuldade com poucos e apropriados materiais didáticos além das muitas reprovações dos alunos nos dois primeiros anos, chegando ao terceiro ano em pequeno número. (SAD, 2011, p.51-52)

Os primeiros lentes foram indicados na própria carta régia. No entanto, a primeira lista de docentes sofre variação com a necessidade de contratação de professores substitutos. Dentro dessa configuração, Sad (2011) traz um quadro relativo aos primeiros lentes da Academia Real Militar.

Quadro 4: Primeiros Lentes da Academia Real Militar

	Lentes	Matéria de Ensino
1º Ano	Antônio José do Amaral (brasileiro)	Matemática
2º Ano	Francisco Cordeiro da Silva Torres (português) José Victorino dos Santos e Souza (brasileiro) João José de Souza (brasileiro)	Matemática Geometria Descritiva Desenho
3º Ano	José Saturnino da Costa Pereira (brasileiro) João José de Souza (brasileiro)	Matemática Desenho
4º Ano	Manoel Ferreira de Araújo Guimarães (brasileiro) Luís Antônio da Costa Barradas (português) João José de Souza (brasileiro)	Matemática Física Desenho
5º Ano	João de Souza Pacheco Leitão (português) Daniel Gardner (inglês)	Tática e fortificação Química
6º Ano	Salvador José Maciel (brasileiro) José da Costa Azevedo (brasileiro)	Tática e Estratégias Militares Mineralogia
7º Ano	Manoel da Costa Pinto (português) José da Costa Azevedo (brasileiro)	Artilharia História Natural

Fonte: Sad (2011)

As primeiras atividades matemáticas no Brasil após a institucionalização do ensino da matemática superior tiveram como protagonistas alguns dos lentes da recém-criada academia.

Vemos, em particular, que o primeiro professor de cálculo na Academia Real Militar foi o Sargento Francisco Cordeiro da Silva Torres, que veio a ser o tradutor da maioria das obras de Lacroix utilizadas na Academia, a saber, *Tratado de Aritmética*, *Elementos de Álgebra* e o *Cálculo Diferencial e Integral*.

A atuação dos lentes não esteve restrita à sala de aula, uma vez que, em sua maioria, eram oficiais do exército, sendo ainda frequentemente solicitados para trabalharem em órgãos governamentais. Na esfera acadêmica desempenharam importante papel na tradução de obras clássicas adotadas e na elaboração de novos compêndios. Nesse contexto, no que tange aos livros-textos de matemática, destacamos o trabalho realizado pelos professores, Manoel Ferreira de Araújo Guimarães (1777-1838), Francisco Cordeiro da Silva Torres e José Saturnino da Costa Pereira.

Salientamos, ainda, a atuação de Manuel Ferreira de Araújo Guimarães como um dos personagens principais desses processos de tradução. Enquanto ainda era estudante na Universidade de Coimbra, traduziu “*O Curso Elementar e Completo de Matemáticas Puras*”, de Lacaille em 1800, “*Explicação da Formação e Uso das Tábuas Logarítmicas*”, de Legendre, também em 1800, e “*Tratado Elementar de Análise Matemática*”, de Cousin em 1802.

Já em solo brasileiro, Guimarães traduziu e publicou os seguintes livros:

Elementos de Geometria, de Legendre em 1809; *Elementos de Álgebra* – postos em linguagem para uso dos alunos da Academia Real Militar do Rio de Janeiro, de Euler; *Tratado de Trigonometria* por Legendre, em 1809 e *Álgebra para a Geometria de Lacroix*, em 1821. (SILVA, 1996, p.54)

Por outro lado, além do papel principal exercido como tradutor, Manuel Araújo Guimarães também destaca-se por ter escrito o primeiro opúsculo sobre um tema de matemática no Brasil, em 1812, denominado “*A Variação dos Triângulos Esféricos*”.

Silva (1996), após a análise do artigo redigido por Guimarães, identifica claramente a influência do trabalho de Legendre sobre a escrita de seu artigo.

É visível a influência de Legendre no estilo de Guimarães. Nesse artigo, o autor introduz a ideia de diferencial nos triângulos esféricos. Utiliza algumas relações trigonométricas já conhecidas, extraídas da obra de **Legendre** (Trigonometria) e, considerando alguns ângulos ou lados como variáveis e outros como constantes, procura determinar as diferenciais das medidas dos ângulos e lados do triângulo, interpretando essas diferenciais como incrementos ou decrementos das medidas desses ângulos e lados. Quando se fala em medidas dos lados, é bom lembrar, conforme **Legendre** salienta, na introdução de seu tratado de Trigonometria, que quando se trata de triângulos esféricos, não se considera a grandeza absoluta dos lados, mas somente o número de graus que eles contém.
(SILVA, 1996, p.55, GRIFO NOSSO)

Silva visualiza também uma possível influência do Cálculo Diferencial escrito por Lacroix sobre o texto de Guimarães.

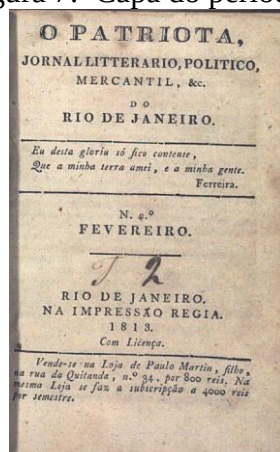
Guimarães foi, provavelmente, fortemente influenciado por Lacroix, autor de quem ele também traduziu obras, conforme já citado. Esta influência pode ser observada na sua refutação aos infinitésimos, da mesma forma que Lacroix, e na linguagem de coeficientes diferenciais para as derivadas.
(SILVA, 1996, p.56)

Dessa forma, ressaltamos a preocupação de Manuel Araújo Guimarães em divulgar resultados matemáticos, seja por sua atuação como tradutor e escritor ou por ter fundado, no Rio de Janeiro, o periódico “*O Patriota*”, justificando que na “*Gazeta*”⁸⁹ não havia espaço suficiente para toda a produção brasileira.

⁸⁹ Único jornal a circular no Rio de Janeiro na ocasião

Em um dos primeiros volumes do “*O Patriota*” foi publicado um importante texto, pelo menos no que se refere à atividade matemática no Brasil, “*Entre todos os sólidos de igual superfície, achar o que tem máximo volume*” escrito pelo Lente da Academia Real Militar, José Saturnino da Costa Pereira.

Figura 7: Capa do periódico



Com relação ao trabalho publicado por Saturnino, D’Ambrósio salienta que “*nesse trabalho, o autor trata do difícil problema isoperimétrico do sólido de maior volume. Embora sem aportar resultados novos, seu autor revela conhecimento de matemática avançada e familiaridade com literatura atualizada*” (D’AMBRÓSIO, 2008, p.48)

Castro (1992) indica a existência da obra “*Memória de Trigonometria*” a qual teria sido apresentada por João dos Santos Barreto (1778-1864) à Academia Militar em 1814, mas somente publicada em 1823 na Tipografia Nacional. Com respeito ao conteúdo da obra, Castro complementa:

[...] o autor deriva as principais fórmulas da trigonometria esférica, como se faz atualmente, a partir das hoje denominadas “fórmulas fundamentais da trigonometria esférica”, as quais demonstra diretamente para o caso geral e adverte, no prefácio, que Bezout, Lacaille, Lalande e o próprio Legendre não haviam seguido na marcha. Como nos demais trabalhos da época, suas fórmulas ainda se apresentam inutilmente complicadas com a introdução das “linhas trigonométricas” e o raio da esfera. (CASTRO, 1992, p.31)

O trabalho desenvolvido por José Saturnino da Costa Pereira não se destacou apenas pela tradução do *Tratado Elementar de Mecânica*, de Francoeur, mas pelas

diversas obras escritas, sobre variados temas e assuntos, para utilização na Academia Real Militar, conforme destaca Telles(1994).

O tenente, e mais tarde brigadeiro, José Saturnino da Costa Pereira, foi, depois, o autor de uma verdadeira maratona intelectual, ao escrever, até 1845, uma série de livros didáticos sobre Álgebra, Geometria, Cálculo Diferencial e Integral, Trigonometria Esférica, Mecânica, Astronomia, Geodésia e talvez outros.

(TELLES, 1994, p.99)

Em tempo, salientemos que a obra *Elementos de Cálculo Diferencial e de Cálculo Integral segundo o sistema de Lacroix, para uso da Escola Militar*, elaborada por Saturnino é um dos objetos de estudo da presente tese.

Nesse sentido, podemos inferir que as traduções dos textos de matemática para o português, tiveram importante papel no tocante às primeiras atividades matemáticas no Brasil no início do século XIX.

4.1.1 Primeiros registros das aulas de Cálculo Diferencial na Academia Real Militar: pequena análise de um manuscrito.

O artigo tecido por Sad (2011) traz uma análise de manuscritos⁹⁰ compilados pelo ex-aluno e ex-professor da Academia Real Militar, Manoel José de Oliveira (1788-1838), a partir de suas próprias notas de aulas e de outros alunos, localizados na Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro.

Os manuscritos estão armazenados em três diferentes pastas. A primeira delas referente à localização I-47,10,2, intitulado “*Caderno de demonstrações imaginadas e problemas resolvidos*” é constituído por notas de aula e pela resolução de diversos problemas relacionados com a astronomia, contendo inclusive diversos cálculos envolvendo trigonometria. Já o manuscrito referente à localização I-47,12,1 contém uma série de problemas voltados à física matemática e ótica.⁹¹

Assim, no contexto do presente trabalho, o manuscrito de localização I-47,6,6 intitulado “*Mathematicas puras: anotações*” constitui-se como uma importante fonte, uma vez que contém anotações específicas acerca do cálculo diferencial.

⁹⁰ Os documentos estão situados na seção de manuscritos da Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro sob às localizações I-47,10,2; I-47,12,1; I-47,6,6.

⁹¹ Devemos salientar que somente o manuscrito intitulado “*Mathematicas puras: anotações*” deverá ser analisado na presente tese.

Figura 8: Primeira página do manuscrito [BNRJ 1]

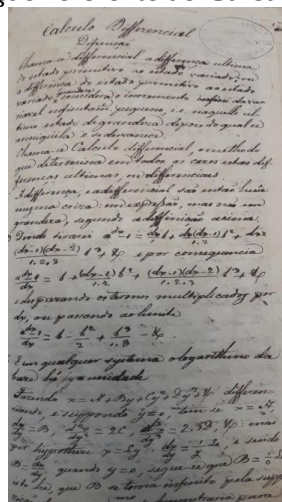


Dessa maneira, o referido manuscrito consiste um importante registro que nos permite, de alguma forma, pensar em reconstituições de como aconteceram as primeiras aulas de cálculo diferencial e integral em solo brasileiro.

Nesse contexto, procuraremos desenvolver nessa seção tanto uma descrição dos aspectos contidos no manuscrito, quanto uma análise qualitativa de alguns desses mesmos aspectos.

O manuscrito é composto por aproximadamente cinquenta páginas, sendo quatro delas, escritas em frente e verso, dedicadas especificamente ao Cálculo Diferencial e outras páginas destinadas à trigonometria, geometria analítica e a resolução de problemas, alguns deles relativos ao Cálculo Diferencial.

Figura 9: Primeira página da seção referente ao Cálculo Diferencial [BNRJ 1]



Fonte: Acervo da Fundação Biblioteca Nacional - Brasil

A seção do manuscrito referente ao cálculo é intitulada como “Calculo Differential” e nas primeiras linhas são expressas a definição de diferencial e a conceituação de cálculo diferencial.

Chama-se differencial a differença ultima do estado primitivo ao estado variado, ou a differença do estado primitivo ao estado variado, quando se considera o incremento da variavel infinitamente pequena, i.é, naquelle ultimo estado de grandeza depois do qual se anniquila e se desvanece.

Chama-se Calculo Differencial, o methodo que determina em todos os cazos estas differenças ultimas, ou differenciaes.

(Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro, I-47,6,6)

Devemos notar que a concepção registrada aproxima-se da formulação estabelecida por Newton, não sendo exposta da mesma maneira que Lacroix.

Por outro lado, todos os outros trechos do referido manuscrito parecem ser diretamente vinculados com o Tratado Elementar de Lacroix, adotado como livro-texto de cálculo diferencial e integral por várias décadas.

A partir da definição de diferencial e a concepção de cálculo diferencial expressadas nas primeiras linhas do manuscrito, todos os trechos são iniciados por números e, logo em seguida, são tecidos comentários. Paralelamente, notemos que o próprio texto de Lacroix também é organizado por meio de numerações, seguidas por explicações.

Assim, quando comparamos os trechos contidos no manuscrito com os respectivos trechos de mesma numeração no livro-texto de Lacroix, percebemos que, muito provavelmente, existe uma forte relação entre eles, de forma que, podemos conjecturar que os registros contidos no manuscrito tratam-se de explicações acerca dos respectivos parágrafos do Tratado Elementar de Lacroix.

Por exemplo, no parágrafo 5 do tratado de Lacroix explora-se a relação entre a diferencial e o coeficiente diferencial de uma função definindo-se o cálculo diferencial como “(...) a indagação do limite das relações dos augmentos simultaneos de huma função, e da variavel de que ella depende” (LACROIX, 1812, p.5). Por sua vez, no comentário contido no manuscrito consta que “a differença e a differencial são então huma mezma coiza: em expressão, mas não em grandeza, segundo a definição acima” (Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro, I-47,6,6)

Podemos imaginar que após o estudo das relações estabelecidas entre a diferencial e o coeficiente diferencial, tenha existido uma reflexão acerca da relação entre a diferença e a diferencial, conforme o registrado no manuscrito.

A relação entre o manuscrito e o tratado de Lacroix parece ficar mais evidente quando comparamos o parágrafo 23 do texto de Lacroix com a respectiva indicação no

manuscrito. Assim, no estudo da diferenciação das funções transcendentais, mais especificamente da função exponencial $u = a^x$, chega-se na expressão:

$$a^{dx} - 1 = \frac{dx}{1}b + \frac{dx(dx-1)}{1 \cdot 2}b^2 + \frac{dx(dx-1)(dx-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}b^3 + \&c.$$

Assim, após ordenar-se relativamente à dx , chega-se à:

$$a^{dx} - 1 = dx \left(\frac{b}{1} - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \&c. \right) + \&c.$$

Cabe-nos então observar a transcrição do trecho do manuscrito:

Donde tirarei que

$$a^{dx} - 1 = \frac{dx}{1}b + \frac{dx(dx-1)}{1 \cdot 2}b^2 + \frac{dx(dx-1)(dx-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}b^3 + \&c \quad \text{e, por}$$

consequência $\frac{a^{dx}-1}{dx} = b + \frac{(dx-1)}{1 \cdot 2}b^2 + \frac{(dx-1)(dx-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}b^3 + \&c \quad \text{e}$

desprezando os termos multiplicador por dx , ou passando ao limite

$$\frac{a^{dx}-1}{dx} = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \&c$$

(Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro, I-47,6,6)

De fato, ao compararmos os respectivos trechos, não fica difícil perceber que o trecho registrado no manuscrito tem o mesmo ponto de partida e de chegada que o tratado de Lacroix, mas apresentando passos intermediários. Notemos ainda que o manuscrito aponta passos que não estão explicitados no texto de Lacroix, como, por exemplo, o processo de passar ao limite uma determinada expressão. Assim, diante disso, podemos inferir que o trecho contido no referido trecho do manuscrito trata possivelmente de um registro que buscava explicar melhor determinados pontos do livro-texto, provavelmente a partir da ministração das aulas na Academia Real Militar.

Dessa forma, ao percebermos a relação entre o Tratado e a referida fonte, podemos conjecturar que as anotações do manuscrito são compostas por uma coleção de detalhamentos acerca de tópicos específicos constantes no Tratado Elementar de Lacroix.

No parágrafo 28, Lacroix argumenta que se $x = \mathcal{L}y$, com a suposição de $y = 0$, então o logaritmo não poderia ser desenvolvido na forma $x = A + By + Cy^2 + Dy^3 + \&c$. “*Isso mesmo he facil de se reconhecer a priori; observando que a função x vem a ser infinita quando $y=0$* ” (LACROIX, 1812,p.30)

Notemos que, enquanto Lacroix afirma que “*he facil de se reconhecer a priori*” são tecidas anotações do manuscrito buscando uma melhor fundamentação para tal conclusão.

Nesse sentido, Manoel José de Oliveira registra que se $x = A + By + Cy^2 + Dy^3 + \dots$ e $y = 0$ então após a diferenciação de x , tem-se $x = A$, $\frac{dy}{dx} = B$, $\frac{d^2y}{dx^2} = 2C$, $\frac{d^3y}{dx^3} = 2 \cdot 3D$. Por outro lado, sendo $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{y} \mathcal{L}e$ segue que $B = \frac{1}{0} \mathcal{L}e$. Assim, com a suposição de que $y = 0$ conclui-se que “*B se torna infinito*”. Daí, segundo o registro, o mesmo raciocínio e a mesma conclusão pode ser obtida para os coeficientes $C, D, E, \dots$ “*o que mostra que não podemos ter o logarithimo expresso em potencias do numero*” (Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro, I-47,6,6)

Percebamos que o texto expresso no manuscrito nos indica que, nesse primeiro momento, a recepção dos conceitos do cálculo por meio do Tratado de Lacroix faziam uso livre do zero no denominador, uma vez que o coeficiente B está designado como $B = \frac{1}{0} \mathcal{L}e$, sendo concluído que “*B torna-se infinito*”.

No entanto, devemos salientar que, por um lado, Lacroix não possuía a prática do chamado “cálculo com zeros” e, por outro lado, a simbolização de logaritmos por meio da notação $\mathcal{L}$ (o símbolo usual era l) não era usual. A partir desses fatos, entendemos que, possivelmente, tais práticas eram oriundas de outra tradição já estabelecida anteriormente.

Assim, surgem então microquestões. Que tradição teria sido esta? Qual teria sido o livro-texto base dessa tradição? Até esse ponto não temos respostas para essas questões, mas certamente são questões a serem estudadas posteriormente.

A diferenciação das funções transcendentais, continua a ser um assunto tratado sendo trabalhado no parágrafo 32, com um breve comentário tecido no contexto do trabalho com a diferenciação da função seno.

No ponto 41, relacionado a diferenciação de equações de duas variáveis, Manoel José de Oliveira tece um comentário acerca das possíveis intenções do autor, quando o estuda-se a equação $y^2 - 2mxy + x^2 - a^2 = 0$. “*Parece que afim do Autor he mostrar que tanto faz differenciar a equação e substituir depois pela incognita os seus valores, como resolver a equação, e differencia-la depois e concluir finalm^e que o coefficiente differencial tem tantos valores q^{tos} tem a variavel na equação primitiva*” (Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro, I-47,6,6)

São tecidos ainda pequenos comentários acerca do parágrafo 47, vinculados com os máximos e mínimos de funções de uma variável

Na seção 53, após afirmar que para obter o verdadeiro valor de uma função, que se torna em $\frac{0}{0}$ é necessário diferenciar o numerador e o denominador, Lacroix usa como exemplo a fórmula $\frac{x^n-1}{x-1}$ que exprime a soma dos n primeiros termos da chamada progressão por quocientes, ou seja, da progressão $1 : x : x^2 : x^3 : \&c.$. Assim, salienta-se que a fórmula vem a ser $\frac{0}{0}$ quando $x = 1$ e que ao serem efetuadas as diferenciações no numerador e no denominador deve ser concluído que a soma é n .

O registro contido no manuscrito, por sua vez, procura especificar e detalhar a origem da fórmula expressa por $\frac{x^n-1}{x-1}$. De início, afirma-se que “*em huma progressão por quocientes a soma dos antecedentes he para a soma dos consequentes como um antecedente para o seu consequente*” (Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro, I-47,6,6).

Assim, seguindo o raciocínio, tem-se que $s - x^{n-1} : s - 1 :: 1 : x$, donde, $sx - x^n = s - 1$. Daí, conclui-se que $s = \frac{x^n-1}{x-1}$

Em seguida são tecidos mais comentários a respeito dos cálculos envolvendo derivadas das funções exponenciais, referindo-se aos parágrafos 24 e 25 de Lacroix, argumentando que $a^x = 1 + \frac{\mathcal{L}x}{1} + \frac{1\mathcal{L}^2x^2}{1\cdot 2} + \&c$, que $\mathcal{L} = \frac{\mathcal{L}a}{\mathcal{L}e}$ e, consequentemente sendo $a^x = 1 + \frac{\mathcal{L}a x}{1} + \frac{(\mathcal{L}a)^2x^2}{1\cdot 2} + \frac{(\mathcal{L}a)^3x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \&c$ e $b^x = 1 + \frac{\mathcal{L}b x}{1} + \frac{(\mathcal{L}b)^2x^2}{1\cdot 2} + \frac{(\mathcal{L}b)^3x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \&c$ pode-se concluir que $\frac{a^x-b^x}{x} = \mathcal{L}a - \mathcal{L}b + \frac{(\mathcal{L}a)^2-(\mathcal{L}b)^2}{1\cdot 2} + \&c$

O comentário seguinte volta a tratar das expressões que podem se tornar em $\frac{0}{0}$, referindo-se ao parágrafo 52. Nesse sentido, a argumentação registrada no manuscrito cita que ao aplicar o que já foi visto à fração $\frac{\wp(x-a)^m}{\wp(x-a)^n}$ ver-se-á que ao diferenciar muitas vezes sucessivamente o numerador e o denominador, eles ficarão desembaraçados do termo $(x - a)$.

Ainda nesse mesmo tema é tecido um comentário referente à regra contida no parágrafo 56.

A seguir no parágrafo 58 volta a comentar-se acerca de aspectos da diferenciação da função exponencial, lembrando que $e^{n\mathcal{L}x} = x^n$ e daí resultando que $x^n = e^{n\mathcal{L}x} = a^x = 1 + \frac{n\mathcal{L}x}{1} + \frac{n^2(\mathcal{L}x)^2}{1\cdot 2} + \frac{n^3(\mathcal{L}x)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \&c$

Ao final, são trazidas considerações acerca das aplicações do cálculo diferencial à teoria das curvas com comentários relacionados aos parágrafos 73, 92, 93, 99, 101, 102.

O último comentário no manuscrito vincula-se com o processo de diferenciação das funções de duas variáveis, mais especificamente, trazendo comentário acerca do parágrafo 121.

Diante do exposto, cabe-nos ressaltar que estamos diante de um dos mais antigos registros, que potencialmente nos permitem inferir de que maneira as aulas de cálculo diferencial eram direcionadas, nos primeiros anos de ensino de matemática superior no Brasil, ou mais especificamente, nos primeiros anos de funcionamento da Academia Real Militar.

Nesse sentido, os aspectos presentes na análise realizada se tornam relevantes, uma vez que, configuram como elementos de um dos primeiros registros de recepção dos conceitos do cálculo, no contexto das aulas ministradas na Academia Real Militar.

Nessa linha destacamos a existência de muitos comentários relacionados, de alguma maneira, com o processo de diferenciação das funções transcendentais, em particular da função exponencial. Tal aspecto pode ser compreendido melhor quando percebemos que os outros trechos desse manuscrito, além de outros manuscritos, tratam, em sua maioria, de assuntos relacionados com trigonometria, astronomia e física matemática. Assim, não é de se espantar quando vemos a ênfase no trabalho com a função exponencial, em um ambiente em que a matemática é usada primordialmente como aplicação.

Notamos também em vários momentos a preocupação na busca de expressar uma função y na forma $y = A + Bx + Cx^2 + \dots$.

Destaquemos ainda uma gama de comentários acerca do estudo das funções que podem tornar-se em $\frac{0}{0}$. Em tempo, devemos citar a boa quantidade de comentários envolvendo a aplicação do cálculo diferencial à teoria das curvas, envolvendo tópicos como as curvas osculatrizes, curvas transcendentais, estudo da cicloide, etc.

Por fim, entendendo que os registros contidos no manuscrito expressam, de alguma forma, o que se deu nas primeiras aulas da Academia Real Militar, podemos inferir, à luz da análise realizada, que os tópicos destacados abaixo foram efetivamente ensinados nas aulas de cálculo diferencial nos primeiros anos da Academia Real Militar.

- Cálculos envolvendo o processo de diferenciação das funções transcendentais, principalmente das funções exponenciais;
- Expressar funções por meio do desenvolvimento em séries;
- Estudo das funções que podem tornar-se em $0/0$;
- Aplicação do cálculo diferencial à teoria das curvas.

4.2 Desdobramentos da Academia Real Militar

A partir da independência do Brasil e com o passar dos anos a Academia Real Militar passou por várias reformas tendo, inclusive, o próprio nome mudado por algumas vezes. Após a independência a Academia passou a ser denominada Academia Imperial Militar. Logo a seguir, em outubro de 1823, foi emitido um decreto que permitia a matrícula de alunos civis, não mais obrigados a estarem vinculados ao exército.

Telles (1994) chama a atenção de que a primeira tentativa de ensino da engenharia civil independente da militar se deu por uma lei de 1831, que propunha a anexação da Academia da Marinha, ficando o novo instituto com o nome de Academia Militar da Corte, propondo ainda que, além dos cursos militares, fossem estabelecidos os cursos de Matemáticas, Pontes e Calçadas e de Construção Naval (que acabou por não concretizar-se).

Assim, segundo Telles (1994), por esse regulamento, o título de engenheiro geógrafo seria dado após a conclusão dos quatro anos de curso matemático e prática de observatório, de engenheiro militar, com os três primeiros anos do curso matemático e dois do curso militar e, de engenheiro de pontes e calçadas, com os três do curso matemático e dois com matérias específicas da engenharia civil.

As cadeiras de matemática foram lecionadas nos dois primeiros anos do curso matemático, sendo o cálculo diferencial ensinado no segundo ano e somente trigonometria esférica ensinada no quarto ano. Martines (2014), nos traz uma tabela com as disciplinas a serem ministradas na Academia Militar da Corte, com a reforma de 1832.

Quadro 5: Lista de Disciplinas do Curso Matemático da Academia Militar da Corte, 1832

Ano	Conteúdo
Primeiro Ano Primeira Cadeira	Aritmética, Álgebra até a composição de equações; Geometria; Trigonometria, não compreendida a composição das tábuas das linhas trigonométricas; Desenho de paisagem
Segundo Ano Primeira Cadeira	Continuação de Álgebra; Aplicação da Álgebra à Geometria; Cálculo Diferencial e Integral; Construção de Táboas Trigonométricas; Método das Variações e Interpolações
Segundo Ano Segunda Cadeira	Geometria Descritiva com aplicação do Cálculo Algébrico em três dias na semana. Nos outros dois dias desenhos de paisagem.
Terceiro Ano Primeira Cadeira	Mecânica (Estática, Dinâmica, Hidrostática e teórica – Construção e resistência das abobodas).
Terceiro Ano Segunda Cadeira	Princípios Gerais da Física; Teoria dos “Flui-Electrico e Magnético”, e do vapor considerado como motor nas máquinas; Química e Mineralogia aplicadas à substâncias que se empregam na construção de Obras de Arquitetura Civil, Militar, Hidráulica e Naval, e a Pirotecnia.
Quarto Ano Primeira Cadeira	Trigonometria Esférica; Optica; Astronomia e suas aplicações à Geodésia, Topografia e Navegação.
Quarto Ano Segunda Cadeira	Tática e Manobra Naval; Aplicação de Artilharia à Marinha; Organização de uma derrota pela estima; Aplicação da Mecânica ao Aparelho e Arqueação.

Fonte: Martines (2014)

Assim, devemos notar que não houve mudança significativa no que se refere às disciplinas de matemática.

A reforma de 1832 incorporou a Academia dos Guardas Marinhas à Academia Militar da Côrte. Entretanto, logo no ano seguinte é instituído o decreto de 22 de

outubro de 1833 tornando a separar a Academia da Marinha da Academia Militar da Corte, ou seja, na prática, tornou-se sem efeito o decreto de 1832.

Dessa forma, as disciplinas de matemática continuaram a estar concentradas nos primeiros dois anos de estudos, conforme nos mostra Martines (2014).

Quadro 6: Lista de Disciplinas dos primeiros anos da Academia Militar da Corte, 1833

Ano	Conteúdo
Primeiro Ano Primeiro tempo	Aritmética, geometria, álgebra até a composição de equações, e trigonometria plana com o uso de taboas logarítmicas dos números, e das linhas trigonométricas;
Primeiro Ano Segundo Tempo	Desenho (paisagem) Desenho Geométrico
Segundo Ano Primeiro Tempo	O resto da álgebra, aplicação da álgebra à geometria; Cálculo Diferencial e Integral e elementos de estática e dinâmica
Segundo Ano Segundo Tempo	Geometria Descritiva; Desenho (acidentes do terreno, segundo as convenções militares)

Fonte: Martines (2014)

No entanto, com a reforma estabelecida após o decreto de janeiro de 1839, houve um recuo no sentido de admitir alunos civis e a Academia voltou a ser um estabelecimento exclusivamente militar, tendo sido extinto o curso de Pontes e Calçadas, passando a escola a ser chamada de Escola Militar da Corte.

Devemos notar que foram feitas sucessivas reformas (algumas delas com bastante profundidade) na Academia nos anos de 1831, 1832, 1833, 1835, 1837 e 1839. Nesse ponto, Telles (1994) argumenta que as sucessivas reformas foram, em grande parte, tentativas de conciliar dois universos completamente diferentes, o ensino militar e o ensino de engenharia.

Por outro lado, Miller (2003) pontua que a demanda de profissionais da área de engenharia civil era grande, devido a grande quantidade de obras em torno da construção de fábricas, portos e estradas. Assim, no sentido de atender a tal demanda, os cursos foram reformulados por meio do Decreto nº 140 de março de 1842 sendo criadas disciplinas com perfil ligado à engenharia civil.

Na distribuição das disciplinas, novamente as relacionadas à matemática continuaram localizadas nos dois primeiros anos de estudos, com o Cálculo Diferencial e Integral sendo ensinado no segundo ano.

Quadro 7: Lista de Disciplinas dos primeiros anos da Academia Militar da Corte, 1842

Ano	Conteúdo
Primeiro Ano Primeira cadeira	Aritmética, Álgebra Elementar, Geometria e Trigonometria Plana.
Primeiro Ano Segunda Cadeira	Desenho
Segundo Ano Primeira Cadeira	Álgebra Superior. Geometria Analítica e Cálculo Diferencial e Integral.
Segundo Ano Segunda Cadeira	Desenho

Fonte: Martines (2014)

O decreto de 1842 também instituiu os títulos de Bacharel e Doutor em Ciências Físicas e Naturais, os quais foram os primeiros títulos de nível superior na área de engenharia inteiramente desvinculados de caráter militar.

Mormello (2010) após analisar as mudanças curriculares, observa que todos os currículos desse período, referentes às disciplinas matemáticas, com exceção de 1839, são bem parecidos com o de 1810, concluindo que *“no balanço final do período, podemos afirmar que ao final dessa fase de seis reformas, as matemáticas mantiveram a sua base de disciplinas”* (MORMELLO, 2010, p.116)

Quadro8: Características das Reformas do período de 1831 a 1850

Principais Características das Reformas do período de 1831 a 1850			
Ano, Ministro da Guerra e Denominação da Academia	Características,	Currículo	Comando da Academia
1832 Manuel da Fonseca Lima e Silva Academia Militar e de Marinha	União da Imperial Militar Academia com a Academia de Guardas Marinhas Criação dos Cursos de Pontes e Calçadas e de Construção Naval	Mantém a semelhança com o de 1810 (exceto pelo conteúdo de Marinha)	Congregação de Lentes, sob a direção do lente mais antigo

1833 Brigadeiro Antero José Ferreira de Brito Academia Militar do Império do Brasil	Militarização e Regime Disciplinar	Mantém a semelhança com o de 1810	Oficial General
1835 Brigadeiro João Paulo dos Santos Barreto Academia Militar do Império do Brasil	Retorno aos estatutos de 1832. Anulam-se em parte os avanços no sentido da militarização.	Mantém a semelhança com o de 1810	Um lente, escolhido pelo Governo em lista tríplice
1839 Sebastião do Rego Barros Escola Militar	Militarização Ensino Técnico- Profissional Modelo Francês	Reduz-se o currículo científico e passa-se a um currículo profissional	Comandante tirado da classe dos oficiais gerais
1842 José Clemente Pereira Mantém-se o nome de Escola Militar	Volta o modelo científico e praticamente anulam- se as mudanças no sentido da militarização	Mantém a semelhança com o de 1810	Diretor (oficial de patente superior ou oficial general)
1845 General Jerônimo Francisco Coelho Mantém-se o nome de Escola Militar	Instituição dos títulos de Bacharel e Doutor. Manutenção do regime escolar de 1842, pouco militarizado.	Mantém a semelhança com o de 1810	Diretor (oficial de patente superior ou oficial general)

Fonte: Mormelo (2010)

Nesse sentido, Mormelo (2010) visualiza uma certa estabilidade no currículo, uma vez que a estrutura dos programas de disciplinas se manteve basicamente a mesma, particularmente com bastante semelhança à de 1810.

4.2.1 Primeiros Doutorados em Matemática no Brasil

Com o decreto de 10 de março de 1842 é instituído o título de Doutor em Ciências Matemáticas.

Os alumnos que se mostrarem aprovados plenamente em todos os sete annos do Curso completo da Escola Militar, e se habilitarem pela fôrma que for determinada nas Instrucções, ou Regulamento do Governo, receberão o Grão de Doutor em Sciencias Mathematicas, e só os que o obtiverem poderão ser oppositores aos lugares de substitutos. Os Lentes e Substitutos actuaes receberão o referido Grão sem outra alguma habilitação que o título de suas nomeações.

(BRASIL, 1842, p.195,196, apud MARTINES, 2014, p.38)

A regulamentação e as condições para obtenção do grau de Doutor foram especificadas na publicação de 29 de setembro de 1846. Assim, ficou estabelecido que para receber o título de Bacharel em Matemáticas o estudante deveria ser aprovado nas matérias do sétimo ano da Escola Militar.

Os bacharéis em matemática que pretendessem obter o grau de Doutor deveriam fazer uma requisição ao diretor da escola, entregar uma certidão que comprovasse aprovação em todas as matérias ensinadas na escola e ter passado em todos os exames preparatórios exigidos nos estatutos.

Devemos chamar atenção de que o regulamento deixa claro que a dissertação de Doutorado não será avaliada por meio de um julgamento acerca do mérito científico, mas por meio da verificação da não existência de algum aspecto que deslustrasse a escola ou que ofendesse as leis e/ou qualquer indivíduo.

Assim, para obter o grau de Doutor o estudante deveria preparar uma dissertação de Doutorado, sobre qualquer ponto da Ciência Matemática, dos mais profundos e dos que são ensinados nos últimos três anos.

Dessa forma, conforme aponta Martines (2014), não era necessário expor nas dissertações algo inédito, bastava apresentar uma dissertação sobre um tema relativo ao curso de engenheiro, ou seja, não devemos esperar encontrar temas e/ou abordagens originais nas teses apresentadas.

Por outro lado, sabemos que o Tratado Elementar de Lacroix foi o livro-texto utilizado na Academia Real Militar por muitos anos. Conforme já explicitamos, foi usado até, pelo menos, o ano de 1842. No entanto, após esse período pouco se sabe sobre os livros-textos usados nas aulas de cálculo.

Dessa maneira, uma vez que, por um extenso período não se sabe quais foram os livros-textos adotados, entendemos que a análise mais detalhada das teses apresentadas pode configurar-se como importante elemento na tentativa de visualização dos conceitos que eram efetivamente ensinados.

Nesse sentido, temos o entendimento que as teses podem revelar, de alguma maneira, aspectos presentes na prática comum na Escola Militar e nas instituições que a sucederam.

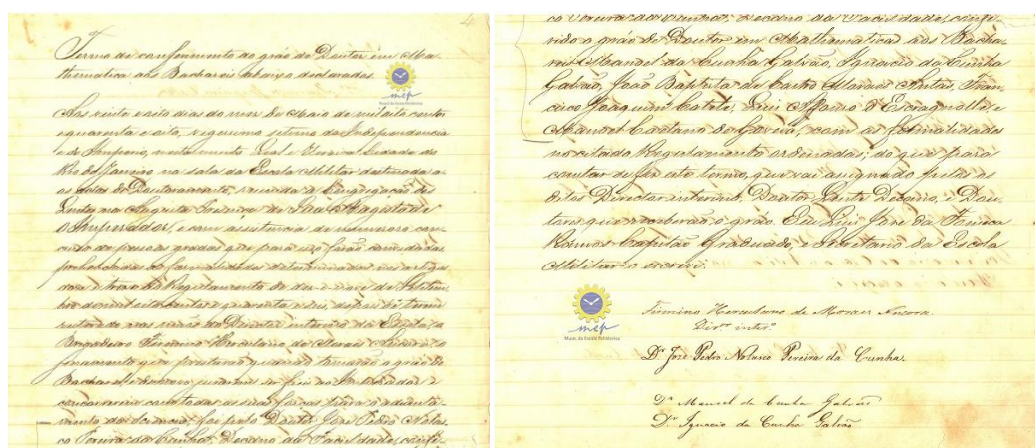
As primeiras dissertações de Doutorado começaram a ser entregues no final do ano de 1847.

Martines (2014) apresenta uma análise específica em sua Tese de Doutorado acerca das seis primeiras obras de doutoramento apresentadas na Escola Militar. Assim

como Miller (2003) já havia apontado, Martines (2014) confirma que, ao contrário do que é apontado na historiografia, a primeira tese de Doutorado em Ciências Matemáticas no Brasil não foi apresentada por Joaquim Gomes de Souza, o “Souzinha”, uma vez que, seis outras dissertações de doutorado foram defendidas anteriormente.

Em sua pesquisa, Martines (2014) apresenta o termo de conferimento do grau de Doutor, localizado no acervo do Museu da Escola Politécnica do Rio de Janeiro, que atesta o nome dos primeiros seis bacharéis que obtiveram o grau de Doutor em Matemática no Brasil. O documento além de conter o nome dos primeiros doutores registra que os graus foram conferidos na presença do imperador, conforme podemos confirmar na transcrição do documento.

Figura 10: Termo de Conferimento do Grau de Doutor



Fonte: Martines (2014)

Termo de Conferimento de gráo de Doutor em Mathematica aos Bachareis abaixo declarados.

Aos vinte e oito dias do mês de Maio de mil oitocentos e quarenta e oito, vigesimo setimo da Independencia e do Imperio, nesta muito Leal e Eroica cidade do Rio de Janeiro na sala da Escola Militar destinada aos actos de Doutoramento, reunida a Congregação dos Lentes na Augusta Presença de Sua Magestade o Imperador, e com assistencia de numeros concurso de pessoas gradas que para isso farão convidadas prehenchidas as formalidades determinadas nos artigos doze e treze do Regulamento de dez-e-nove de Setembro de mil oitocentos e quarenta e seis, depois de terem reiteradi nas mãos do Diretor interino da Escola, o Brigadeiro Firmino Herculano de Moraes Ancora, o juramento que prestarão quando tomarão o gráo de Bacharel, e denovo jurarem ser fieis ao Imperador e concorrerem com todas as suas forças para o adiantamento da Sciencias, foi feito Doutor Jose Pedro Nolasco Pereira da Cunha, Decano da Faculdade, conferido o gráo de Doutor em Mathematicas aos Bachareis Manuel da Cunha Galvão, Ignacio da Cunha Galvão, João Baptista de Castro

Moraes Antas, Francisco Joaquim Catête, Luiz Affonso d’Escragnolle e Manoel Caetano de Gouvêa, com as formalidades no citado Regulamento ordenadas; do que para constar se fez este termo, que vai assignado pelas as ditas Diretor interino, Doutor Lente Decano, e Doutores que receberão o grão. Eu Luis Jose da Fonseca Ramos Capitão Graduado, e Secretario da Escola Militar o escrevi.

Francisco Herculano de Moraes Ancora

Diretor Interino

Dr Jose Pedro Nolasco Pereira da Cunha

Dr Manuel da Cunha Galvão

Dr Ignacio da Cunha Galvão

Dr João Baptista de Castro Moraes Antas

Dr Francisco Joaquim Catête

(MARTINES, 2014,p.49-50)

Assim, constata-se por meio da referida documentação que a primeira dissertação de Doutorado apresentada no Brasil não foi de Souza, mas de Manuel da Cunha Galvão, sendo a lista dos seis primeiros Doutores em Matemática no Brasil, conforme a tabela abaixo:

Quadro 9: Primeiras Dissertações de Doutorado apresentadas à Escola Militar

Data	Autor
22/12/1847	Manuel da Cunha Galvão
01/02/1848	Ignacio da Cunha Galvão
05/02/1848	João Baptista de Castro Moraes Antas
03/03/1848	Francisco Joaquim Catête
06/03/1848	Luiz Affonso d’Escragnolle
06/04/1848	Manoel Caetano de Gouvêa Junior

Fonte: Martines (2014)

Uma vez que o tema a ser abordado nas dissertações deveria ser escolhido dentre qualquer assunto da ciência matemática abordado nos últimos três anos de curso, os assuntos abordados nas primeiras dissertações foram variados, sendo a maioria deles voltados a astronomia e matemática.

De fato, no universo das seis primeiras dissertações, duas delas tiveram temas diretamente ligados com a astronomia. Manuel da Cunha Galvão elaborou a dissertação intitulada “O Systema Planetario”. Em sua análise sobre o trabalho concebido por Galvão, Martines (2014) infere que “(...) observamos que Galvão estava atento às novidades na área de Astronomia, pois apresenta um fato ocorrido na França e que repercutiu no meio científico da época” (MARTINES, 2014, p.81) A sexta dissertação

defendida por Luiz Affonso d'Escagnolle cujo título foi “*Algumas Considerações sobre a Lua*” também versou sobre a Astronomia.

Das seis primeiras dissertações defendidas, três delas versaram sobre temas da matemática. João Baptista de Castro Moraes Antas, defendeu a dissertação “*A Theoria Mathematica das Probabilidades*” , apresentando os princípios básicos e resolvendo problemas acerca da teoria das probabilidades de maneira didática, conforma aponta Martines (2014).

As dissertações defendidas por Ignacio da Cunha Galvão e Francisco Joaquim Catête, intituladas respectivamente como “As Superfícies Envoltórias” e “Sobre a Curva Caustica” também versaram sobre tópicos da matemática. Martines (2014) pontua que o trabalho de Ignacio Galvão sobre as envoltórias é abordado fazendo forte uso da intuição e que Francisco Catête mostra habilidade no trabalho com as equações diferenciais, embora não coloque definições, em seu trabalho sobre as curvas causticas.

Dessa forma, vemos que, de fato, as primeiras dissertações de doutorado defendidas no Brasil versavam principalmente sobre temas relacionados a Astronomia e Matemática. Sintetizando, Martines (2014) avalia que “*a matemática apresentada nas dissertações é boa e coerente com o que na época estava sendo desenvolvido*” (MARTINES, 2014,p.155)

No tocante às dissertações de Doutorado defendidas na Escola Militar, Miller (2003) apresenta uma análise das dissertações referentes ao período de 1850 à 1857. Nesse período, foram defendidas 13 dissertações. Os temas das dissertações, em sua maioria, giram em torno de temas relacionados com a física e com a matemática.

Em termos da distribuição das dissertações defendidas com relação aos respectivos anos de defesa, Miller (2003) chama atenção para o fato de que o ano de 1855 revelou-se um ano com bastante produção, uma vez que, houve uma grande concentração de defesas no referido ano, conforme podemos perceber facilmente observando o quadro abaixo.

Quadro 10: Número de Teses defendidas na Escola Militar por ano, no período de 1848 à 1857

Ano	Número de Teses
1848	7
1849	4

1850	2
1851	1
1852	(nenhuma)
1853	1
1854	1
1855	8
1856	(nenhuma)
1857	1

Fonte: Miller (2003)

Assim, entendemos que dentro do contexto da Escola Militar a análise das dissertações defendidas podem nos apresentar um pequeno retrato do entendimento e das concepções matemáticas dos atores envolvidos à época.

Em particular, devemos chamar a atenção para duas dissertações, “*O Methodo dos Limites e dos Infinitamente Pequenos*” defendido por João Ernesto Viriato de Medeiros, em 1850, e o “*Estudo dos Princípios do Cálculo Diferencial*” defendida em 1853, por Manoel Maria Pinto Peixoto.

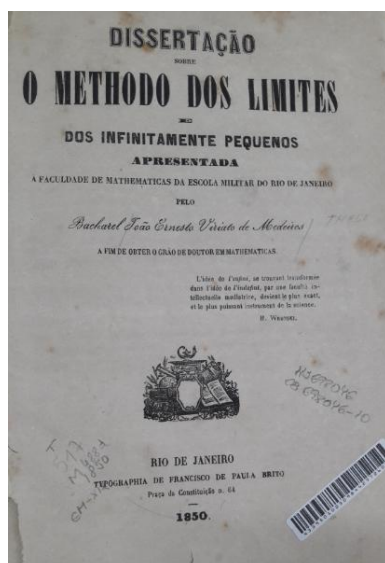
Nessa linha de raciocínio esperamos, por meio da análise das referidas teses, buscar elementos que nos permitam revelar quais eram as concepções matemáticas envolvidas em todo esse contexto.

4.2.1.1 Análise das Dissertações

Conforme já explicitado, faremos nessa secção uma análise de duas dissertações para obtenção do grau de Doutor, no intuito de buscarmos elementos que nos permitam compreender quais eram as concepções referentes aos conceitos básicos do cálculo.

A dissertação “*O Methodo dos Limites e dos Infinitamente Pequenos*” foi defendida por João Ernesto Viriato de Medeiros, no ano de 1850. A análise foi realizada por meio da consulta ao exemplar que se encontra na Biblioteca de Obras Raras da UFRJ.

Figura 11: Primeira Página da Dissertação apresentada por João Ernesto Viriato de Medeiros



Fonte: Acervo da Biblioteca de Obras Raras da UFRJ

Conforme veremos adiante, Medeiros efetua críticas às abordagens elaboradas por Boucharlat, Newton, Lacroix e Carnot mostrando certa familiaridade com tais obras, indicando, de alguma maneira, a influência exercida pelos respectivos autores no processo de transmissão dos conceitos do cálculo para o Brasil.

Logo de início, Viriato de Medeiros deixa claro que a dissertação foi tecida na busca da resposta pela seguinte questão: Qual método deve seguir como base ao Calculo Diferencial, o método dos limites ou o dos infinitamente pequenos?

Nas considerações iniciais são tecidos comentários acerca do desenvolvimento da ciência, em particular da matemática, onde são citados, por exemplo, o trabalho de Wallis, o métodos de tangentes concebidos por Barrow e Fermat, além de considerações específicas direcionadas aos conceitos estabelecidos por Leibniz e Newton.

Na visão de Medeiros, Leibniz foi o primeiro a estabelecer as regras para o cálculo diferencial e publicá-las, fundamentando-se nas quantidades infinitamente pequenas. Newton, por sua vez, apropriou o movimento à descrição das curvas, concebendo o cálculo das fluxões.

Dessa forma, a partir das ideias concebidas por Newton e Leibniz, Medeiros entende que os autores de livros-textos de cálculo passaram a posicionar-se em um, ou outro extremo, da dualidade Newton/Leibniz, ou seja, em sua visão, alguns autores

adotaram estritamente o método idealizado por Newton, enquanto outros utilizaram as ideias de Leibniz, também de maneira estrita.

Nesse sentido, Medeiros parece entender que a referida dualidade gerou outra oposição. De um lado, de acordo com esse entendimento, o cálculo fluxional passou a ser entendido como o método dos limites e, por outro lado, as ideias de Leibniz consolidadas por meio do método dos infinitamente pequenos.

As notações empregadas por Leibniz, e a idéa primordial de Newton, para achar as relações entre a fluxão da ordenada e sua abscissa, tem sido empregadas por alguns autores para basearem o Calculo Differential; concebendo estas relações como primeiras e últimas razões das quantidades ou seus limites: outros porém seguem à risca as genuinas idéas de Leibniz.

Em saber qual dos dous methodos, si o dos Limites, ou dos Infinitamente-Pequenos, contém a verdadeira metaphysica do Calculo Differential, é que existe controversia e os Mathematicos se acham ainda hoje divididos em duas seitas, não obstante ser o segundo methodo, quase exclusivamente usado, nas Mathematicas applicadas.

(MEDEIROS, 1850, p.4)

Assim, o autor segue apresentando sua visão no tocante aos dois métodos.

No tocante ao método dos limites, partindo da função $y = f(x)$ e considerando os aumentos designados por Δy e Δx chega-se na clássica relação dada por $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Nesse ponto, Medeiros argumenta que o limite da relação do aumento da função para o da variável será obtido quando o aumento dado à variável for nulificado, ou seja, quando $\Delta x = 0$. Assim, sob esta hipótese tem-se $\Delta y = 0$ e, portanto, chega-se à seguinte identidade:

$$\frac{0}{0} = \frac{f(x+0)-f(x)}{0} = \frac{f(x)-f(x)}{0} = \frac{0}{0}$$

Daí, segundo Medeiros, $\frac{0}{0}$ deve ser substituído por $\frac{dy}{dx}$ para indicar a relação dos aumentos quando é atingido o limite zero.

Medeiros especifica que tal raciocínio serve de base para diferenciação de todas as funções. A seguir é apresentado um exemplo mais específico, no intuito de alcançar melhor compreensão. Parte-se então da função $y = 6a^5x^2 + 30$ e supondo que quando x varia para $x + h$, y sofre variação para y' , chega-se à:

$$\frac{y' - y}{h} = 12a^5x + 6a^5h$$

Daí, “passando ao limite pela hypothese $h = 0$ ” tem-se:

$$\frac{0}{0} = 12a^5x$$

Donde se tira que:

$$0 = 12a^5x \times 0$$

E, efetuando as respectivas substituições por dy e dx é concluído que:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 12a^5x \\ dy &= 12a^5x \, dx\end{aligned}$$

Dessa forma, notemos que o método dos limites entendido por Medeiros, refere-se à substituição imediata do acréscimo da variável por zero, fazendo livre uso de cálculos com zero e, posteriormente, substituindo os zeros por dy e dx , de forma que, quando os termos envolvidos na relação estudada chegam ao limite zero, tem-se $\frac{0}{0}$ substituído por $\frac{dy}{dx}$.

Após a apresentação inicial, Medeiros faz uma exposição mais prolongada acerca do método dos limites, partindo da seguinte questão: A igualdade $\frac{0}{0} = 12a^5x$ é absurda?

Afirma-se então que os favoráveis ao método dos limites responderiam afirmativamente, baseados em argumentos advindos da aritmética e da álgebra.

Assim, de acordo com Medeiros, o argumento aritmético baseia-se no fato de que um quociente não se altera quando o dividendo e o divisor são divididos pelo mesmo número. Dessa forma, nessa linha de raciocínio, explica-se que “*é claro que quando elle fôr muito grande o dividendo e o divisor se tornarão muito pequenos, e que serão iguaes a zero, quando o número que os dividir fôr infinito, não mudando por isso o quociente*” (MEDEIROS, 1850, p.7)

Em termos algébricos, argumenta-se que $\frac{0}{0} = 12a^5x$ será sempre exato, uma vez que, $\frac{0}{0}$ pode representar todas as quantidades.

Em seguida, Medeiros faz contraposições com respeito aos argumentos utilizados pelos que defendem o método dos limites, tanto pelo viés da aritmética, quando pelo da álgebra.

Dessa forma, do ponto de vista da aritmética, Medeiros efetua várias ponderações no sentido da impossibilidade de termos um divisor infinito, bem como o quociente de zero por zero, uma vez que, ao ser concebido a ideia de infinito possuindo todas as coisas, tem-se que, quando estas chegam a ele, deixam de gozar das propriedades que as distinguiam, e de serem o que eram antes. Diante disso, indaga-se: Se não se pode entender o que é divisor infinito, como pode-se obter o quociente de uma quantidade qualquer por ele?

Por outro lado, não é admitido como possível o quociente de zero por zero, considerando-se somente a existência do quociente entre quantidades.

Assim, conclui-se parcialmente que, “(...) o argumento arithmetico apresentado não é só inapplicavel, no caso de se suppor nullo o augmento h dado à variável, como também inadmissivel, concedendo a applicação.” (MEDEIROS, 1850, p.8)

Do ponto de vista algébrico, Medeiros apresenta uma série de argumentações fazendo várias referências, defendendo arduamente a tese da inexistência de qualquer contexto que dê realidade à $\frac{0}{0}$.

Nesse sentido, contestam-se os argumentos, alguns deles baseados em fundamentações geométricas, tecidos por Boucharlat, em seu *Elemens des Calcul Differentiel* e por Lacroix.

Medeiros cita ainda que o conceito de última razão de quantidades evanescentes, de Newton, não está resolvida pela impossibilidade do zero ser considerado como quantidade.

Admitindo-se que, por menor que seja uma quantidade, pode-se sempre conceber outra menor, coloca-se o seguinte dilema: Zero é quantidade? Assim, se zero for uma quantidade, sempre haverá outra menor, mas, em contrapartida, se zero não for quantidade, nenhuma quantidade lhe poderá ser igual.

Após isso, Medeiros afirma categoricamente que “erra-se sempre que se quer tornar uma quantidade absolutamente nulla” (MEDEIROS, 1850, p.11)

Dessa forma, após apresentar ainda suas argumentações no âmbito da aplicação às curvas, Medeiros faz sua conclusão exaltando os conceitos estabelecidos por Leibniz.

O que acabamos de concluir se acha inteiramente em opposição a todos os resultados verdadeiros, que a cada momento encontram-se nas applicações; porém o que d'isto se deve inferir é a existência de outros meios para explical-os, os quaes se acham na doutrina de Leibniz, que parece-nos foi o primeiro a encarar as quantidades e sua geração debaixo do verdadeiro ponto de vista, e a dar sobre ella as transcendentales leis do Calculo Differential que por sua universal e facil execução constituem a mais bella creatura do homem.

(MEDEIROS, 1850, p.14)

Em seguida, na terceira parte do trabalho, nos é apresentado o método dos infinitamente pequenos. A partir da função $y = f(x)$ e dos aumentos Δy e Δx relativos aos aumentos da função e da variável, chega-se à clássica relação $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Nessa linha de raciocínio, quando Δx for tomado tão pequeno quanto se queira, Δy também o será, e uma nova relação será estabelecida.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}$$

Afirma-se que a relação ficará completamente determinada, assim que for dada $f(x)$. Assim, especifica-se que, com o desenvolvimento do numerador da fração do segundo membro, surgirão potências de dx , as quais deverão ser desprezadas com relação ao próprio dx , chegando-se finalmente ao resultado esperado.

Nesse ponto, no intento de defender o método dos infinitamente pequenos, Medeiros apresenta o principal argumento de ataque ao método, para que possa apresentar sua defesa. Nessa linha argumentativa é alegado que todas as vezes em que uma quantidade no segundo membro de uma equação é negligenciada, então ter-se-á cometido um erro, por menor que seja a quantidade. Não obstante, outro ponto é levantado sob a seguinte argumentação. Admitindo mesmo que não exista erro por meio do desprezo de uma quantidade infinitamente pequena; como poderão ser concebidos infinitamente pequenos de diversas ordens, uma vez que, o indefinido é um e somente o mesmo em toda a parte?

Em sua argumentação posterior, após tecer longo comentário acerca do sistema de compensações de Carnot, Medeiros afirma que o método dos infinitamente pequenos

ficará imune à qualquer questionamento se ficar provado que: “*Duas quantidades, que differem entre si de uma terceira, indefinidamente menor que ellas, são rigorosamente iguaes*” (MEDEIROS, 1850, p.21) Dessa forma, logo em seguida é apresentada a demonstração do referido resultado.

Por fim, ainda no intento de demonstrar a superioridade do método dos infinitamente pequenos sobre o método dos limites, Medeiros empregou ambos os métodos na indagação das diferenciais dos arcos de curvas planas, de dupla curvatura, e das superfícies de revolução.

No último parágrafo de sua dissertação, Medeiros expressa com toda ênfase, sua convicção acerca da superioridade do método dos infinitamente pequenos, chegando à dizer que só por meio deste é que se pode estabelecer o cálculo diferencial.

N'estes poucos exemplos, e bem simples, a superioridade pratica do methodo dos Infinitamente – Pequenos não pode ser declinada: mas onde elle se mostra com todo o brilhantismo; onde as suas mais atrevidas concepções tem plena sancção; e que só por esse grande factio deveriam ficar coberto de qualquer ataque. E em sua applicação aos phenomenos da natureza, que repugnando a extincção completa dos seus seres, e regulando-os por leis, que em tudo coincidem com as proclamadas por Leibniz, imprime-lhes o sello de incontestavel verdade. Quanto a nós, que discutimos os princípios, que mais de uma vez tivemos ocasião de apreciar tanto o methodo dos Limites, como o dos Infinitamente –Pequenos: concluimos, que só n'este é que se pode estabelecer o Calculo Diferencial. (MEDEIROS, 1850,p.27)

Diante disso, faz-se evidente a contraposição dos chamados métodos de Newton e de Leibniz, nesse contexto específico, método dos limites e dos infinitamente pequenos. Nesse caso, com uma contundente defesa do método dos infinitamente pequenos.

Assim, podemos entender que a concepção expressa na presente dissertação pode ser vista como um indício de que os conceitos estabelecidos por Newton e Leibniz tiveram sua recepção no Brasil, por meio da contraposição direta entre o método dos limites e dos infinitamente pequenos.

Notemos ainda que a livre manipulação com zeros no denominador, como pode ser visto na igualdade: $\frac{0}{0} = \frac{f(x+0)-f(x)}{0} = \frac{f(x)-f(x)}{0} = \frac{0}{0}$.

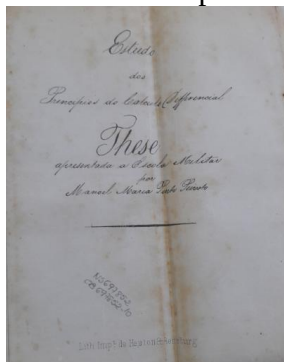
Por outro lado, cabe-nos ressaltar ainda que o autor da dissertação em sua base de argumentação faz robustas citações aos trabalhos de Boucharlat, Lacroix e Carnot. Evidencia-se portanto a influência das referidas obras sobre o trabalho de Medeiros.

Nesse sentido, tal evidência pode ser vista como mais um indício de que as obras dos referidos autores fizeram parte do processo de recepção dos conceitos do cálculo no Brasil.

Por fim, em termos da presença de conceitos matemáticos, cabe-nos registrar o trabalho com a aplicação do cálculo diferencial à teoria das curvas, visto que o trabalho com esses conceitos já foi identificado em outros registros.

Apresentemos, em tempo, a análise realizada da dissertação “*Estudo dos Princípios do Cálculo Diferencial*” apresentada por Manoel Maria Pinto Peixoto à Escola Militar, em 1853. A análise foi feita a partir da leitura de um exemplar disponibilizado na Biblioteca de Obras Raras da UFRJ. O exemplar foi escrito a próprio punho, não sendo, por esse motivo, de fácil leitura.

Figura12: Tese apresentada à Escola Militar por Manoel Maria Pinto Peixoto



Fonte: Biblioteca de Obras Raras da UFRJ

São citados o método infinitesimal, método de Lagrange e o método dos limites. A seguir atribui-se à Descartes o mérito de representar as curvas algebricamente. Nesse sentido é explicitado uma caracterização da noção de continuidade em termos geométricos.

O caracter proprio de uma funcção continua consiste em que se pode dar sempre as variaveis valores tão proximos quanto se quizer, de modo a fazer com que os valores correspondentes da funcção sejam taes, que sua differença caia abaixo de toda e qualquer grandeza dada, por menor que seja.

Toda funcção contínua de uma só variável pode portanto ser considerada com a sua variavel representar as variaveis geometricas de uma curva. A curva he então o signal o mais proprio para fazer perceber a lei de contitnuidade da funcção: a continuidade da linha he a imagem da continuidade da funcção. (PEIXOTO, 1853, p.4)

Notemos que a caracterização de continuidade é apresentada de forma bastante geral baseando-se num aspecto puramente geométrico, formulada apenas retoricamente sem qualquer simbolização.

Em seguida são tecidas argumentações no sentido de caracterizar o conceito de derivada. Para tal, parte-se de uma função contínua $f(x)$ e, considerando dois valores x e $x + h$ é argumentado que a relação expressa por $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ constitui-se, por um lado, como uma função de x e de h e, por outro lado, representa a tangente do ângulo formado entre a reta secante, pelos pontos correspondentes, e o eixo das abscissas. Nessa visão, nos termos de Peixoto, “*esta relação tenderá a approximar-se ao valor da tangente trigonometrica do ângulo que a tangente correspondente ao ponto $(x, f(x))$ forma com o eixo das abscissas*” (PEIXOTO, 1853, p.5)

Assim, seguindo a argumentação, afirma-se que, sendo h tão pequeno quanto se quizer fazer, a referida relação será revestida com essa exata significação quando $h = 0$ e a relação $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ tornar-se $\frac{0}{0}$.

Na visão de Peixoto, o símbolo $\frac{0}{0}$ não é uma indeterminação, mas, ao contrário, ele é legitimado como uma função de x , quando a função $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ de variáveis x e h assume $h = 0$.

Ora a tangente varia com a posição do ponto, quer dizer he uma funcção de coordenadas, das quaes uma he funcção da outra x : segue-se que a tangente he huma funcção de x . Assim o symbolo $\frac{0}{0}$ tem uma significação clara, pois não he outra cousa mais do que uma funcção de x , valor particular de huma funcção de x e h quando se faz $h = 0$.
(PEIXOTO, 1853, p.6)

Dessa forma, devemos notar a opção do autor de construir e legitimar suas argumentações fazendo forte uso da intuição geométrica.

Nem por esta relação percebida e demonstrada pela consideração das curvas tem o espirito razão de duvidar de sua exactidão, antes pelo contrario por que não he então a curva senão um auxiliar, como sendo um signal graphico e convencional maravilhosamente adaptado a natureza da couza significada, tornando de pura intuição e que o espirito não apanharia sem esforço em sua natureza abstracta, restringindo-se a empregar de signaes de uma outra especie.
(PEIXOTO, 1853, p.6)

A seguir, Peixoto reforça sua concepção de que $\frac{0}{0}$ é um valor assignável quando a função de duas variáveis $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ assume $h = 0$.

A relação $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, que em geral he uma funcção de x e h , tem mesmo no caso de $h = 0$ um valor assignavel, em quanto x se conserva indeterminado, e como este valor não he outra cousa senão um valor particular de uma funcção de x e h quando $h = 0$, he evidente que deve ser uma funcção de x , a haver, repitamos, um valor como vamos demonstrar. (PEIXOTO, 1853, p.7)

Daí, no intento de efetuar tal demonstração, cabe-nos notar que é explicitada uma noção de continuidade vinculada à noção do valor intermediário, no sentido estabelecido por Arbogast. “*Ora a grandeza sendo sujeita em suas variações a lei de continuidade, não pode aniquilar-se sem se tornar tão pequena quanto se quizer, ou passar ao infinito sem receber todos os valores por maiores que sejam.*” (PEIXOTO, 1853,p.8)

Nessa linha, podemos observar um registro de recepção da noção de continuidade, num certo sentido já desvinculada da noção euleriana, mas ainda não contendo sinais explícitos das noções estabelecidas por Cauchy.

A partir do entendimento explicitado são deduzidas as relações estabelecidas pela fórmula de Taylor, sendo concluído que toda função que tem recebido um acréscimo qualquer pode ser desenvolvida em série em potências ascendentes e inteiras.

Nesse sentido, Peixoto esclarece que o desenvolvimento da função em séries possibilita um novo olhar para as derivadas, uma vez que, para saber o valor da derivada de uma função de x basta observar determinado coeficiente no desenvolvimento de $f(x + h)$.

Nesse ponto é especificado que Lagrange buscou por meio desse desenvolvimento, a base para uma exposição puramente analítica dos princípios do cálculo diferencial.

A partir daí, inicia-se uma nova abordagem para a noção de derivada. Para tal, considera-se a variável x , recebendo sucessivamente um acréscimo fixo Δx , sendo respectivamente os valores correspondentes da variável y , por meio da função $f(x)$, denotados por $y, y_1, y_2, \dots, y_n$. Assim, afirma-se que a relação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ converge

indefinidamente para $f'(x)$ quando se supõe que Δx decresce sem limite, tornando-se finalmente equivalente a $f'(x)$ quando $\Delta x = 0$.

Logo após a apresentação de conceitos relacionados com as funções de duas variáveis, a tese direciona-se no sentido de dissertar acerca de três métodos relativos ao processo de diferenciação. “*Por três diferentes methodos se pode introduzir as differenciaes na formação de expressões mathematicas que dão a solução dos problemas, e são: methodo dos limites, o infinitesimal, e das funcções derivadas de Lagrange*” (PEIXOTO, 1853, p.29)

Na visão de Cardoso, o método dos limites consiste em introduzir, como auxiliares, em lugar das quantidades primitivas, os limites das relações dos acréscimos simultâneos dessas quantidades.

Nesse contexto o método dos limites é apresentado em uma abordagem essencialmente geométrica. Assim, o limite da tangente trigonométrica do ângulo que a secante faz com o eixo das abscissas será expressa por $\frac{dy}{dx}$, que por sua vez, expressará a tangente trigonométrica do ângulo formado pela direção da tangente à curva com o eixo das abscissas.

Ainda no contexto geométrico, especifica-se que pode-se substituir ao acréscimo do arco a corda relativa a esse acréscimo, sendo a unidade o limite dessa relação. Dessa forma a expressão que relaciona a corda com o aumento da variável é dada por

$\sqrt{1 + \frac{\Delta y^2}{\Delta x^2}}$, sendo a expressão modificada após a passagem ao limite para:

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

O método infinitesimal, dentro da visão apresentada por Peixoto, “*consiste, como se sabe, em introduzir nas questões, para facilitar sua resolução, os acréscimos, que recebem as variações e suas funções, consideradas como quantidades infinitamente pequenas.*” (PEIXOTO, 1853, p.32) Nesse contexto, tais quantidades serão definidas como diferenciais.

Novamente, o contexto geométrico estabelece-se como o ambiente o qual é situado o método. Desta forma, tomando-se o mesmo exemplo ilustrado no método dos limites, a diferença entre o acréscimo de um arco e a corda correspondente a este acréscimo é visualizada como um infinitesimal, expresso por:

$$\Delta\delta - \delta_{corda} = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

E, conseqüentemente, passando das diferenças para as diferenciais, chega-se em:

$$ds = dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

O problema das tangentes, assim como no método dos limites, também foi abordado sob o ponto de vista da aplicação do método infinitesimal. Assim, nessa visão, a expressão da tangente do ângulo que a secante faz com o eixo das abscissas é dada por $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Nessa linha de raciocínio, o ângulo da tangente com o mesmo eixo difere por um infinitesimal do ângulo que a secante faz com o respectivo eixo. Tem-se então que:

$$\text{tang } \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} + \mathcal{I}$$

$$\text{tang } \varphi - \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathcal{I}$$

Daí, passando às diferenciais, chega-se em:

$$\text{tang } \varphi - \frac{dy}{dx} = 0$$

E, finalmente:

$$\text{tang } \varphi = \frac{dy}{dx}$$

Peixoto esclarece que o método infinitesimal apesar de oferecer vantagens práticas, uma vez que, seus processos são prontos e diretos, apresenta grandes dificuldades lógicas, no sentido de que o desprezo de determinados infinitesimais parece caracterizar o método infinitesimal como um simples método de aproximação que, por sua vez, contém resultados perfeitamente exatos.

Na visão explicitada na tese, Lagrange teria concebido seu método a partir da insatisfação com os métodos anteriores, reconhecendo, por um lado, que estes têm vantagens práticas, mas que faltava “*aquella clareza logica em seus principios necessaria a satisfazer ao espirito, e a poder server de base a uma sciencia tão importante*”. (PEIXOTO, 1853,p.37)

Notemos que a visão exposta por Peixoto registra, de alguma forma, a concepção de que os métodos anteriores devem estar fundamentados em bases mais sólidas.

Nessa visão o método de Lagrange apresenta-se como uma tentativa de abordar a questão sob uma fundamentação mais rigorosa.

Lagrange, procurando obter com o seu methodo uma exactidão rigorosa, considera a analyse transcendente como um artificio algebrico, por meio do qual nas questões a resolver, em lugar de grandezas dadas (funcções primitivas), substitui-se outras (funcções derivadas) que são o primeiro termo do augmento da cada funcção desenvolvida segundo as potencias inteiras, e ascendentes do augmento da variável. (PEIXOTO, 1853,p.38)

Nesse sentido, a hipótese básica do método consiste na premissa de que toda função, tendo sua variável recebido um aumento, pode ser desenvolvida em potências desse aumento, sendo:

$$f(x + h) = fx + ph + qh^2 + \mathcal{X}$$

Após as considerações tecidas sobre os métodos, o autor deixa claro sua visão de que os três constituem formas distintas de expressar um mesmo método. “*Estes diferentes methods não são propriamente fallando senão um só e mesmo methodo considerado debaixo de diferentes pontos de vista*.” (PEIXOTO, 1853, p.45)

Nessa linha de raciocínio, os métodos lançam mão do mesmo artifício lógico, efetuam a substituição das grandezas dadas por grandezas auxiliares, que se relacionam por meio do cálculo, com o objetivo de eliminação das grandezas auxiliares.

Peixoto, ao dissertar sobre a conformidade dos três métodos, destaca que, em sua visão, o conceito de diferencial desempenha o papel de elemento unificador dos métodos.

Com effeito, no methodo infinitesimal as grandezas infinitamente pequenas vem em ultima analyse a reduzir-se, com os desprezos dos

infinitamente pequenos de ordens superiores, a differenciaes: no methodo dos limites as relações, entre o augmento das grandezas variaveis, se tornão quando se passa aos limites a ser relações entre differenciaes: e, enfim, no methodo de Lagrange as funcções derivadas que compõem o desenvolvimento do augmento da funcção primitiva, não dão outra coisa mais senão os coefficients differenciaes de diversas ordens como já bem o sabemos.

(PEIXOTO, 1853,p.46)

Já ao final de sua tese, Peixoto pondera que os diferentes métodos comparados, tanto em sua origem como nas aplicações, contribuem para o mesmo fim: todos exprimem a lei de continuidade na variação das grandezas, ainda que sejam por processos diferentes.

No entanto, embora Peixoto tenha citado críticas com relação aos métodos anteriores, deixa-se claro a visão de que não possuem inconsistências lógicas. “*Os outros dois methods, que podem ser estabelecidos com toda a clareza logica, tem tambem vantagens que lhe são particulares. Assim ao estado actual da sciencia não parece que nenhum destes methods mereça ser considerado por exclusão dos outros*” (PEIXOTO, 1853,p.47)

Ao final da análise das duas teses, podemos perceber claramente a forte presença de métodos do cálculo diferencial, principalmente do método dos limites e o infinitesimal. Dessa forma, entendemos que tal fato pode ser um indício de que o ensino do cálculo diferencial na Escola Militar tenha sido fortemente imbuído da aplicação dos referidos métodos.

Por outro lado, devemos reconhecer notáveis diferenças nas concepções dos dois autores. Enquanto João Ernesto de Medeiros concebeu uma contraposição dos métodos no sentido de fazer uma enfática defesa do método dos infinitamente pequenos, Manoel Pinto Peixoto fez a exposição de três métodos, sem que nenhum deles fosse preterido com relação aos demais, visualizando-os como partes diferentes de um mesmo método.

Dessa forma, apesar das diferentes concepções dos autores, a contraposição dos métodos presentes em ambas as teses, nos levam a considerar a hipótese de que a exposição e a contraposição dos métodos dos limites, dos infinitamente pequenos e de Lagrange desempenharam um protagonismo no processo de recepção dos conceitos básicos do cálculo no Brasil.

4.2.2 Escola Central

As sucessivas reformas implementadas na Academia e na Escola Militar refletem, de alguma maneira, a tentativa de conciliação entre dois universos que não estavam conseguindo estabelecer-se plenamente enquanto permaneciam juntos, a saber, o ensino militar e o ensino de engenharia. Nesse sentido, Telles (1994) reflete que “*Por isso, as reformas, ou procuravam melhorar o ensino militar, prejudicando o da engenharia, ou vice-versa.*” (TELLES, 1994, p.105)

Nesse linha de raciocínio, Miller (2003) especifica que:

Tal percepção moveu a proposta de dois ilustres militares – o General Bellegarde e o Marquês de Caxias, então ministro da Guerra – que pleiteavam, em seus relatórios de maio de 1855 e maio de 1856, a separação entre ensino militar e civil. Dessa forma, criar-se-ia um curso com disciplinas essenciais à Engenharia Civil, o que implicaria, inclusive, a mudança do nome da escola. (MILLER, 2003, p.237)

Dentro deste contexto, por meio do Decreto nº2.116, de 1º de março de 1858, a Escola Militar da Corte passa a se chamar Escola Central, sendo deixado claro, segundo o Artigo 2 do próprio decreto, os objetivos da escola. “*A Escola Central é destinada ao ensino das matemáticas e ciências físicas e naturais, e também ao das doutrinas próprias da engenharia civil*” (BRASIL, 1858)

Na nova organização dada às escolas militares o ensino militar ficou sob responsabilidade da Escola de Aplicação do Exército, denominada agora como Escola Militar e de Aplicação do Exército e com a Escola Militar do Rio Grande do Sul.

No entanto, há de se ressaltar que, apesar do passo dado no sentido da separação da Engenharia Civil da Engenharia Militar, a Escola Central continuou a ser um estabelecimento militar, vinculado ao Ministério da Guerra, onde, por exemplo, professores e alunos deveriam apresentar-se fardados.

Moreira (2014) destaca que os estudos dos alunos militares da Escola Militar e de Aplicação eram precedidos por aqueles na Escola Central. Dessa forma, os alunos que se destinavam aos cursos de infantaria e cavalaria, se matriculariam na Escola Militar e de Aplicação após aprovação no primeiro ano na Escola Central. Já os que se destinavam aos cursos de estado-maior e de artilharia, seriam matriculados somente após aprovação nos três primeiros anos da Escola Central. E, para a arma de engenharia

militar, o aluno deveria ser aprovado em todos os quatro anos do curso de Ciências Matemáticas, Físicas e Naturais da Escola Central.

Dessa maneira não fica difícil inferir que a grade curricular das cadeiras iniciais da Escola Central foi concebida para dar suporte à formação dos alunos militares.

Telles (1994) relata que com a criação da Escola Central foi instituído um “Curso Preparatório”, com aulas de Aritmética, Metrologia, Álgebra (até equações do 2º grau), História, Geografia, Cronologia, Latim e Francês.⁹² Nesse contexto, destacamos o impacto social da referida medida, uma vez que, a iniciativa permitia que os futuros alunos fossem preparados gratuitamente pela própria Escola Central. Moreira (2014) apresenta o relatório do Ministro Jerônimo Francisco Coelho apresentado à Assembleia Legislativa na 2ª sessão da 10ª Legislatura, ressaltando exatamente esse aspecto.

A criação de um curso preparatório na Escola Central franqueou as portas acadêmicas a todas as classes, especialmente às classes pobres, e mais que tudo aos provincianos. A exigência dos preparatórios estudados externamente arriscava, a que um pai, para preparar o seu filho, recorresse nas províncias ou a maus colégios, ou a curiosos, e depois de despesas, sacrifícios e perda de tempo, corria o risco de o ver reprovado na Corte, e assim perdidos os seus esforços, frustradas suas esperanças.

(...) Hoje não há mais que mandar o aluno imediatamente para a Escola Central, que o recebe, e o prepara gratuitamente, havendo também a vantagem, se ele for paisano, de que assim preparado lhe é livre, com os conhecimentos adquiridos, procurar a carreira que mais lhe convier, e por esse modo a medida torna-se extensiva a todas as classes, ainda mesmo as que se não destinam à vida militar.

(BRASIL, 1857, apud MOREIRA, 2014, p.112)

O termo Engenharia Civil é designado pela primeira vez como um curso, com a nova reformulação, uma vez que a Escola Central passou a ter os cursos de Ciências Matemáticas e de Ciências Físicas e Naturais além do próprio curso de Engenharia Civil. Telles (1994) especifica que os alunos tinham o direito, ao final do quarto ano, aos títulos de Engenheiro Geógrafo e de Bacharel em Ciências Físicas e Matemáticas ou em Ciências Físicas e Naturais.

Na distribuição das disciplinas, com a reformulação de 1858, as disciplinas de matemática continuaram a ser distribuídas nos dois primeiros anos de curso, com o Cálculo Diferencial e Integral sendo ministrado no segundo ano. No entanto, com as novas reformas nos programas que aconteceram em 1860 e 1862, praticamente todas as

⁹² Cabe ressaltarmos que, segundo Moreira (2014), para ser admitido às aulas preparatórias, exigia-se do aluno saber ler e escrever corretamente, as quatro operações aritméticas e idade mínima de 12 anos para paisanos e entre 14 e 35 para os militares.

disciplinas de matemática continuaram alocadas nos dois primeiros anos de curso, mas o cálculo diferencial e integral passou a ser ministrado no segundo e no terceiro ano. A disciplina *Elementos de Cálculo Diferencial e Integral, e a parte da Mecânica que só precisa desses elementos* fazia parte da primeira cadeira do segundo ano e a de *Continuação do Cálculo Diferencial e Integral e da Mecânica* constituía a primeira cadeira do terceiro ano.

Tais mudanças podem ser verificadas no Apêndice 25, que trazem os respectivos regulamentos de 1858, 1860 e 1863.

Em nossas pesquisas no Arquivo Nacional do Rio de Janeiro encontramos manuscritos referentes aos programas das disciplinas da Escola Central no ano 1863, conforme pode ser consultado no Apêndice 26.

Notemos que na disciplina de Álgebra Superior o desenvolvimento das funções em série era tratado juntamente com as condições de convergência.

Percebamos ainda que as ementas de 1861 e de 1863 das cadeiras de Cálculo Diferencial e de Cálculo Integral eram compostas basicamente por uma lista de procedimentos relacionados respectivamente aos procedimentos de diferenciação e de integração.

Em termos do cálculo diferencial, devemos destacar que além dos processos de diferenciação estão listados os temas relativos às funções que se tornam em $\frac{0}{0}$, aos máximos e mínimos de uma função e às curvas osculatrizes.

Já no tocante ao cálculo integral, o primeiro tópico é a integração das diferenciais monomiais sendo seguido por vários tópicos relacionados aos métodos de integração. O cálculo integral ministrado no terceiro ano é dedicado praticamente aos procedimentos direcionados a resolução de equações diferenciais.

Dessa forma, os elementos presentes no programa parecem sinalizar que os conceitos do Cálculo Diferencial e do Cálculo Integral eram voltados prioritariamente para os procedimentos vinculados aos conceitos de derivada e de integral, fato comum na formação de engenheiros.

Nesse sentido, diante do exposto, não parecem ter havido maiores reflexões conceituais acerca da natureza dos conceitos nesse período.

Em termos da composição do corpo docente da Escola Central, Moreira (2014) pontua que, com exceção de seis professores jubilados, todo o quadro docente da Escola Militar foi transferido para a nova escola.

Miller (2003) nos apresenta uma documentação encontrada no prefácio de uma das teses de doutorado apresentadas à Escola Militar, contendo uma relação completa de todo o corpo docente da Escola Militar em 1849.

Figura 13: Relação Parcial do Corpo Docente da Escola Militar em 1849

FACULDADES DE MATHEMATICAS DA ESCOLA MILITAR.	
DIRECTOR:	
O Exm. Sr. Conselheiro de guerra Francisco de Paula e Vasconcellos, tenente-general do exercito.	
LENTES PROPRIETÁRIOS:	
Os Srs.:	
PRIMEIRO ANNO.	
Dr. ANDRÉ CORDEIRO DE NEGREIROS LOBATO, major do imperial corpo de engenheiros (Examinador)	{ Arithmetica, algebra e trigonometria plana.
SEGUNDO ANNO	
Dr. JOAQUIM JOSE DA CUNHA, capitão honorario do estado-maior	{ Algebra superior, geometria analytica calculo diferencial e integral Geometria descriptiva e suas applicações à stereotomia e à perspectiva
Cons., Dr. ANTONIO MANOEL DE MELLO, tenente-coronel do imperial corpo d'engenheiros (examinador)	

Fonte: Miller (2003,p.163)

Dessa forma, vemos que José Joaquim da Cunha (parece que a ordem de seu nome está invertida na figura) foi o responsável pelo ensino do cálculo na Escola Militar.

Nessa nova configuração, conforme Moreira (2014), os lentes José Joaquim da Cunha, José Maria da Silva Paranhos, Ricardo José Gomes Jardim, Guilherme Schüch de Capanema, Cândido de Azeredo Coutinho, Ignácio da Silva Galvão, bem como os substitutos Joaquim Gomes de Souza, Gabriel Militão de Villanova Machado e José Joaquim de Oliveira foram nomeados lentes catedráticos.

De fato, Moreira (2014) após análise das Atas da Congregação da Escola Central e documentos constantes no Almanak Laemmert,⁹³ informa a composição do corpo docente e administrativo da Escola Central no ano de 1858. No tocante ao curso matemático, cabe-nos citar:

⁹³ O Almanak Laemmert pode ser localizado pelo endereço www.crl.edu/brazil/almanak . Um quadro dos professores da Escola pode ser encontrado no Almanak Laemmert, 1858, p.260-261.

Lentes Catedráticos:

1) Curso Matemático: José Joaquim da Cunha, Ignácio da Cunha Galvão, José Maria da Silva Paranhos e Joaquim Gomes de Souza.

Opositores Inteirinos

1) Primeiras Cadeiras de Matemáticas: Antônio de Araújo Ferreira Jacobina

2) Cadeiras de Matemáticas e de Ciências Físicas e Naturais:

Francisco Carlos da Luz, Miguel Antônio da Silva e João Martins da Silva Coutinho

3) Primeiras Cadeiras de Matemáticas e do Curso de Engenharia Civil:

Francisco Primo de Souza Aguiar e Agostinho Victor de Borja Castro.

Professores de Preparatórios

Aritmética, Álgebra e Geometria: Joaquim Ignácio da Cunha

Assim, com o advento da Escola Central, José Joaquim da Cunha passa a ocupar a posição de lente catedrático na nova escola.

Miller (2003) nos informa que foi conferido o grau de *Doutor em Mathematika* a José Joaquim da Cunha, em 1846, juntamente com outros 22 professores (entre efetivos e aposentados).

Em particular, podemos perceber a participação de José Joaquim da Cunha em várias bancas de Doutorado na Escola Militar.

Miller (2003) apresenta ainda uma pequena biografia de José Joaquim da Cunha destacando sua atuação como professor de cálculo e analítica na Escola Militar, sua atuação política como o oitavo presidente da província do Rio Grande do Norte, entre 1850 e 1852, e sua atuação como professor do 2º ano na Escola Central, em 1858. Fato esse que, nos leva a conjecturar que continuou atuando como professor de Cálculo, uma vez que, no regulamento da Escola Central de 1858, a cadeira de Cálculo era ministrada no segundo ano do curso matemático.

A aula inaugural da Escola Central foi proferida pelo professor Antônio José de Araújo em 16 de março de 1858, com a presença do Imperador Pedro II. Moreira (2014) apresenta uma transcrição⁹⁴ de seu discurso o qual apresenta o pensamento de vários

⁹⁴ Moreira (2014) relata que uma versão tipografada desse discurso pode ser encontrada no Setor de Obras Raras da Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro – Localização: 39,10,26, n.2

cientistas e, em particular, faz uma exposição para os alunos acerca do que irão estudar na Escola Central.

Nesse ponto, a parte do discurso que se refere ao estudo do cálculo mostra-se relevante para o presente trabalho, uma vez que, expõe os conceitos que deveriam ser abordados nas aulas de Cálculo Diferencial e Integral na Escola Central.

Vereis o como nesse choque de lucidos pensamentos destacara-se o grande genio de *Descartes* nos dous methodos de tirar tangentes ás curvas, na theoria dos *grandes e dos pequenos efeitos* e na dos pontos de inflexão.

Acompanareis as pesquisas de *Barrow* na maneira de conduzir as tangentes, pesquisas deram lugar á grande ideia do infinitamente pequenos.

Cumprê que acompanheis os germens e o desenvolvimento dessa ideia sublime que descobriu aos homens segredos reconditos, que pareciam condemnados para todo o sempre a jazerem nos seios do occulto.

Comparareis o *Calculo de Leibniz*, que tem por objeto a differença das grandezas infinitamente pequenas com o *METHODO DAS FLUXÕES* de *Newton* e tomarei ainda hoje parte nessa grande questão que dividio o mundo scientifico e estimulou o amor proprio da Inglaterra e de Allemanha.

(MOREIRA, 2014, p.241-242, GRIFO NO ORIGINAL)

Notemos que a concepção apresentada por Antônio José de Araújo, por um lado, vincula-se com antigas abordagens para o problema das tangentes e, por outro lado, apresenta a intenção de realizar uma contraposição entre os conceitos e métodos desenvolvidos por Leibniz e Newton.

Nesse ponto, cabe-nos destacar que tal registro pode ser visualizado como um elemento de transmissão dos conceitos do cálculo lebniziano e newtoniano. Nesse sentido, o confronto entre os métodos de cálculo estabelecidos respectivamente por Leibniz e Newton parece configurar-se como um elemento particular de recepção dos respectivos conceitos.

Destacamos que, conforme apontado por Moreira (2014), Antonio José de Araújo foi aluno da Academia Real Militar e, a partir de 1832, entrou para o corpo docente, tendo sido professor substituto das cadeiras de ciências exatas e, posteriormente, lente de Geometria Descritiva. Dessa forma, o discurso carrega a autoridade de um professor atuante por praticamente três décadas.

Em um curto período de tempo, a Escola Central passou por várias mudanças em seu regulamento, nos anos de 1860, 1861 e 1863.

A partir do novo regulamento estabelecido a partir de 21 de abril de 1860, o curso de Ciências Matemáticas e Físicas foi denominado de Curso Normal, sendo realizado num período de quatro anos. Moreira (2014) destaca que, com o novo regulamento os Engenheiros Geógrafo e Cível, embora realizando cursos com algumas diferenças, passaram a apresentar um mesmo nível hierárquico de titulação.

Por essa mesma reforma, as aulas preparatórias foram suprimidas. Não são explicitados os motivos da supressão das aulas. Podemos apenas inferir, conforme sugere Moreira, que os reais motivos talvez estejam ligados à necessidade de redução de despesas, ou mesmo, de tempo de estudos.

Entretanto, apesar de não mais existirem as aulas preparatórias, os conhecimentos básicos continuariam a ser cobrado dos alunos. Dessa forma, “(...) *não deixou de exigir aos candidatos à matrícula na instituição, o conhecimento relativo aos preparatórios*” (MOREIRA, 2014,p.115). Nesse ponto, Moreira (2014) aponta que a grande novidade foi o aparecimento da exigência do conhecimento de língua inglesa para os candidatos aos cursos de engenharia civil e militar.

E, ainda, ao final do segundo mês de estudos, para que pudessem prosseguir no curso, os alunos deveriam ser aprovados em um exame de suficiência das matérias até então ministradas.

Moreira (2014) explicita que para a obtenção do grau de Bacharel, era necessária a aprovação nos quatro anos do Curso Normal, e ainda possuir o conhecimento dos preparatórios de latim, história, geografia e cronologia. Já para a obtenção do título de Engenheiro Geógrafo o estudante deveria concluir os quatro anos do Curso Normal, e para a obtenção do título de Engenheiro Cível, o aluno deveria ser aprovado nos três primeiros anos do Curso Normal e cursar mais dois anos de Engenharia Civil.

A última reforma regimental ocorrida na Escola Central foi por meio do Decreto 3.083, de 28 de abril de 1863. Dessa maneira, segundo Moreira (2014), a reforma não apresentou uma nova concepção de curso, tendo a Escola Central oferecido um leque de cadeiras e, dependendo dos estudos realizados pelos alunos, eles recebiam uma ou outra titulação.

Moreira (2014) salienta ainda que, em sua visão, um aspecto bastante positivo do regulamento foi a introdução do estudo de Economia política, estatística e princípios do direito administrativo, uma vez que o assunto tem grande importância em determinados segmentos da engenharia. O Visconde do Rio Branco foi o primeiro regente da referida cadeira.

Por outro lado, em termos do desenvolvimento da Escola Central, Telles (1994) se impressiona com a extensão e diversidade das matérias incluídas nas cadeiras principais dos dois últimos anos, sobretudo no programa de 1863, exigindo dos professores conhecimentos enciclopédicos. Telles salienta a visão existente de que os cursos da Escola Central eram de alto nível, entretanto é também destacada a deficiência do ensino prático. Nesse sentido, cita-se a fala do cientista suíço Louis Agassiz, que visitou a Escola Central em 1865, expressando-se da seguinte maneira:

A Escola Central corresponde ao que nos Estados Unidos, chama-se *Scientific School*. Em nenhuma parte do Brasil vi estabelecimento de ensino onde os métodos aperfeiçoados sejam tão altamente apreciados e tão generalizadamente adotados. Os cursos de Matemática, Química, Física e Ciências Naturais são longa e seriamente feitos; porém, mesmo nesse estabelecimento, fiquei impressionado pela mesquinha dos meios de demonstração prática e experimental; os professores não me parecem haver compreendido suficientemente que as Ciências Físicas não se ensinam única e principalmente nos compêndios. (TELLES, 1994, p.111)

Nessa mesma linha, Telles, por um lado, continua enfatizando as falas acerca do “matematicismo” que invadira a academia: “*a formação dos alunos era principalmente matemática, com ausência total de manipulações em laboratórios*” (TELLES, 1994, p.111) e, por outro lado, salienta a posição de destaque que a Escola Central ocupava dentro do contexto do Império.

Assim, a Escola Central destacava-se dentro do panorama cultural do Império como um centro de altos estudos, onde sobressaíam professores do mais alto gabarito, como Gomes de Souza, Silva Paranhos (Visconde do Rio Branco), Capanema e Freire Alemão. A partir de 1862, as suas salas abrigavam as reuniões semanais do Instituto Politécnico, primeira associação brasileira de estudos científicos, presidida pelo Conde d’Eu e precursora da atual Academia Brasileira de Ciências. (TELLES, 1994, p.112)

Assim, em termos do ensino da Engenharia Civil, Moreira (2014) ressalta que, não obstante a indefinição de objetivos, a Escola Central sempre manteve o ensino da engenharia civil nos seus diversos conteúdos programáticos. Dessa forma, por exemplo, cadeiras como, Construção de estradas, vias férreas, portos, hidráulica, metalurgia, materiais aplicados na construção civil, arquitetura civil, mecânica aplicada, sempre constaram em todos os regulamentos que estiveram em vigor.

4.2.2.1 Doutorados obtidos na Escola Central

Conforme já explicitado, no período entre 1848 e 1857, foram concedidos 25 títulos de Doutor em Matemáticas, todos mediante elaboração de uma dissertação e posterior sustentação da mesma perante a Congregação da Escola Militar.

Com a implantação da Escola Central, por meio do Decreto 2.116 em 1858, houve a continuidade de concessão do título de Doutor, criado anteriormente pela Escola Militar.

Miller (2003) aponta o acentuado decréscimo do número de dissertações defendidas na Escola Central, quando comparadas com o número de defesas na Escola Militar. Enquanto no período compreendido entre 1848 e 1857 foram defendidas 25 dissertações na Escola Militar, apenas 12 dissertações foram defendidas na Escola Central entre 1858 e 1874.

Quadro11: Número de Dissertações Defendidas na Escola Central entre 1858 à 1874

Ano	Nº. Teses	Ano	Nº. Teses
1858	4	1869	1
1859	1	1870	1
1862	2	1871	0
1868	1	1874	2

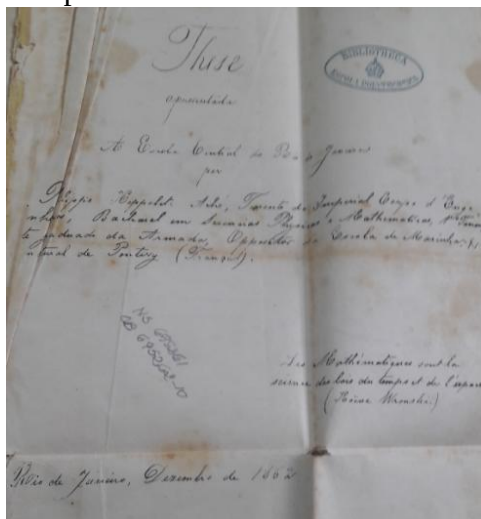
Fonte: Miller (2003)

Notemos que, conforme salienta Miller (2003), foram defendidas uma tese a cada dois anos, em média. O envolvimento do Brasil na Guerra do Paraguai, talvez tenha sido um dos principais fatores não somente para o baixo número de defesas, mas também pela diminuição do número de alunos matriculados na Escola Central, no período da guerra.

Dentre as teses defendidas na Escola Central destacaremos o estudo de três delas que dissertam acerca de alguns dos conceitos básicos da análise. Dessa forma, após a referida análise podemos ter uma melhor noção de como se deu o olhar dos respectivos autores, em particular, no tratamento dos processos de diferenciação e de integração.

A sétima tese defendida na Escola Central por Fellippe Hippolito Aché, em 1863, intitulada “*Demonstrar quaes os principios da analyse, reduzindo-os ao menos possivel*” evidencia sua concepção acerca dos métodos utilizados na análise.

Figura 14: Capa da 7ª Tese defendida na Escola Central



Fonte: Biblioteca de Obras Raras da UFRJ

Nesse intento, Aché divide sua argumentação por meio da exposição de sete princípios, a saber, princípio da continuidade das funções, princípio dos sinais que se consideram em sentidos opostos, princípio da homogeneidade, princípio dos infinitamente pequenos, princípio da inércia, princípio da ação e reação, princípio da coexistência ou da independência dos movimentos.

Na argumentação apresentada são mencionados alguns autores, como Comte, Duhamel e Carnot, bem como são tomados por referência posições tais como a crítica de Wronski⁹⁵ à teoria de Lagrange e a posição de Freycinet referente aos métodos de diferenciação, além do destaque dado aos trabalhos de Cauchy.

Dessa forma, apesar de efetuar críticas às abordagens de algumas obras, Aché destaca a originalidade e a relevância do trabalho de Cauchy, parecendo perceber a importância de sua nova arquitetura forjada, colocando a análise como um fundamento para a matemática.

Carnot, Duhamel, Freycinet fizeram tratados de Analyse infinitesimal e pois não encararão ainda a questão no seu ponto de vista geral. Comte falla na Analyse Mathematica, mas só num ponto de vista todo

⁹⁵ Jozéf-Maria Hoëne de Wronski (1778-1853) é uma pessoa controversa na história da matemática. Nascido na Polônia, serviu alguns anos no exercito do tzar russo e tornou-se cidadão francês em 1800, lidando com os fundamentos da análise e ficando sempre em brigas. Foi o primeiro a criticar a generalidade do programa analítico das funções de Lagrange. Introduziu a noção de filosofia da matemática, instigando Gergonne de abrir uma tal rubrica em sua revista *Annales*. Defendeu uma sua “*Loi suprême*”, quanto aos coeficientes no desenvolvimento de funções em series. Na Polônia fica estimado como o primeiro grande matemático polonês.

philosophico, e não lhe dissemina bem as bases. Cauchy parece-me o unico que fez um curso de Analyse, por tel-a considerado a base essencial de todas as mathematicas, o que ella é, sendo que seria para desejar que redimissemos toda e qualquer observação dos objetos exteriores. (ACHE, 1862, p.3)

Notemos que, nesse ponto, explicitam-se obras analisadas por Ache, fato esse que sugere, de alguma forma, que as respectivas obras fizeram parte do processo de recepção dos conceitos básicos da análise no Brasil.

Dessa maneira, cabe-nos destacar que, parece ter sido o primeiro a destacar o pioneirismo do trabalho de Cauchy, revelando conhecimento acerca de seus escritos. “*Cauchy, porém, só publicou, que eu saiba, à primeira parte de seus trabalhos, que dividiu em Analyse Algebrica e Analyse Transcendente.*” (ACHE, 1862, p.3)

A lei de continuidade das funções enunciada baseia-se por um lado, na propriedade do valor intermediário no sentido concebido por Arbogast e, por outro lado, traz a concepção de que a função calculada em dois valores “imediatos” deve diferir menos que qualquer quantidade dada.

Toda e qualquer função de uma ou mais variaveis pode passar subitamente por todos os estados de grandeza, ou por todos os termos, dado o valor de uma função pode sempre achar para as variaveis valores taes, que um não difira de outro que lhe seja immediato senão de uma grandeza menor do que qualquer grandeza determinada. (ACHE, 1862, p.4)

Devemos ressaltar ainda que, na visão de Ache, não se pode demonstrar o princípio da continuidade, exceto para as funções inteiras. Assim, a partir dessa premissa, podemos inferir que não existem manipulações algébricas envolvendo a noção de continuidade, sendo o princípio manifestado apenas de forma retórica.

Por ocasião de sua explanação acerca do princípio dos infinitamente pequenos, Ache tece considerações em relação aos diferentes métodos. Dessa maneira, na visão explicitada, por um lado o método desenvolvido por Lagrange tem a vantagem de empregar somente quantidades algébricas, evitando o trabalho com a noção de infinito, mas, por outro lado, tal vantagem seria illusória, uma vez que, Wronski teria mostrado que a base da teoria de Lagrange forma um círculo vicioso.

Com relação ao método dos limites, entendido como o método aperfeiçoado pelos analistas a partir do método das fluxões e dos fluentes, pondera-se que além das críticas que tem recebido, somente pode ser demonstrado quando se trata das funções contínuas, como teria feito Duhamel em sua análise.

Após isso deixa-se clara a predileção ao método dos infinitamente pequenos. De acordo com esse entendimento, as objeções feitas podem ser facilmente refutadas, uma vez que, a maioria delas são baseadas em interpretações errôneas do método.

Dessa forma, Ache deixa claro que não adotará o sistema de compensações de Carnot em sua “*Methaphisica do Calculo Infinitesimal*”, adotando o chamado princípio de Wronski como princípio fundamental, a saber: “*Duas quantidades finitas que diferem entre si por um infinitamente pequeno são rigorosamente iguais*”, apresentando como demonstração apenas uma argumentação retórica.

Por fim, destaca-se por meio do pensamento de Freycinet que a diferença entre os métodos não é realmente que uma questão de linguagem, sendo mais racional adotar as ideias de Leibniz como primordiais, abrangendo o método de Newton sem desprezar o rigor de Lagrange.

Sem querer arrogar-nos o merito de invenção, não podemos deixar de completar esta exposição, apresentando o pensamento de que como Freycinet, nos parece que a diferença essencial entre methodos não é realmente senão uma questão de linguagem, seria mais racional adoptar um methodo que abrangesse os três, partindo das ideias de Leibniz como primordiaes, abrangendo as lições do methodo de Newton sem desprezar o rigor do de Lagrange. (ACHE, 1862, p.8)

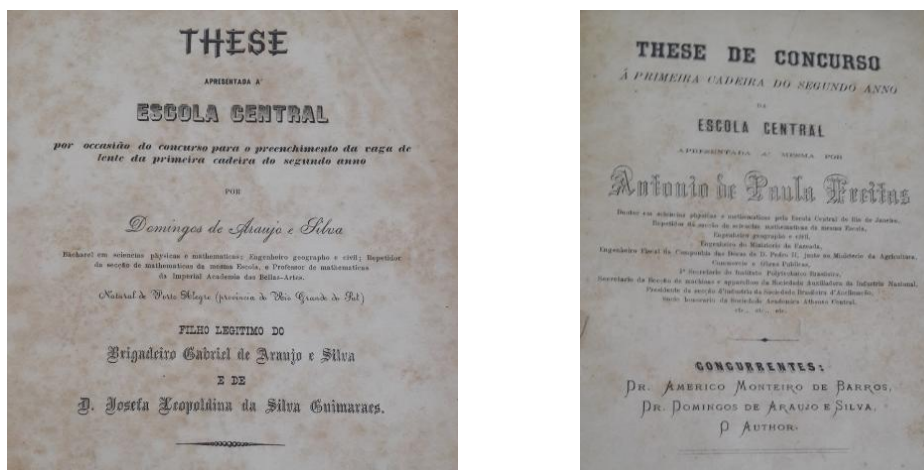
Dessa forma, entendemos que, no contexto em questão, os métodos eram vistos como partes de um mesmo processo, possuindo apenas uma diferença de linguagem entre elas.

O trabalho com o conceito de integral consitui o tema de duas teses de concursos defendidas na Escola Central.

As teses elaboradas por Domingos de Araújo Silva e Antônio de Paula Freitas, que foram apresentadas por ocasião do concurso para provimento da vaga de lente da primeira cadeira do segundo ano da Escola Central, no ano de 1874, versam sobre o mesmo tema: integrais definidas consideradas como parâmetros.

Nesse ponto, por um lado, cabe-nos reiterar que as teses não teriam a obrigação de apresentar estudos inéditos e, por outro lado, devemos salientar que não possuíam a mesma finalidade que as outras, uma vez que, foram defendidas e elaboradas para provimento de uma vaga por meio de concurso, possuindo, dessa forma, mais elementos com características práticas.

Figura 15: Teses de Concurso defendidas na Escola Central em 1874



Fonte: Biblioteca de Obras Raras da UFRJ.

Em termos do desenvolvimento dos conceitos básicos do conceito de integração não são explicitados e/ou citados autores em ambas as teses, com exceção de Freitas que atribui à Fourier a notação expressa em $\int_a^b F(x)dx = F(b) - F(a)$.

Conforme já explicitado, as teses versam sobre o mesmo tema. Em tempo, acrescentamos que o trabalho com as integrais definidas têm também a mesma abordagem em ambas as teses.

As teses apresentam a integral associada exclusivamente com a ideia de antidiferenciação em um contexto de resolução de equações diferenciais simples.

Nesse contexto, as integrais definidas são visualizadas como uma soma infinita de valores da diferencial $f(x)dx$ e calculadas diretamente por meio das integrais indefinidas. Dessa forma, a integral definida $\int_{x_0}^{x_\omega} f(x)dx$ é caracterizada como a soma do número infinito de valores da diferencial tomadas de um certo valor x_0 até um outro valor x_ω desta mesma variável, desde que a função $f(x)$ seja contínua entre os limites considerados.

Notamos que não é apresentada qualquer justificativa acerca da relação entre a integral definida e a soma das diferenciais dadas por $f(x)dx$. Por outro lado, deixa-se claro a opção da não explicitação de tais justificativas.

[...] mas é fácil demonstrar, que sob o ponto de vista analítico, uma integral d'esse gênero representa a somma dos valores, que toma a diferencial $f(x)dx$, quando x varia entre dous limites fixos tomando acrescimos infinitamente pequenos; e que sob o ponto de vista

geometrico, representa a área d'uma curva $y = F(x)$, compreendida entre a curva, o eixo das abscissas, e as duas ordenadas correspondentes às abscissas fixas. (FREITAS, 1874, p.2)

Devemos reiterar que o trabalho com o conceito de integral nas referidas teses segue uma abordagem que privilegia predominantemente os aspectos operatórios. Nesse sentido, nos parece razoável inferir que, para os autores envolvidos no contexto em questão, não se fizeram necessárias outras reflexões acerca da gênese conceito de integral.

A partir do exame dessas três teses defendidas na Escola Central, podemos perceber, por um lado, a exposição dos métodos no cálculo diferencial com uma predileção pelo método dos infinitamente pequenos e, por outro lado, a concepção de que os três métodos se complementam, conforme já notado em outros registros.

Em tempo, cabe-nos pontuar acerca da influência da ideologia positivista na Escola Central, que se estendeu também para a Escola Politécnica.

Nesse contexto, algumas obras de matemática foram concebidas tendo como pano de fundo conceitos positivistas.

Em particular, interessa-nos analisar a obra *Notas sobre o emprego do infinito*, do professor Américo Monteiro de Barros.

Em 1863, Américo Monteiro de Barros escreveu a obra *Notas sobre o emprego do infinito*.

Já, logo no início de seu prefácio Américo Barros deixa claro o seu descontentamento com o emprego do infinito no ensino da matemática elementar afirmando que seu uso é causa de gravíssimos inconvenientes.

Nesse sentido, ao referir-se ao descontentamento da Faculdade de Ciências de Paris com relação à esse assunto, Barros registra a influência dos compêndios franceses no ensino de matemática no Brasil.

As desordens e os perigos assignalados no trecho que transcrevi, dão-se em grande escala nas escholas de mathematicas no Brasil, onde são adoptados compendios francezes que fazem uso do infinito no ensino das matematicas elementares, ou compilados dos francezes por professores brasileiros, entre os quaes não podemos deixar de citar o do Sr. Ottoni (conselheiro), actualmente adoptado por todos os departamentos de instrucção secundária e superior, maxime o de geometria. (BARROS, 1863,p.5)

A seguir, combate firmemente o uso dos infinitesimais, afirmando que são dadas à estas noções uma realidade que não podem existir, introduzindo-as ousadamente nos elementos da matemática, fundamentando sobre essa base frágil toda a ciência.

Em termos práticos, Américo Barros baseia sua argumentação por meio da análise de três situações: a definição de ângulo que o caracteriza como um “espaço infinito”, a caracterização de um círculo como um polígono de um número infinito de lados e o resultado da soma de uma progressão geométrica decrescente com infinitas parcelas.

Na visão de Américo Barros é absolutamente inconcebível uma soma com infinitas parcelas ter um resultado real. *“A somma d’uma progressão decrescente se tivesse o sentido que se lhe atribue, apresentaria pois o resultado d’uma operação reconhecida como inexecutavel, pelas mais simples noções do bom senso”* (BARROS, 1863, p.11)

Embora as críticas sejam direcionadas ao uso do infinito na matemática elementar, Barros efetua fortes críticas ao uso das quantidades infinitamente pequenas. *“Digamos alguma cousa a respeito dessas grandes infinitamente pequenas, que actualmente não se receia collocar até no limiar da sciencia, como que para impedir o acesso a quem não baixar ante ellas sua razão e intelligência”* (PEIXOTO, 1863, p.13)

Dessa forma, a tese defendida por Américo Monteiro de Barros registra sua postura de forte rejeição não somente ao uso do conceito de infinito, mas também ao trabalho com as quantidades infinitamente pequenas.

4.2.2.2 Transição da Escola Central para a Escola Politécnica

Conforme já citado a ocorrência da Guerra do Paraguai, entre 1864 e 1870, teve um grande impacto na dinâmica costumeiramente estabelecida na Escola Central. O número de alunos matriculados e a quantidade de dissertações para a obtenção do título de Doutor caíram vertiginosamente, por exemplo.

Contudo, apesar do impacto, a Escola Central continuou a funcionar normalmente, enquanto todas as atividades acadêmicas da Escola Militar foram suspensas no período da Guerra.

Dessa forma, segundo nos aponta Moreira (2014), *“a ausência dos alunos militares fez com que no seio do corpo discente o espírito reinante fosse perdendo qualquer característica militar.”* (MOREIRA, 2014, p.140)

Moreira (2014) apresenta diversos relatórios oficiais concebidos por diferentes Ministros da Guerra apontando a necessidade de se concentrar toda a formação dos militares na Escola Militar. A análise dos referidos relatórios indica um certo consenso no sentido da consolidação da completa independência dos ensinos de engenharia civil e militar, o que no presente contexto, implicaria necessariamente a desvinculação da Escola Central do Ministério da Guerra.

Percebe-se, portanto, que era recorrente a ideia de se concentrar na Escola Militar toda a formação do oficial, tanto a sua parte prática, como de fato já vinha ocorrendo, quanto à parte teórica, até então sendo feita na Escola Central. É interessante ser observado que nos meados desse século o reclamo das autoridades militares restringia-se à necessidade da separação dos ensinos da engenharia militar e civil. Vinte anos depois essa exigência ressurgia e de forma mais ampla, pois essa separação estava conjugada à saída da Escola Central do Ministério da Guerra. (MOREIRA, 2014, p.141)

Em contrapartida, se por um lado havia o notório interesse do Ministério da Guerra em haver a transferência da Escola Central para a esfera civil, por outro, segundo Moreira (2014), também existia o interesse da transferência da Escola Central para o Ministério do Império, por parte do próprio Ministério do Império, uma vez que, o ministro almejava efetuar uma grande reforma na Instrução Pública, em particular no ensino superior.

Em suma, podemos perceber uma ampla gama de interesses advindos de diferentes instâncias e por diferentes motivos, que convergiam no sentido da consolidação da completa separação dos ensinos de engenharia militar e civil.

4.2.3 Escola Politécnica do Rio de Janeiro

Finalmente, diante da conjunta exposta, por meio do decreto 5.600, em 25 de abril de 1874, a Escola Central passou a ser denominada Escola Polytechnica, desvinculada completamente do Ministério da Guerra, agora subordinada ao Ministério do Império.

O artigo 1º do mesmo decreto estabeleceu que os cursos da Escola Politécnica seriam compostos por um Curso Geral, com duração de dois anos, seguido por um dos cursos especiais, com duração de três anos.

- Curso de Ciências Físicas e Naturais

- Curso de Ciências Físicas e Matemáticas
- Curso de Engenheiros Geógrafos⁹⁶
- Curso de Engenheiros Civis
- Curso de Engenheiros de Minas
- Curso de Artes e Manufaturas

Notemos que a Escola Politécnica não perdeu a característica presente na Escola Central, no sentido que a escola não formava somente engenheiros, mas também bacharéis e doutores em ciências.

O Curso Geral era composto pelas seguintes cadeiras, nos respectivos anos.

1º Ano

1ª Cadeira – Álgebra compreendendo a Teoria Geral das Equações e a Teoria e Uso dos Logaritmos; Geometria no Espaço; Trigonometria Retilínea; Geometria Analítica.

2ª Cadeira – Física Experimental e Meteorológica; Aula – Desenho Geométrico e Topográfico

2º Ano

1ª Cadeira - Cálculo Diferencial e Integral; Mecânica Racional e Aplicada às Máquinas Elementares.

2ª Cadeira - Geometria Descritiva (1ª parte). Trabalhos gráficos a respeito da solução dos principais problemas de Geometria Descritiva

3ª Cadeira – Química Inorgânica, Noções Gerais de Mineralogia, Botânica e Zoologia

No curso de Ciências Físicas e Matemáticas, as matérias relativas ao cálculo e a matemática concentraram-se na primeira cadeira do primeiro ano, sendo a terceira cadeira do primeiro ano composta pelo curso de Geometria Descritiva.

1º Ano

⁹⁶ O curso de Engenheiro Geógrafo tinha duração de um ano. Contudo, devemos notar a existência de divergências na historiografia quanto a natureza das cadeiras a serem cursadas. Enquanto Telles (1994) afirma que o título de Engenheiro Geógrafo era dado aos que concluíssem o primeiro ano do curso de Engenharia Civil, Moreira (2014) diz que o curso era composto das matérias do 2º ano do curso de Ciências Físicas e Matemáticas.

1ª Cadeira – Séries, Funções Elípticas, Continuação do Cálculo Diferencial e Integral, Cálculo das Variações, Cálculo das Diferenças, Cálculo das Probabilidades, Aplicação às Táboas de Mortalidade, nos problemas mais complicados de Juros Compostos; as amortizações pelo sistema de Price; aos Cálculos das Sociedades denominada Tontinas e aos Seguros de Vida

Dessa forma, vemos que o cálculo diferencial e integral foi lecionado no segundo ano do Curso Geral e no primeiro ano do curso de Ciências Físicas e Matemáticas da Escola Politécnica.

Mesmo após as reformas estabelecidas posteriormente por Benjamim Constant, em 1890, e por meio da Lei Rivadávia Corrêa, em 1911, o ensino do Cálculo Diferencial e Integral permaneceu no primeiro ano de curso.

No programa da 1ª cadeira do 1º ano do Curso Geral da Escola Politécnica são explicitados os conceitos referentes ao Cálculo Diferencial e Integral.

Figura 16: Capa do Programa do Curso de Cálculo

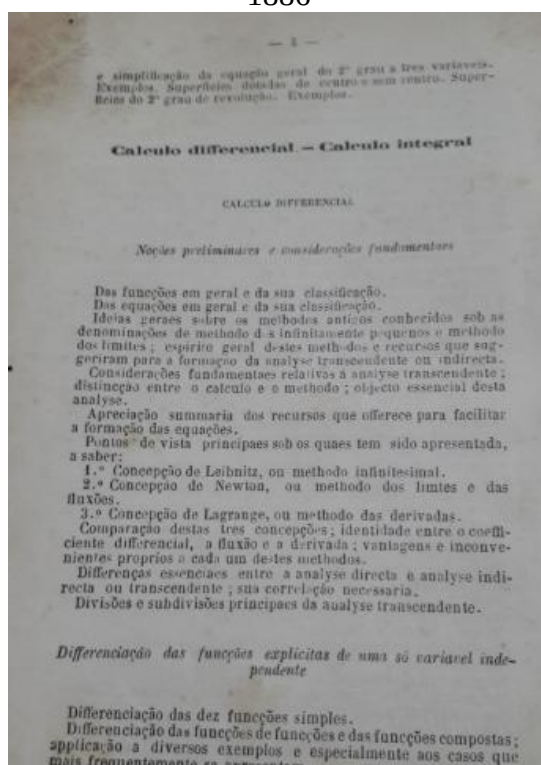


Fonte: Biblioteca de Obras Raras da UFRJ

A primeira seção do programa apresenta as noções preliminares e as considerações fundamentais. Nesse sentido são apresentadas, segundo o programa, as ideias gerais sobre o método dos infinitamente pequenos e o método dos limites, bem como, são apresentadas três concepções associadas aos respectivos métodos, a saber:

- 1) Concepção de Leibniz – método infinitesimal
- 2) Concepção de Newton – método dos limites
- 3) Concepção de Lagrange – método das derivadas

Figura 17: Primeira página do programa de Cálculo Diferencial e Integral da EPRJ - 1886



Fonte: Biblioteca de Obras Raras da UFRJ

Nessa proposta, as três concepções são comparadas a fim de mostrar a identidade entre o coeficiente diferencial, a fluxão e a derivada. Assim, observando que os conceitos de coeficiente diferencial, fluxão e de derivada são conceitos centrais nos respectivos métodos; infinitesimal, dos limites e das derivadas, podemos entender que os três métodos formam um tripé que fundamenta o processo de diferenciação dentro da concepção apresentada.

Dessa forma, os métodos parecem ser vistos, metaforicamente falando, como diferentes faces do mesmo poliedro, ou mesmo, como diferentes aspectos dentro do mesmo processo.

Notemos que o primeiro tópico relacionado com o processo de diferenciação refere-se à diferenciação das dez funções simples, fato esse que, parece sinalizar um elemento de recepção dos trabalhos de Cauchy.

No mais, em termos do Cálculo Diferencial, o programa lista os diferentes processos de diferenciação das diferentes funções, bem como, trata do desenvolvimento das funções em séries, da teoria geral dos máximos e mínimos, das regras para a determinação do valor das funções que para determinados valores, tomam a forma $\frac{0}{0}$ e das aplicações geométricas do Cálculo Diferencial.

No tocante ao Cálculo Integral, o programa inicialmente parece estar inteiramente voltado ao processo de antidiferenciação tendo como um dos primeiros tópicos as integrais imediatas das funções diferenciais provenientes das funções simples. O programa se desenrola por meio dos processos de integração, da integração da diferentes funções, das equações diferenciais e das aplicações geométricas do cálculo integral.

Outrossim, em termos dos programas para o Cálculo Diferencial e Integral na Escola Politécnica, devemos esclarecer que temos analisado também o programa de 1898, mas o seu conteúdo é praticamente o mesmo que o programa de 1886, de forma que, podemos afirmar que o programa manteve-se estável durante esse período.

Em tempo, notemos que o professor Luiz Carlos Barbosa de Oliveira assinou ambos os programas como o lente responsável pela cadeira. Pardal (1984) relata que sua atuação na Escola Politécnica se deu desde 1877 como lente substituto do curso geral, regendo as cadeiras de Cálculo e Mecânica Racional; Geometria Descritiva, Álgebra, Geometria no Espaço, Trigonometria Retilínea e Geometria Analítica.

Pardal relata ainda que Barbosa de Oliveira tornou-se lente catedrático de Geometria Analítica em 1879. De fato, Pardal (1984) apresenta uma lista de professores da Escola Politécnica referente ao ano de 1904, a qual consta o nome de Luiz Carlos Barbosa de Oliveira como o Lente Catedrático da cadeira de Cálculo. Diante disso, podemos perceber a longa atuação de Luiz Carlos Barbosa de Oliveira como professor responsável pelo Cálculo Diferencial e Integral na Escola Politécnica.

Ademais, considerando a influência da filosofia positivista na Escola Politécnica e as obras de matemática escritas por professores adeptos do positivismo, entendemos que a análise das referidas obras pode, de alguma maneira, explicitar elementos importantes de recepção dos conceitos básicos do cálculo.

4.2.3.1 Ascensão do Positivismo na EPRJ

Auguste Comte (1798-1857) apresentou em sua clássica obra, *Cours de Philosophie Positive*, uma síntese do que havia em comum nos métodos e princípios de cada ciência, dentro da sua própria concepção. Silva (1999), em seu estudo acerca da relação entre o Positivismo e a Matemática no contexto brasileiro, nos traz a definição de Filosofia Positiva, dada pelo próprio Comte. “[...] *por filosofia positiva [...] entendo tão-somente o estudo das generalidades das diferentes ciências, concebidas como*

submetidas a um único método e como formando as diferentes partes de um plano geral de pesquisas” (COMTE, 1969, p. viii, apud SILVA, 1999, p.36)

Nesse sentido, Silva (1999) nos apresenta as quatro propriedades gerais que caracterizam a filosofia positiva, a saber:

- 1) O estudo da ciência positiva fornece-nos o único meio racional de pôr em evidência as leis lógicas do espírito;
- 2) a filosofia positiva deve conduzir a uma transformação do nosso sistema de educação;
- 3) o ensino científico pode ser considerado como a base da educação geral, verdadeiramente racional. Mas o estudo das ciências em geral não tem apenas o objetivo de transformar a educação, mas deve também ser o suporte para o desenvolvimento de ciências especializadas;
- 4) a filosofia positiva pode ser considerada como a única base sólida da reorganização da sociedade.

Diante disso, não fica difícil perceber a importância dada à Educação, dentro da filosofia positiva. No que tange à matemática, Comte propõe uma divisão entre Matemática concreta e abstrata, entendendo também que, *“a verdadeira origem de todo o sistema científico reside em decompor a ciência matemática em seus três grandes ramos: Cálculo, Geometria e Mecânica ”* (SILVA, 1999, p.82)

A chamada análise transcendente, na visão de Comte desempenhava importante papel dentro da matemática. *“A análise transcendente, tal como Leibniz a formulou, é que constitui sem dúvida, o mais alto pensamento que o espírito humano até o momento alcançou.”* (COMTE, 1975, p.111, apud SILVA, 1999, p.89) Assim, Silva (1999) ressalta ainda que, *“o cerne do Cálculo Infinitesimal está nas equações diferenciais, uma vez que o objeto de estudo desse cálculo é a montagem das equações que compõem o ponto de partida imprescindível sobre todas as investigações analíticas”* (SILVA, 1999, p.89)

Em termos do Cálculo Infinitesimal, Comte apresenta três concepções distintas, associadas respectivamente a Leibniz, Newton e Lagrange. É interessante observarmos que, ao mesmo tempo em que vê aspectos positivos, Comte traz críticas em cada uma das concepções. Assim, no tocante ao trabalho de Lagrange, pondera-se que:

A unidade completa do Cálculo e seu caráter puramente abstrato pode ser encontrada somente na concepção de Lagrange; por isso ela é a mais racional e a mais filosófica, pois é uma ampliação simples do cálculo comum, mas que, em seu estado atual, oferece dificuldades demasiadas para sua aplicação.

(COMTE, 1975, p.123, apud SILVA, 1999, p.90)

Dessa forma, embora considere a visão de Leibniz mais elevada, Comte considera que está fundamentada em princípios errôneos.

Leibniz, apressado em responder; tinha ele mesmo apresentado uma explicação manifestamente errônea, dizendo que ele tratava os infinitamente pequenos como incomparáveis, e que ele os negligenciava face às quantidades finitas como grãos de areia em relação ao mar, consideração que desnaturou completamente sua análise.

(COMTE, 1975, p.113, apud SILVA, 1999, p.91)

A partir das concepções referentes aos três métodos, Comte disserta a respeito da importância da utilização de diferentes métodos, no contexto do Cálculo. *“Em todas as outras partes da ciência Matemática, a consideração de diversos métodos para uma única classe de questões pode ser útil, independentemente do interesse histórico que ela apresente, mas aqui, ao contrário, ela é indispensável.”* (COMTE, 1975, p.124, apud SILVA, 1999, p.92)

Nessa linha, Silva (1999) explicita que, tanto Comte quanto Carnot entendem que os métodos de Leibniz, Newton e Lagrange são equivalentes. *“A exemplo de Comte, Carnot percebeu que os diversos métodos do Cálculo Infinitesimal, que vinham se desenvolvendo desde os antigos até Lagrange, eram métodos equivalentes, mas vistos sob diferentes perspectivas”* (SILVA, 1999, p.92)

As primeiras manifestações positivistas emergiram na Escola Central nos anos de 1850, de maneira ainda tímida. As teses de doutoramento apresentadas a partir de 1848 já apresentaram algumas referências ao nome de Auguste Comte. O período mais importante do positivismo ocorreu entre as décadas de 1870 e 1920. Nesse sentido, Silva (1999) relata que:

A partir de 1874, com o surgimento de obras como a de Luiz Pereira Barreto, intitulada *As Três filosofias*, e a atuação de Benjamim Constant. Quando ele começou a recomendar o livro-texto *Geometria Analítica*, de Comte, a seus alunos, inaugurou-se uma fase ampla divulgação das ideias positivistas.

(SILVA, 1999, p.242)

De fato, Silva (1999) destaca que a *Geometria Analítica* de Comte desempenhou um importante papel no ensino dessa disciplina, não somente na Escola Politécnica, mas servindo como fonte de inspiração para os primeiros livros de Geometria Analítica escrito por brasileiros, como o caso de Roberto Trompowsky Leitão de Almeida.

Nesse contexto de difusão da filosofia positivista, destaca-se a atuação de Benjamim Constant (1837-1891), não somente por sua rápida passagem como professor da Escola Politécnica, mas também por sua ação política. Em particular, após efetuar a troca da obra de Lacroix, tornando a Geometria Analítica de Comte conhecida tanto na Escola Politécnica quanto nas Escolas Militares.

Dessa forma, a Escola Politécnica consolidou-se como um palco de atuação do positivismo, tendo como atores principais, tanto o desempenho de significativos professores, quanto as várias obras inspiradas pela filosofia positivista.

4.2.3.2 Análise da obra *Theoria Elementar das Funções*

Nesse sentido, cabe-nos destacar inicialmente a atuação e a obra do positivista Licínio Athanasio Cardoso. Licínio Cardoso recebeu seu título de Engenheiro na Escola Politécnica em 1879, tendo sido professor na própria Escola Politécnica a partir do ano seguinte, segundo Silva (1999). No ano de 1885, apresentou sua Tese de Doutorado intitulada “*Theoria Elementar das Funções para servir de introdução ao estudo da álgebra*”.

Conforme já colocado, Silva (1999) afirma que Licínio atuou como professor da Escola Politécnica a partir de 1880. No entanto, devemos acrescentar que, segundo Miller (2003), Licínio lecionou Matemática Elementar (Aritmética, Álgebra e Geometria) na Escola Militar. De fato, na apresentação de sua obra fica claro sua titulação de Professor adjunto do ensino preparatório da Escola Militar.

Após sua apresentação da tese para a cátedra de Mecânica Racional, em 1887, Licínio foi nomeado professor catedrático dessa cadeira, tendo exercido por décadas essa função na Escola Politécnica. Foi também o primeiro presidente da seção de Ciências Matemáticas da Academia Brasileira de Ciências, em 1916, tendo permanecido até 1923 quando Amoroso Costa o substituiu.

Licínio foi conhecido por sua militância em favor do positivismo expressando, inclusive, suas convicções acerca da doutrina de Comte, em suas obras. Em particular, interessa-nos nesse contexto fazer a análise da obra “*Theoria Elementar das Funções*

para servir de introdução ao estudo da álgebra”, publicada em 1885, a qual também faz referências acerca do positivismo.

Figura 18: Teoria Elementar das Funções



Fonte: Bibliex – Biblioteca Franklin Dória

Com efeito, já na introdução deixa-se evidente a orientação segundo os fundamentos estabelecidos por Comte.

No prefácio, Licínio salienta que o texto foi escrito para servir de guia aos seus estudantes. *“Especialmente para servir de guia aos estudantes da aula que temos a honra de dirigir, a parte relativa às derivadas, foi escripta em 1884”* (CARDOSO, 1885)

Após apresentar uma longa introdução em termos de aspectos filosóficos, Licínio introduz uma primeira definição para o conceito de função, apresentando-o de forma bastante geral e completamente desvinculado de símbolos algébricos. *“Quando duas grandezas acham-se ligadas por uma lei qualquer, conhecida ou não, de modo que os valores de uma d’estas grandezas estejam subordinados aos valores das outras, diz-se que a primeira é função das últimas.”* (CARDOSO, 1885, p.1)

As quantidades apresentadas na definição de função são definidas posteriormente como variáveis, classificadas em dependentes e independentes, e as funções são ilustradas inicialmente por meio de situações como a queda de corpos, por exemplo.

Após a apresentação da definição de função são tecidos comentários de natureza filosófica em torno do conceito.

Logo no início do capítulo seguinte, o autor apresenta uma nova definição para o conceito de função baseada em Lagrange. A nova definição é vista como uma restrição da definição geral de função para o caso das chamadas funções algébricas. *“Chama-se função de uma ou mais quantidades variaveis, toda a expressão algebrica na qual estas quantidades entram de um modo qualquer, combinadas ou não com outras quantidades constantes.”* (CARDOSO, 1885, p.9)

As funções são classificadas a partir das chamadas funções simples, que são vistas como o fundamento para a formação de todas as outras funções. As dez funções simples são listadas conforme a figura abaixo.

Figura 19: Enumeração das Funções Simples

Ordem	Par	Função	Nome
1.ª	PAR	$f = a + x$	função somma.
		$f = a - x$	differença.
		$f = a \times x$	producto.
		$f = \frac{a}{x}$	quociente.
2.ª	PAR	$f = x^a$	potencia.
		$f = \sqrt[a]{x}$	raiz.
3.ª	PAR	$f = a^x$	exponencial.
		$f = \lg. x$	logarithmica.
4.ª	PAR	$f = \sin x$	circular directa.
		$f = \arcsin x$	inversa.
5.ª	PAR	$f = \cos x$	circular directa.
		$f = \arccos x$	inversa.

Fonte: Cardoso(1885)

Vale ressaltar que a explicitação das funções dessa maneira foi feita pela primeira vez por Cauchy em seu *Cours d'Analyse*, em 1821.

Destaquemos ainda que, apesar de termos sinais de recepção de Cauchy, a definição de função adotada permanece vinculada com a tradicional concepção euleriana, visualizando a função de uma quantidade variável como uma expressão analítica composta por números e quantidades constantes.

Após isso, depois de serem tecidos vários comentários acerca das diversas classificações, as funções passam a ser vista sob a ótica da noção de continuidade, definida como: “Diz-se que uma função é continua quando sabe-se que existem valores reais da variavel que correspondam a estados consecutivos da função por menor que seja a sua diferença.” (CARDOSO, 1885, p.25)

Após afirmar que a continuidade do primeiro par de funções é evidente, uma vez que, as variações de cada elemento são iguais aos da variável arbitrária, Cardoso enuncia um critério para comprovação algébrica do conceito de continuidade. “Para estabelecer, pois, a demonstração algébrica dessa continuidade, trataremos de provar que a diferença entre dous estados consecutivos, de cada uma dessas funções, correspondendo a valores reais da variavel, póde ser tão pequena quanto se quiser” (CARDOSO, 1885, p.25)

Nesse sentido, considerando a função $y = ax$ argumenta-se que é possível que dar a x um acréscimo real ζ , tal que a diferença $a(x + \zeta) - ax$ seja igual a ω , uma vez que se $a(x + \zeta) - ax = \omega$, tem-se que:

$$\zeta = \frac{\omega}{a}$$

Assim, esclarece-se que o aumento da variável depende apenas da base da função e da diferença entre os dois estados consecutivos, sendo independente do valor da variável que corresponde ao primeiro estado, o que não se dá com outras funções. Como exemplo, examina-se a função $y = \frac{a}{x}$ no intuito inicial de obter o valor real ζ que satisfaz a igualdade:

$$\frac{a}{x} - \frac{a}{x + \zeta} = \omega$$

Resultando em:

$$\frac{a\zeta}{x^2 + x\zeta} = \omega$$

Daí, considerando $\zeta = \frac{\omega x^2}{a - \omega x}$ fica provado, segundo Cardoso, que é possível sempre dar um acréscimo à variável para que essa função passe de um estado qualquer para outro, cuja diferença com este seja tão pequena quanto se queira.

Após isso, são salientadas situações em que um acréscimo finito da variável pode corresponder um aspecto infinito da função. No caso da função $y = \frac{a}{x}$, por exemplo, pondera-se que, quando x por um decréscimo finito, passa de um valor muito pequeno a zero, a função passa de um valor finito ao infinito, configurando, desta forma, um salto.

Esses saltos são definidos como saltos de continuidade definidos como da seguinte maneira. “*Toda a vez que uma função qualquer, real e finita durante o crescimento ou decréscimo da variável em um certo sentido, deixa de o ser quando a variável recebe um certo valor, para o continuar a ser depois, passa por uma solução de continuidade*” (CARDOSO, 1885, p.28)

Ao justificar que a função $y = (-a)^x$ é descontínua é concluído que “*a função, para passar de um estado a outro, não póde percorrer todos os intermediários e é por isso descontínua.*” (CARDOSO, 1885, p.32)

Assim, devemos destacar a presença da noção de continuidade estabelecida por Arbogast, referente à reflexão sobre os valores intermediários.

Uma das intenções de Cardoso nesse contexto é, por um lado, mostrar que todas as funções simples são funções contínuas e, por outro, fazer as referidas demonstrações por meio das chamadas relações fundamentais da álgebra. Dessa forma, Cardoso apresentou demonstrações, por meio das relações algébricas, de que os quatro primeiros pares de funções são funções contínuas.

No entanto, no momento de tecer as referidas demonstrações para as funções circulares, Cardoso apresenta uma distinção entre *funções concretas* e *funções abstratas*.

As funções abstratas são definidas como aquelas que exprimem um modo de dependência entre números que podem referir-se a grandezas quaisquer, como, por exemplo, as oito primeiras funções simples.

Por outro lado, as funções concretas exprimem um modo de dependência não entre números quaisquer, mas entre grandezas cuja origem e natureza ficam determinadas, por exemplo, as funções circulares.

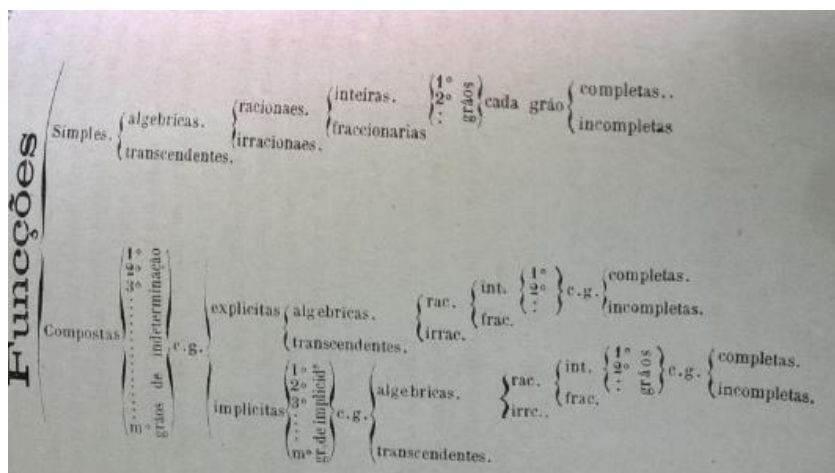
A partir dessa distinção, argumenta-se que a demonstração relativa às funções circulares é difícil e desnecessária. Difícil, por conta da complexidade de tecer a demonstração por meios algébricos; desnecessário, porque, em sua concepção, a continuidade das funções concretas não necessitam de mais provas, além das experiências seculares que a tornaram noção espontânea e axiomática.

Dessa forma encerra-se um longo capítulo, completamente direcionado à exposição e construção da visão concebida por Cardoso acerca do conceito e das várias classificações de função.

No intento de completar a apresentação em termos do conceito de função, dedica-se mais um capítulo acerca das funções compostas, definidas como sendo toda expressão algébrica em que entram duas ou mais funções simples.

O capítulo é dedicado à dissertação sobre a classificação dos diversos tipos de funções consideradas pelo autor, as quais são sintetizadas por meio do seguinte diagrama.

Figura 20: Diagrama contendo a classificação dos diversos tipos de funções



Fonte: Cardoso(1885, p.50)

Finalizando o capítulo, são tecidas considerações a respeito das funções elípticas. A noção de limite já é definida logo no primeiro parágrafo no capítulo referente à derivada. “*Chama-se limite de uma grandeza variavel, uma grandeza fixa da qual a primeira aproxima-se indefinidamente sem nunca poder atingil-a*” (CARDOSO, 1885,p.57)

Nessa visão salienta-se que a área do círculo é o limite da área dos polígonos inscritos e circunscritos quando o número de lados cresce indefinidamente.

Logo a seguir, sublinha-se que “*para que uma quantidade fixa seja o limite de uma quantidade variavel, não é bastante que sua diferença diminua continuamente, é necessário que essa diferença possa se tornar menor do que qualquer quantidade dada por menor que seja*” (CARDOSO, 1885, p.58)

Notemos que a concepção de limite reveste-se tanto de um caráter geométrico, quanto algébrico, uma vez que também está associada com o limite de grandezas variáveis, vistas nesse contexto como funções.

Nesse sentido, a concepção expressa por Cardoso por um lado, alinha-se com as primeiras reflexões sobre o conceito de limite tecidas por D’Alembert, pela forte presença do caráter geométrico, mas, por outro lado, notamos também uma concepção similar àquela expressa por Roger Martin, que entendeu o limite de uma quantidade variável como o valor que ela sempre tende em suas variações, sem jamais o alcançar podendo, entretanto, aproximar-se diferindo sempre por uma quantidade menor do que qualquer quantidade dada.

No tocante ao conceito de derivada, cabe-nos salientar a abordagem original apresentada por Cardoso, visto que todo o tratamento dado à noção de derivada é baseado em um peculiar conceito, denominado *estado principal*.

A noção de estado principal de uma expressão é iniciada a partir da indeterminação sintetizada por meio da representação $\frac{0}{0}$.

Dessa forma, define-se inicialmente a unidade como o *valor principal* de $\frac{0}{0}$, quando o símbolo provier da anulação de duas quantidades idênticas. Nessa linha de raciocínio, a unidade é vista como o valor principal dentre a infinidade de valores representados por $\frac{0}{0}$.

Logo em seguida é definido o *estado principal do produto* de uma quantidade qualquer por $\frac{0}{0}$ (provindo da anulação de duas quantidades idênticas) como sendo a

própria quantidade, uma vez que nessa maneira de pensar, $\frac{0}{0}$ pode ser substituído por 1. Assim, o estado principal de $A \times \frac{0}{0}$ é A .

Nessa linha de raciocínio, Cardoso segue argumentando que, por exemplo, a expressão dada por $y = \frac{a(x-b)}{c(x-b)}$ é constantemente igual a $\frac{a}{c}$ para todos os valores $x \neq b$, tornando-se uma expressão indeterminada quando $x = b$, sendo, todavia, seu estado principal $\frac{a}{c}$.

Dessa forma é definido o estado principal de uma expressão quando a variável é igual a n , por meio da notação $\mathcal{P}_n$. Segue então, de acordo com a notação, que:

$$\mathcal{P}_b \frac{a(x-b)}{c(x-b)} = \frac{a}{c}$$

Conforme já explicitado, o conceito de derivada concebido por Cardoso é baseado inteiramente na noção de estado principal de uma determinada expressão. Daí, considerando que, em toda função contínua, tanto Δx , quanto Δy , tendem simultaneamente para zero, define-se a derivada de uma função como o estado principal de $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ quando o acréscimo Δx torna-se zero. Assim, Cardoso afirma que, usando a notação de Lagrange, tem-se:

$$\mathcal{P}_0 \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Nesse ponto, de alguma maneira, Cardoso justifica sua escolha pela abordagem dada pelo “Sr Fleury”, ao mesmo tempo em que apresenta críticas às definições apresentadas após os trabalhos de Leibniz, Newton e Lagrange. Na visão de Cardoso, a definição de derivada não poderia ser dada como o limite da relação dos acréscimos da função e da variável quando Δx e Δy tendem para zero, argumentando que existe uma incompatibilidade com a definição adotada.

Se a derivada é o limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ não é esta relação, porque a variável nunca atinge o limite; mas o que se determina e chama-se derivada é um dos estados da relação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ quando indeterminada, o principal, e, portanto, a definição é contradictória com a noção de limite.

(CARDOSO, 1885, p.66)

Na concepção de Cardoso não existe a necessidade de demonstrar que toda função tem derivada, visto que, o símbolo $\frac{0}{0}$ tem sempre um estado principal da forma $A \times 1$. Por outro lado é reconhecido que definindo-se a derivada como limite da relação dos acréscimos da função e da variável, deve-se provar que, para toda função o limite existe.

Cardoso evidencia claramente sua concepção acerca dos trabalhos estabelecidos por Leibniz, Newton e Lagrange, tecendo, inclusive, duras críticas aos dois primeiros. Em sua visão, Leibniz ao servir-se da consideração dos infinitamente pequenos estava fundamentando sua construção sobre uma indução que ele mesmo não tinha a clareza necessária, dando lugar as mais extravagantes proposições. Nesse ponto, por exemplo, Cardoso não considera a igualdade $\frac{dy}{dx}$ rigorosamente exata, uma vez que, dy e dx são não nulos.

Já com relação a Newton, argumenta-se que serviu-se da consideração dos limites para representar os estados principais dos símbolos indeterminados e não os verdadeiros limites de grandezas variáveis, fundamentando sua construção sobre uma ideia falsa.

Devemos então observar a clara opção de Cardoso de evitar tanto a abordagem por meio dos infinitamente pequenos, quanto do método dos limites e, mesmo a abordagem algebrizante de Lagrange.

Assim, Cardoso adota uma abordagem completamente alternativa baseada nos trabalhos do “Sr Fleury”, fundamentado no conceito de *estado principal*, entendendo que “*este modo de considerar a derivada torna a sua noção mais clara e a sua existência mais compreensível*” (CARDOSO, 1885, p.66)

Dessa maneira, a partir daí são deduzidas as derivadas das funções, baseadas na concepção adotada. Na derivada da função quociente $y = \frac{a}{x}$, por exemplo, parte-se de $y + \Delta y = \frac{a}{x + \Delta x}$ e desenvolvendo a expressão, chega-se em:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-a \frac{\Delta x}{x^2}}{x^2 + x \Delta x}$$

Donde conclui-se que:

$$y' = \mathcal{P}_0 \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathcal{P}_0 \frac{-a \frac{0}{0}}{x^2} = \frac{-a}{x^2} = -\frac{a}{x^2}$$

Notemos que o método proposto, após os devidos desenvolvimentos, lança mão da substituição de Δx por 0, ao mesmo tempo que, substitui-se $\frac{0}{0}$ pela unidade, conforme podemos também observar por meio da dedução da derivada da função potência $y = x^a$. Dessa forma, tem-se que:

$$\Delta y = ax^{a-1}\Delta x + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2}x^{a-2}(\Delta x)^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{a-3}(\Delta x)^3 + \dots$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = ax^{a-1} \frac{\Delta x}{\Delta x} + \frac{a(a-1)}{1 \cdot 2}x^{a-2}\Delta x + \frac{a(a-1)(a-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{a-3}(\Delta x)^2 + \dots$$

Nesse ponto, anulando-se Δx e suas potências chega-se em:

$$\mathcal{P}_0 \frac{\Delta y}{\Delta x} = ax^{a-1} \frac{0}{0}$$

E, conseqüentemente, após considerar $\frac{0}{0}$ como a unidade, conclui-se que

$$y' = \mathcal{P}_0 \frac{\Delta y}{\Delta x} = ax^{a-1}$$

A partir daí, toda a teoria restante é construída a partir dessa fundamentação.

Assim, notemos que Cardoso baseia algumas de suas concepções relativas a noção de estado principal e a derivada fazendo referências ao “Sr Fleury”, evidenciando a influência exercida por sua obra.

Em verdade, o “Sr Fleury” é P. Henry Fleury, autor do livro “*Le Calcul Infinitésimal fondé sur des principes rationnels et précédé de la Théorie Mathématique de l’Infinit* (1879)”.

Fleury apesar de ser um simpatizante do positivismo, não poupa críticas à Comte e expressa discordâncias relacionadas à algumas de suas concepções.

Cardoso atribui sua noção de “estado principal” à Fleury. No entanto, a referida noção parece constituir-se em um caso especial de recepção de dois conceitos apresentados por Fleury: *vraie valeur* e *valeur principale*.

Por outro lado, apesar da obra de Licínio ter forte orientação positivista, conforme fica evidente em seu prefácio: “*A opinião de Comte tem para nós o peso de um dogma*” (CARDOSO, 1885, p.7) , devemos salientar a análise tecida por Silva (1999), ponderando que Licínio não parece seguir totalmente a filosofia comtiana.

Algumas vezes, Licinio Cardoso não parece um comtiano muito convicto, parecendo querer fugir das regras restritas do sistema de Comte e formulando suas próprias, como é o caso das categorizações que apresenta, sobre funções simples e compostas. Ele inclusive atreve-se a entrar em terreno proibido, como é o caso das funções elípticas, que Comte não abordou. (SILVA, 1999, p.268)

Dessa forma vemos que, tanto Cardoso quanto Fleury, não seguiram a filosofia positivista em sua integralidade.

Contudo, ambos os autores, assim como Comte, apresentam críticas aos métodos desenvolvidos por Leibniz, Newton e Lagrange.

4.2.3.3 Análise do Manuscrito referente ao caderno de Cálculo Integral

Em nossas pesquisas na busca por novas fontes, conseguimos localizar um manuscrito na Biblioteca Nacional do Rio de Janeiro. Trata-se de um caderno de Cálculo Integral do ex-aluno Lúcio Correa e Castro datado de cerca do ano de 1901.

Enfatizamos a importância desse registro, uma vez que, trata-se de um importante instrumento no intento de reconstituir aspectos acerca do ensino de cálculo na Escola Politécnica.

O conceito de integral expresso na fonte está intimamente ligado com processo de anti-diferenciação, concebido como soma de diferenciais.

Supponhamos que, sendo dada a diferencial de primeira ordem $E(v)dv$ queremos integra-la procurar a função finita que por diferenciação produziu a diferencial considerada. Isto se exprime

pondo antes da função diferencial o signal $\int$, que quer dizer integral de $E(v)dv$. Este signal é a inicial da palavra *somma* e exprime *sommas* de diferenciais. (BNRJ CASTRO, 1901, p.3-4)

Nota-se uma preocupação na construção do conceito por parte do expositor, uma vez que, procura trazer uma sequência de ideias procurando fundamentá-lo.

Nesse sentido, a partir de uma função finita $y = f(u)$ parte-se para a construção do conceito de integral definida, atribuindo, inicialmente, valores crescentes a u crescentes, de tal forma que:

$$\begin{aligned} y_0 &= f(u_0) \\ y_1 &= f(u_0 + du) = f(u_0) + df(u_0) = y_0 + dy_0 \\ y_2 &= f(u_0 + 2du) = f(u_0 + du + du) = f(u_0 + du) + df(u_0 + du) \\ &= y_0 + dy_0 + dy_1 \end{aligned}$$

Tendo de forma geral:

$$y_n = y_0 + dy_0 + dy_1 + \dots + dy_{n-1}$$

Assim, após serem adicionados dy_n em ambos os membros da igualdade chega-se à:

$$y_n + dy_n = y_0 + dy_0 + dy_1 + \dots + dy_{n-1} + dy_n$$

O segundo membro da igualdade é considerado como a soma de todos os estados de $f(u)du$ para os valores das variáveis constituídas.

Dessa forma, a noção de integral definida é caracterizada dentro da sintetização do raciocínio estabelecido.

Estabelecamos agora a noção de integral definida. Suponhamos atribuímos a u valores crescentes por graus infinitamente pequenos a partir de u_0 , valor determinado até certo valor determinado u_1 . Designando por $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n$ os valores de y que correspondem a $u_0, u_0 + du, u_0 + 2du, \dots, u_0 + ndu = u_1$ obtemos a formula $y_n + dy_n = y_0 + dy_0 + dy_1 + \dots + dy_{n-1} + dy_n$, sendo $dy_0 + dy_1 + \dots + dy_{n-1} + dy_n$ a *somma* dos valores de u , compreendidos entre os valores estabelecidos; para representar essa soma emprega-se a notação de Fourier $\int_{u_0}^{u_1} f(u)du$ e lê-se: integral de $f(u)du$ entre os limites u_0 e u_1 . (BNRJ CASTRO, 1901, p.5)

Logo em seguida, a caracterização é concluída com a apresentação da representação geométrica da integral definida, como a área compreendida entre uma curva e o eixo das abscissas.

Assim, vemos que o conceito de integral exposto na fonte relaciona-se diretamente com a relação de anti-diferenciação e com a soma de diferenciais, sendo a noção de área sob a curva visualizada como consequência das definições tecidas.

4.2.3.4 Decadência do ciclo de influência da Filosofia Positivista na Escola Politécnica e a atuação de uma nova geração.

A influência positivista na Escola Politécnica já tem sido devidamente comentada na historiografia da matemática no Brasil. De fato, temos visto nesse trabalho várias citações à Comte nas teses defendidas, além da forte influência positivista na abordagem e na apresentação dos conceitos matemáticos na obra de Licínio Cardoso.

Por outro lado, a atuação de um importante personagem foi considerada como primordial para a decadência do ciclo de influência da filosofia de Comte: Otto de Alencar Silva (1874-1912).

Com efeito, a atuação de Otto de Alencar Silva destacou-se sobremaneira no contexto científico brasileiro na virada entre os séculos XIX e XX. Nascido em Fortaleza, graduado na Escola Politécnica do Rio de Janeiro, no ano de 1893, com dezenove anos de idade, Otto de Alencar começou a ministrar cursos na Escola Politécnica apenas dois anos depois de formado, tendo permanecido por vários anos como professor dessa importantíssima instituição.

Certamente, tanto como aluno quanto em sua atuação como professor, Otto de Alencar teve contato com a filosofia positivista na Escola Politécnica. No entanto, sua atuação foi caracterizada por seus esforços no intento de consolidar o ciclo de ruptura da influência da ideologia positivista.

Nesse contexto, Otto de Alencar ousou publicar um artigo⁹⁷, em 1898, comentando e apontando erros de conteúdo cometidos por Comte em sua *Synthèse Subjective*. Dessa forma, consolidou-se não somente por ser uma das principais vozes

⁹⁷ Artigo intitulado: *Alguns erros de mathematica na Synthèse subjective de A. Comte*, publicada na Revista da Escola Politécnica, em 1898.

contra o positivismo, mas por sua grande proatividade na busca pelo conhecimento matemático.

A publicação do referido artigo é considerada por Silva (1998) como um verdadeiro marco, estabelecendo, a partir deste momento, “*o começo do esgotamento da influência da doutrina do mestre francês junto àqueles que faziam ciência no país de então.*” (SILVA, 1998, p.21)

De fato, em termos de seus valiosos trabalhos, podem ser encontrados elementos na historiografia evidenciando algumas de suas relevantes atividades desempenhadas.

Silva (1993), por exemplo, concebe um artigo a respeito das correspondências científicas mantidas entre Otto de Alencar Silva e o conceituado matemático português Francisco Gomes Teixeira, no período de 1899 à 1906, pertencentes ao arquivo da Universidade de Coimbra.

Nesse sentido, Silva (2006) também faz uma análise das correspondências mantidas por Otto de Alencar com outros matemáticos de extrema relevância como Gaston Darboux e Henri Poincaré.

Dessa forma, ao observarmos não somente os trabalhos publicados, mas o esforço de Otto de Alencar em estabelecer vínculos com alguns dos principais matemáticos europeus, podemos notar um espírito de inquietação no intento de estabelecer uma produção própria.

Todavia, a inquietação evidenciada não se restringiu à produção matemática, mas também com ao ensino tecido na Escola Politécnica, conforme explicitou em sua correspondência com Gomes Teixeira. “*Conquanto de um modo geral eu não possa nos meus cursos desenvolver as idéias que V.Ex. apresenta nas memórias, por serem de caracter muito elevado, procurei esboçar, em uma das lições do anno findo, o assumpto da penúltima memória que recebi*” (Carta de 30 de junho de 1903, apud SILVA, 1993)

A busca pela excelência no sentido de instituir uma produção própria em consonância com a produção estabelecida pelos matemáticos europeus pode ser evidenciada quando observamos o esforço de Otto de Alencar Silva em adquirir livros e revistas especializadas dos Estados Unidos e países europeus, consolidando uma excelente biblioteca dentro do referido contexto.

O gosto e interesse de Otto de Alencar pelas matemáticas fizeram com que adquirisse, constantemente, livros didáticos e revistas

especializadas, recém publicados na Europa e nos Estados Unidos da América do Norte. Formara assim, uma excelente biblioteca particular, para os padrões da época. Por exemplo, livros como: *Traité d'analyse* e *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes*, de E. Picard; *Cours d'analyse mathématique*, de E. Goursat; *Cours d'analyse*, de C. Hermite; *Cours d'analyse de l'École Polytechnique*, de C. Jordan; *Électricité et optique*, e *Théorie des tourbillons*, de H. Poincaré, dentre outros, foram introduzidos por ele na Escola Politécnica do Rio de Janeiro, ao mesmo tempo que incentivava colegas e bons alunos ao estudo sério das matemáticas, mesmo trabalhando em uma escola de engenharia.

(SILVA, 1998, p.18-19)

Nesse ponto, podemos entender o notável esforço individual de Otto de Alencar como um comportamento que beira ao autodidatismo, uma vez que, sua prática parece destoar enormemente das práticas estabelecidas pelos professores da Escola Politécnica nesse tempo.

Diante do exposto, a atuação de Otto de Alencar Silva parece ter inaugurado uma nova geração na Escola Politécnica que buscava não somente a quebra da influência positivista, mas também ansiava estabelecer uma produção própria em consonância com o que era produzido pelos matemáticos europeus.

Manuel Amoroso Costa (1885-1928) também é apontado na historiografia da matemática no Brasil como um sucessor do pioneirismo exercido por Otto de Alencar, foi professor da Escola Politécnica, a partir do ano de 1912 e um dos fundadores da Academia Brasileira de Ciências, fundada em 1916.

A atuação de Amoroso Costa foi direcionada à matemática e à astronomia, tendo também preocupado-se com o ensino. Em termos de sua produção acadêmica, Ribeiro (2015) listou 26 artigos publicados em 16 anos de carreira.

Uma parte de sua formação se deu na França, onde ficou em um período total de 3 anos e 3 meses. Em 1928, por ocasião de sua segunda viagem realizou na Sorbonne quatro conferências sobre geometrias não-arquimedianas e uma conferência intitulada *L'univers infini. Quelques aspects du problème cosmologique* no Collège de France, no seminário organizado por Jacques Hadamard.

Dentre as ideias apresentadas no seminário Hadamard destacaram-se os resultados obtidos dentro do ambiente sobre o universo imaginado e descrito por Émile Borel. Nesse sentido, Silva (1999) aponta que um dos resultados demonstrados por Amoroso Costa foi incorporado nos trabalhos de Borel.

Nesse ponto, cabe-nos, por um lado, apresentar a atuação de Amoroso Costa em seus trabalhos de matemática e astronomia e, por outro lado, reconhecer a importância de sua atuação no intento de estabelecer uma nova cultura científica na Escola Politécnica.

Tudo indica que já é tempo de se fazer alguma coisa em favor de uma cultura de melhor qualidade. Em sua grande maioria, como é de desejar, os moços hão de sempre escolher as carreiras práticas que asseguram á nação a sua vida material. Alguns, entretanto, não hesitam mais em preferir os trabalhos da intelligencia pura, sem os quaes nada se constróe de realmente grande. Abandonar ao autodidactismo esses espiritos de escól é esbanjar uma inestimavel riqueza.
(RAMOS, 1933, apud SILVA, 1999)

Nesse sentido, devemos citar a valorização dada por Lélío Gama ao trabalho estabelecido por Otto de Alencar, ao mesmo tempo que reconhece Amoroso Costa como um sucessor da atuação de Otto.

Amoroso Costa teve este privilégio de nos fazer sentir, a par do belo na arte, o belo na filosofia das ciências puras. Ele nos fez ver, em suma, que o sentimento e a intelligência são as duas liras secretas de que o homem extrai as melodias que consagra à natureza. Assim, sob esse ponto de vista educativo, ele completa e dilata a influência de Oto de Alencar na formação do espírito matemático que hoje predomina na nossa Escola Politécnica. Oto de Alencar representa, na evolução das idéias matemáticas entre nós, um traço de união entre a antiga escola positivista, cujo anacronismo ele rpóprio evidenciou, e a escola moderna, cujos princípios foi ele também o primeiro a propugnar. Coube, porém mais tarde a Amoroso Costa a oportunidade de proferir a última sentença condenatória de predomínio das doutrinas de Comte.
(PARDAL, 1984, apud SILVA, 1999)

Theodoro Augusto Ramos (1895-1935), importante personagem na história da matemática no Brasil, também se expressa com relação à seu antigo professor e companheiro de trabalho.

Conheci Amoroso Costa em 1914, na Escola Polytechnica do Rio, quando leccionava a Astronomia theorica; era então, aos 30 annos de idade, o professor substituto da secção de Topografia e Astronomia. Lembro-me de sua exposição clara e methodica, na qual as palavras surgiam com naturalidade e precisão, os calculos se alinhavam na pedra sem um engano ou uma hesitação, e a materia era apresentada com um cunho proprio e elevado. Estreitamos as nossas relações em 1918, no Rio, por occasião de minha defesa de these para o doutorado em Sciências Physicas e Mathematicas.
(RAMOS, 1933, apud SILVA, 1999)

Lélio Gama em seu discurso no V Colóquio Brasileiro de Matemática, em 1965, relata seu sentimento de desconforto na Escola Politécnica na ocasião em que conheceu Theodoro Ramos.

Sentia-me desanimado nas primeiras semanas do curso, quando um dia, no pátio da Escola, ouvi alguém dizer, num grupo próximo: “Este problema só pode ser resolvido com o emprêgo das funções elíticas”. As palavras causaram-me certo espanto, pois era quase proibido, naquela época, falar em funções elíticas – funções pagãs, não canonizadas. Voltei-me, entre curioso e surpreso. E foi assim que conheci quem veio a se tornar, dali por diante, até seu prematuro desaparecimento, um grande amigo, um companheiro constante de lutas e de esperanças: Teodoro Ramos. Naquela mesma tarde, descendo juntos a rua do Ouvidor, percebi, desde logo, que ele compartilhava de meu desencanto e de minhas aspirações comuns e os moldes oficiais, vigentes no ensino da matemática.

(GAMA, 1965, p.26)

Em sua descrição, Gama deixa evidente a situação em que, mediante as circunstâncias, se viram obrigados a estudarem por conta própria, evidenciando, dessa maneira, uma situação em que os estudantes tiveram que optar por uma postura autodidata, prática possivelmente já adotada desde Otto de Alencar.

E assim foi que, no curso básico da Escola, tivemos de estudar, durante algum tempo, duas matemáticas: uma para fazer exames, e outra, muito diferente, para uso próprio. Esta duplicidade não passou despercebida de alguns mestres, criando-se assim uma situação delicada. Teodoro, mais ousado, não procurou velar, no exame oral de cálculo, a independência de seu espírito. Resultado: grau nove. Eu, por meu lado, escrevi na pedra, em dado momento, com descuidada sinceridade, que uma certa quantidade era menor do que zero. Menor do que zero?! Grau nove.

Sentiamo-nos, assim, inteiramente privados de qualquer orientação. Otto de Alencar, espírito matemático mais evoluído, que conseguira desvencilhar-se da bússola positivista, falecia no mesmo ano de nosso ingresso na Escola. E foi assim que tivemos que enfrentar, de corpo e alma, as angústias do autodidatismo.

(GAMA, 1965, p.26)

Com efeito, Theodoro Ramos se juntou às vozes que já há alguns anos clamavam por uma nova prática na Escola Politécnica. Nesse contexto, conforme relato de Lélio Gama, a tese defendida por Theodoro Ramos causou extremo alvoroço.

Teodoro Ramos, ao fim do curso, apresenta sua tese de doutorado, sobre funções reais de variável real. Este acontecimento, criou, na Escola, uma atmosfera densa, opaca, cheia de apreensões, de parte a

parte. Um jovem estudante desafiava os cânones oficiais com uma tese estranha, um trabalho exótico. Sussurra-se pelos corredores. Professores grupam-se, prognosticando os lances da peleja próxima. Preparam-se, por fim, as armaduras intelectuais, para o embate solene da defesa da tese. Vou relatar um episódio desta defesa, ou, melhor, desta acusação. Teodoro se referira, em seu trabalho, a uma certa propriedade que se verificava no domínio de existência de uma função “salvo talvez”, dizia ele “nos pontos de um conjunto de medida nula”. Este “salvo talvez” era a cunhagem, em língua portuguesa, da expressão “sauf peut-être” dos autores franceses. Era uma adaptação semelhante ao uso atual do sintético “se e só se”, oriundo do “if and only if” dos matemáticos de língua inglesa. Queria ele afirmar que a propriedade em questão podia deixar de se verificar no campo de existência da função, mas que, neste caso, os pontos excepcionais formariam um conjunto de medida nula. Pois meus senhores, neste ponto da tese, o autor foi censurado com veemência, mais ou menos nos seguintes termos: “O Sr. Pretende ser um matemático rigoroso. No entanto, emprega, no seu raciocínio matemático, o advérbio “talvez”, que denota incerteza, imprecisão, ambiguidade”. Como era de se esperar, grau nove. Quando abracei Teodoro, pelo resultado, disse-lhe: “Se lhe tivessem dado grau dez eu não o felicitaria com o mesmo entusiasmo” (GAMA, 1965, p.26-28)

Diante disso, cabe-nos evocar o relevante estudo tecido por Bonfim (2013) sobre a tese intitulada *Sobre as Funções de Variáveis Reais*, defendida por Theodoro Ramos, em 1918.

O objetivo central da tese foi estudar a teoria das funções de variáveis reais sobre a noção de polinômio, utilizando a representação efetiva das funções somáveis de uma variável, examinando a representação das funções somáveis de duas variáveis por meio da integral dupla de Weierstrass, conforme nos traz Bonfim (2013).

Ainda no início de sua análise, Bonfim (2013) ressalta que Theodoro Ramos fez uso dos resultados obtidos por Borel, Baire, Lebesgue, Tonelli e Weierstrass, revelando, dessa maneira que, o estudo dos trabalhos dos referidos matemáticos foi fundamental para o estabelecimento de sua tese.

A theoria das funções de variáveis reais que até o último decennio do seculo passado jazia em relativo esquecimento, desenvolveu-se de modo extraordinário após os trabalhos de E. Borel sobre a medida dos conjuntos e as teses de R. Baire e H. Lebesgue sobre as funções descontínuas e a integração. Recentes estudos visam principalmente a simplificação da exposição geral da theoria. Constitui um dos objectivos deste modesto trabalho mostrar como se é naturalmente levado a basear a theoria das funções de variáveis reais sobre simples noção de polynomio.

(RAMOS, 1918, apud BONFIM, 2013, p.69)

De fato, por um lado devemos destacar os conceitos já modernizados, no sentido das exigências correspondentes para formação de matemáticos nas universidades, referentes às definições de conjuntos de medida nula, convergência uniforme por meio do critério de Cauchy para limites, continuidade de uma função em um intervalo em termos de uma sequência de polinômios que converge uniformemente em todos os pontos desse intervalo, definição de integral apresentando as mesmas características constantes nos trabalhos de Borel e Lebesgue e, por outro lado, os resultados demonstrados fazendo uso de recentes trabalhos de matemáticos europeus.

Nesse sentido, Bonfim (2013) destaca que na segunda parte de sua tese, ao tratar da teoria das funções somáveis, Theodoro baseia-se nos conceitos apresentados por Baire em sua tese de doutoramento, defendida em 1899, cuja banca foi presidida por Darboux.

Assim, ao tratar da teoria das funções somáveis, fica ainda mais evidente a familiaridade de Theodoro Ramos com os recentes trabalhos tecidos por Borel, Weierstrass e Lebesgue. Bonfim (2013) explicita que Theodoro a partir de uma demonstração do teorema de Weierstrass relativo às funções contínuas contida no livro de Borel “Leçons sur les fonctions de variables réelles” conclui que consegue-se representar uma função contínua qualquer pela expressão:

$$\psi(x, k) = \frac{1}{k\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-\left(\frac{u-x}{k}\right)^2} du$$

A partir daí, Theodoro expõe sua ideia de realizar uma generalização da integral $\psi(x, k)$ de forma diferente daquela já feita por Lebesgue.

Lendo o estudo que fez Lebesgue nas suas “Leçons sur les séries trigonométriques” sobre a representação de uma função sommable pelas sommas de Féjer, tivemos a idéia de realizar identica generalização para a integral $\psi(x, k)$, utilizando parte dos raciocínios alli adoptados, generalização esta que aqui apresentamos. Este resultado já foi entretanto obtido por H. Lebesgue como consequencia de um criterio geral applicavel às integrais singulares das funções sommaveis de uma variavel. A memória de H. Lebesgue sobre este assumpto foi publicada nos Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, 3ª série, toma I, que acabemos que receber da Europa. Conservamos a nossa demonstração que differe da de Lebesgue por ser directa. A demonstração de Lebesgue relativas ás somas de Féjer que se encontra nas “Leçons sur les séries trigonométriques” está

visivelmente errada. M. Fréchet no seu artigo de Encyclopédie des Sciences Mathématiques (t. III, 1º vol., 2º fascículo, edição francesa, 1912), diz que a demonstração primitiva de H. Lebesgue publicada na revista alemã Math. Ann. 61, (1905), que não conhecemos, acha-se isenta de erros. Na sua memória já citada nos Annales de la F. des S. de Toulouse, H. Lebesgue rectifica o seu engano e mostra que a referida proposição pode ser obtida como consequência do critério geral relativo às integraes singulares.

(RAMOS, 1918, apud BONFIM, 2013, p.80)

Bonfim (2013) após seu estudo apresenta os autores citados por Theodoro com maior relevância em seu trabalho.

Émile Borel (1871-1956) com seu trabalho sobre medida dos conjuntos; Henri Lebesgue (1875-1941) com seu estudo sobre integração; Karl Weierstrass (1815-1897) no tocante à representação efetiva das funções somáveis de uma variável pela integral de Weierstrass; Leonida Tonelli (1855-1946) referente ao estudo relativo aos polinômios de Landau de duas variáveis para a representação efetiva das funções somáveis de duas variáveis; e R. Baire (? - ?) por meio do trabalho sobre funções descontínuas, pois as funções de Baire enlaçam o teorema fundamental proposto por Theodoro Augusto Ramos em sua tese.

(BONFIM, 2013, p.88)

Em tempo, cabe-nos trazer o levantamento feito por Bonfim acerca dos autores e obras utilizadas por Theodoro Ramos em sua tese.

Figura 21: Autores e obras utilizadas por Theodoro Ramos em sua Tese

- R. Baire, Leçons sur les théories générales de l'Analyse, t. 1. (página 11)
- _____. Leçons sur les fonctions discontinues.
- E. Borel - Comptes-Rendus, Journal de Jordan, 1912.
- _____. Leçons sur la théorie des fonctions, 2a edição, 1914, Note VI.
- _____. Leçons sur les fonctions monogènes, 1917.
- _____. Leçons sur les fonctions de variables réelles. (páginas 42, 54, 63, 74)
- _____. Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1895.
- Gomes Teixeira – Curso de Analyse, t. 1, 4ª edição.
- Goursat – Cours d'Analyse, t. 1, 3ª edição, 1917. (páginas 454, 486)
- J. Tannery- Introduction à la théorie des fonctions, t. 1, 2a edição.
- _____. Leçons d'Algèbre et d'Analyse, t. 1. (página 72)
- Darboux – Annales de l'Ecole Normale Supérieure, 1875.
- H. Lebesgue apud Cours d'Analyse de Goursat, t.1, 3a edição, 1917.
- H. Lebesgue – Leçons sur l'intégration. (páginas 70, 71, 114)
- H. Lebesgue apud E. Borel – Leçons sur les fonctions de variables réelles.
- _____. Leçons sur les séries trigonométriques. (página 14)
- _____. Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives, 1904. (página 124)
- _____. Leçons sur les séries trigonométriques, 1906. (página 13)
- _____. Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse 3^{ème} série, t.1.
- H. Lebesgue (revista alemã Math. Ann. 61, 1905) apud M. Fréchet – Encyclopédie des Sciences Mathématiques, t. 3, v. 1, 2º fascículo, edição francesa, 1912.
- _____. Annali di Matematica pura ed applicata, serie III, tomo VII, 1902.
- S. Pincherle – Lezioni di Calcolo, 1915.
- Octacilio Novaes - Sobre o Calculo differencial (formula de Peano).
- S. Bernstein apud D'Adhémar – Leçons sur les principes de l'Analyse, t.2, 1913. (página 273).
- F. Riesz – Comptes-Rendus, t. 148.
- P. Montel – Leçons sur les séries de polynomes à une variable complexe, 1910.
- M. Potron – Sur une formule générale d'interpolation, Bulletin de la Societé Mathématique de France, 1906.
- G. Vitali – Sui gruppi di punti e sulle funzione di variabili reali, Atti Accad. Torino, t. 43, 1907-1908.
- G. Fubini – Sugli integrali multipli, Rendiconti Ac. dei Lincei, serie 5, t. 16, 1907, Roma.

Fonte: Bonfim (2013, p.88-89)

A análise da tese de Theodoro Ramos feita por Bonfim (2013) parece deixar evidente a contemporaneidade de sua pesquisa. Não é difícil perceber a familiaridade de Theodoro Ramos com os resultados obtidos principalmente por Borel, Lebesgue e Weierstrass, contribuindo também para o desenvolvimento da teoria. Nesse sentido, Bonfim chega a afirmar que:

É notório pensar que um brasileiro tenha se dedicado a estudar um tema como este em sua tese de doutoramento, sobretudo devido à atualidade do assunto para a época e a importância do teorema/resultado em questão, juntando o seu nome ao de outros matemáticos de renomada importância mundial para o desenvolvimento da matemática da época. (BONFIM, 2013, p.106)

Nesse ponto, cabe-nos pontuar que, o acesso de Theodoro Ramos a uma literatura tão atualizada talvez tenha sido fruto direto do trabalho de Otto de Alencar, no sentido de ter consolidado uma significativa biblioteca após a aquisição de livros e revistas especializadas dos Estados Unidos e da Europa.

Dessa forma, podemos perceber que mesmo em um contexto que não necessariamente favoreceria o desenvolvimento científico, a atuação de um grupo de devotados estudantes pôde estabelecer um ambiente que permitia o cultivo de uma matemática em consonância com os estudos estabelecidos principalmente na Europa.

Diante do que já foi explicitado, nos parece de que a atuação de Otto de Alencar foi decisiva no sentido de estabelecer um novo momento, por um lado protagonizando a luta contra a ideologia positivista e, por outro lado, influenciando por meio de uma nova postura de pesquisa, colaborando, desta maneira, com uma efetiva mudança na cultura científica da Escola Politécnica.

De fato, podemos perceber que a prática estabelecida por Otto de Alencar, bem como daqueles que se destacaram posteriormente, em particular, Amoroso Costa e Theodoro Ramos foram permeadas pela comunicação iminente com matemáticos europeus com plena produção acadêmica e pela ardente busca do estabelecimento de uma produção própria.

Diante dessa nova realidade que estava saindo à cena, Lélío Gama descreve que o ambiente moldado por tantas décadas não cederia facilmente. Dessa forma, apesar da natural resistência, podemos inferir que os trabalhos estabelecidos por Otto de Alencar Silva, Amoroso Costa e Theodoro Ramos, entre outros, impulsionaram uma nova postura de pesquisa, na busca por uma própria produção, a essa altura, já em

consonância com trabalhos estabelecidos por Gomes Souza, Weierstrass, Borel, Lebesgue, por exemplo.

4.2.3.5 Algumas Considerações sobre o desenvolvimento do Cálculo na Escola Politécnica do Rio de Janeiro

Diante dos aspectos estudados e explicitados no presente capítulo, destacamos a forte presença dos chamados métodos dos infinitamente pequenos, método dos limites e método das derivadas nos documentos analisados, a partir da segunda metade do século XIX.

Particularmente, a presença dos referidos métodos se deu por meio de contraposições entre os mesmos, sendo destacados aspectos positivos e negativos, ora preferindo-se um deles, ora simplesmente visualizando-os como métodos diferentes de um mesmo processo, o processo da diferenciação.

Por outro lado, cabe-nos destacar a posição de Boucharlat frente a essa questão. Zerner (1994) apresenta a versão desse autor destacando que “*Boucharlat disse que não há razão de escolher entre o método dos limites, dos infinitamente pequenos e o de Lagrange, “os quais se formam um único”*”⁹⁸ (ZERNER, 1994, p.45)

Algumas teses na Escola Militar já destacavam esse aspecto. A tese proposta por Medeiros (1850) expressa uma contraposição entre o método dos limites e o método dos infinitamente pequenos, expondo vantagens e falhas de cada um, no intuito de defender o uso dos infinitamente pequenos.

A tese tecida por Peixoto (1853) apresenta uma contraposição entre o método dos infinitamente pequenos, o método dos limites e o método de Lagrange, chegando a conclusão de que o conceito de diferencial é o elemento unificador dos três métodos.

Com effeito, no methodo infinitesimal as grandezas infinitamente pequenas vem em ultima analyse a reduzir-se, com os desprezos dos infinitamente pequenos de ordens superiores, a differenciaes: no methodo dos limites as relações, entre o augmento das grandezas variaveis, se tornão quando se passa aos limites a ser relações entre differenciaes: e, enfim, no methodo de Lagrange as funcções derivadas que compõem o desenvolvimento do augmento da funcção primitiva, não dão outra cousa mais senão os coefficients differenciaes de diversas ordens como já bem o sabemos.

(PEIXOTO, 1853, p.46)

⁹⁸ Bourcharlat dit qu'il n'y a pas de raison de choisir entre la méthode des limites, celle des infiniment petits et celle de Lagrange «qui n'en forment au fond qu'une seule »

Nesse sentido, lembremos ainda do discurso proferido pelo professor Antônio José do Amaral, por ocasião da inauguração da Escola Central ressaltando a contraposição a ser feita nas aulas de cálculo, entre os métodos dos infinitamente pequenos e o método dos limites, ou das fluxões.

Comparareis o *Calculo de Leibniz*, que tem por objeto a differença das grandezas infinitamente pequenas com o METHODO DAS FLUXÕES de *Newton* e tomarei ainda hoje parte nessa grande questão que dividio o mundo scientifico e estimulou o amor proprio da Inglaterra e de Allemanha.

(MOREIRA, 2014, p.241-242, GRIFO NO ORIGINAL)

Por outro lado, lembramos que a filosofia positiva entendia que os métodos do Cálculo Diferencial eram equivalentes.

Finalmente, percebemos que tal prática é finalmente materializada como parte integrante do programa de 1886, permanecendo durante vários anos.

Dessa maneira, lembrando que Boucharlat foi considerado um dos “pontos de acumulação” e que foi um dos autores citados nas teses estudadas, podemos considerar a hipótese de que a prática do confronto dos métodos estabelecida no Brasil, pode ter sido influenciada tanto pela obra de Boucharlat quanto pelo positivismo, ou ainda, por uma combinação entre essas.

4.3 Desdobramentos do Ensino Superior de Matemática no Rio de Janeiro.

A primeira organização universitária no Brasil surge por uma iniciativa do Presidente Epitácio Pessoa no ano de 1920, criando por meio de um decreto a Universidade do Rio de Janeiro. Em termos práticos, a nova Universidade consistia apenas em uma reunião de escolas, as quais até esse momento funcionavam de maneira isolada, tais como a Escola Politécnica do Rio de Janeiro, Faculdade de Medicina do Rio de Janeiro e a Faculdade de Direito do Rio de Janeiro.

No entanto, conforme aponta Medeiros (1996), diante do modelo implementado em termos da união de diferentes escolas por meio de um ato administrativo, vários educadores brasileiros já se levantavam pleiteando reformular o conceito de universidade pleiteando que a pesquisa básica deveria estar associada ao ensino profissionalizante.

Finalmente, em 1935, os pensamentos propostos por esta corrente de intelectuais puderam ser materializados por meio da criação da Universidade do Distrito Federal (UDF), assinada pelo prefeito do Distrito Federal, Pedro Ernesto.

Conforme nos informa Medeiros (1996), a UDF foi concebida como uma universidade estadual, assim como a recém inaugurada Universidade de São Paulo (USP), em 1934. A organização se deu por meio de criação de escolas, a saber, Escola de Ciências, Escola de Educação, Escola de Economia e Direito, Escola de Filosofia e o Instituto de Artes.

A matemática na nova Escola de Ciências ficou sob a responsabilidade de Lélío Gama e Francisco Mendes de Oliveira Castro, conforme relata o próprio Lélío Gama.

Na nova Universidade, a convite de Roberto Marinho, eu e Francisco Mendes de Oliveira Castro, combinamos esforços no sentido de dar uma nova feição, nôvo destino, ao ensino da Matemática. Por modesto que fosse o empreendimento, não deixou de produzir certa agitação nas mentalidades estáticas. (GAMA, 1965, p.28-29)

Percebamos que, baseado nessa fala, nos é revelado que, por meio do trabalho de Lélío Gama e Oliveira Castro foi introduzido no Brasil a abordagem de Dedekind para os números reais. Notemos que o seu discurso vem carregado de críticas quanto ao ensino de matemática na antiga Escola Politécnica. Dessa forma, Gama parece deixar claro que, em sua concepção, os conceitos de análise, não eram apresentados sob uma abordagem moderna.

Iniciáramos o curso de Análise clássica pela teoria dos números reais, do ponto de vista de Dedekind, sobretudo para pôr em circulação o conceito de número irracional, que nunca fôra dantes ventilado, ao que soubéssemos, em nenhum programa de ensino. Quando, realmente, entrei para a Escola Politécnica, o número irracional era qualquer coisa que se dizia que existia, mas que não existia. Exigia, para a sua representação, um número infinito de casas decimais. Aí é que pegava o carro. Pulava-se, então, por cima do conceito, e passava-se, assim mesmo, à noção de continuidade. Por onde se vê que, naquele tempo, a continuidade era descontínua. Para obviar, logo de início, essa lacuna no ensino local, começámos, então, por esclarecer a noção de número irracional. E que sucedeu então? Brotou, como um cactus verde e espinhoso, nos bastidores escolares, o comentário, entre jocoso e mordaz, de que eu e Oliveira Castro estávamos “irracionalizando” a mocidade. (GAMA, 1965, p.29)

Com efeito, o próprio Oliveira Castro explicita sua visão acerca da influência da atuação de Lélío Gama, no sentido de estabelecer uma abordagem moderna na apresentação dos conceitos de análise.

Em 1935, a criação da Escola de Ciências da Universidade do Distrito Federal abriu novas perspectivas para a matemática superior, no Rio de Janeiro. Roberto Marinho de Azevedo, o grande diretor que teve a Escola de Ciências, convidou Lélío Gama para ensinar análise. Três anos apenas durou a criação de Anísio Teixeira, mas foi o tempo bastante para que a atuação de Lélío Gama viesse imprimir novos rumos aos estudos matemáticos na capital da República. Pela primeira vez, no Rio de Janeiro, um curso moderno e rigoroso sobre funções de variável real foi, então, por ele realizado. Sua influência pessoal atraiu para o curso numerosos ouvintes estranhos à universidade, alunos da Escola Politécnica, alguns professores do curso secundário e da própria Escola Politécnica. (CASTRO, 1992, p.63)

Neste ponto, destacamos a obra “*Séries Numéricas*” de Lélío Gama, publicado em 1946. O livro é produto das aulas de Análise ministradas pelo autor na Universidade do Distrito Federal e, posteriormente, na Faculdade Nacional de Filosofia. Os conceitos matemáticos são apresentados na altura atual da ciência, a partir da aplicação do conceito de limite. Dessa forma são discutidas com profundidade as noções relativas às séries e sequências numéricas, bem como os critérios de convergência.

Assim, temos um importante marco, no sentido da concepção da própria produção. Em particular, mais uma própria produção concebida como demanda do processo de ensino, uma vez que a obra é tecida à partir das notas de aula ministradas nas primeiras Universidades do Rio de Janeiro.

Ademais, Oliveira Castro aponta que várias demonstrações e importantes resultados originais obtidos por Lélío Gama expostos, pela primeira vez, em seu curso e nos seminários da UDF foram publicados em sua obra *Introdução à Teoria dos Conjuntos*, publicadas em oito fascículos, entre 1941 e 1945, pela Revista Brasileira de Estatística.

Nessa obra são apresentadas a teoria dos espaços abstratos de Frechet e a topologia de Sierpinski e Kuratowsky, as quais foram introduzidas no Brasil por meio do trabalho de Lélío Gama, segundo nos informa Oliveira Castro.

De fato, a *Introdução à Teoria dos Conjuntos* constitui-se em uma obra que se dedica a apresentar questões de topologia e espaços abstratos. No intento de melhor

identificarmos os conceitos trabalhados nessa obra, segue um quadro contendo os principais tópicos abordados em cada um dos fascículos.

Quadro12: Fascículos da obra Introdução à Teoria dos Conjuntos

Introdução à Teoria dos Conjuntos	
Fascículo	Principais Tópicos
1	Preliminares; Operações Elementares; Conjuntos numeráveis; Conjuntos Equivalenciais ao Continuum; Teorema de Cantor.
2	O problema da Escolha; Axioma de Zermelo.
3	Espaços Métricos; Espaços Acessíveis; Teoria dos Derivados; Interior, exterior, fronteira. Conjuntos Abertos
4	Conexidade; Domínios; Regiões; Primeiras noções sobre os conjuntos lineares.
5	Teoria Geral das Sucessões.
6	Espaços de Estrutura Esferoidal, Conjuntos Completos, Propriedade de Cantor.
7	Multiplicação Cartesiana, Separabilidade, Espaço de n dimensões.
8	Conjuntos Totalmente Limitados. Propriedades Transitivas. Propriedade de Weierstrass. Propriedades de Borel, Lindelöf e Borel Lebesgue. Espaços Regulares, Espaços Normais.

O texto de Lélío Gama é apontado por Leopoldo Nachbin como “*um dos melhores textos expositórios em português de todo um enorme período de nossa evolução matemática*” (NACHBIN, 1965, p.12)

A publicação de Lélío Gama encontrou eco também em São Paulo. Lima (2012) aponta que Omar Catunda, no último capítulo de sua tese, após chamar a atenção para o fato de que os matemáticos brasileiros já estavam produzindo os próprios trabalhos de pesquisa científica, faz referência à *Introdução à Teoria dos Conjuntos*, afirmando que faria uso de sua terminologia, no sentido de estabelecer uma uniformidade da terminologia em língua portuguesa. Nesse sentido, Lima (2012) pondera que “*havia, portanto, dentro da própria literatura brasileira, discussões que envolviam a teoria dos*

conjuntos, ainda que não fosse o mesmo estilo adotado pela escola bourbakista.” (LIMA, 2012, p.218)

Tal argumentação é fundamentada, segundo Lima (2012), levando-se em consideração que a discussão aconteceu antes mesmo da chegada dos primeiros bourbakistas e dos matemáticos que compartilhavam com os seus princípios na subsecção das ciências matemáticas da FFCL, uma vez que o referido trabalho de Catunda é de 1944.

Contudo, as fortes reações às novas ideias que fundamentavam o trabalho na UDF consolidaram-se como um fator preponderante para a sua curta duração. A UDF foi extinta pelo decreto de 20 de janeiro de 1939 e incorporada à Universidade do Brasil, fundada em 1937, que por sua vez, já abrangia a Universidade do Rio de Janeiro.

No mesmo decreto de extinção da UDF foi criada a Faculdade Nacional de Filosofia, Ciências e Letras (FNFi) como uma nova unidade da Universidade do Brasil. Medeiros (1996) nos informa que a FNFi era constituída dos cursos de Matemática, Física, Química, História Natural, Ciências Sociais, Letras Clássicas, Letras Neolatinass, Letras Anglo Germânicas, Filosofia e Pedagogia. O Departamento de Matemática era composto pelas cátedras de Análise Matemática e Superior, Geometria, Complementos de Matemática.

O espírito de renovação presente na extinta UDF manteve-se no Departamento de Matemática da FNFi, por meio da implementação da pesquisa básica associada ao ensino.

O curso matemático da FNFi tinha a duração de três anos. A estrutura curricular da FNFi entre os anos de 1939 e 1946 era a seguinte, segundo Silva (2002):

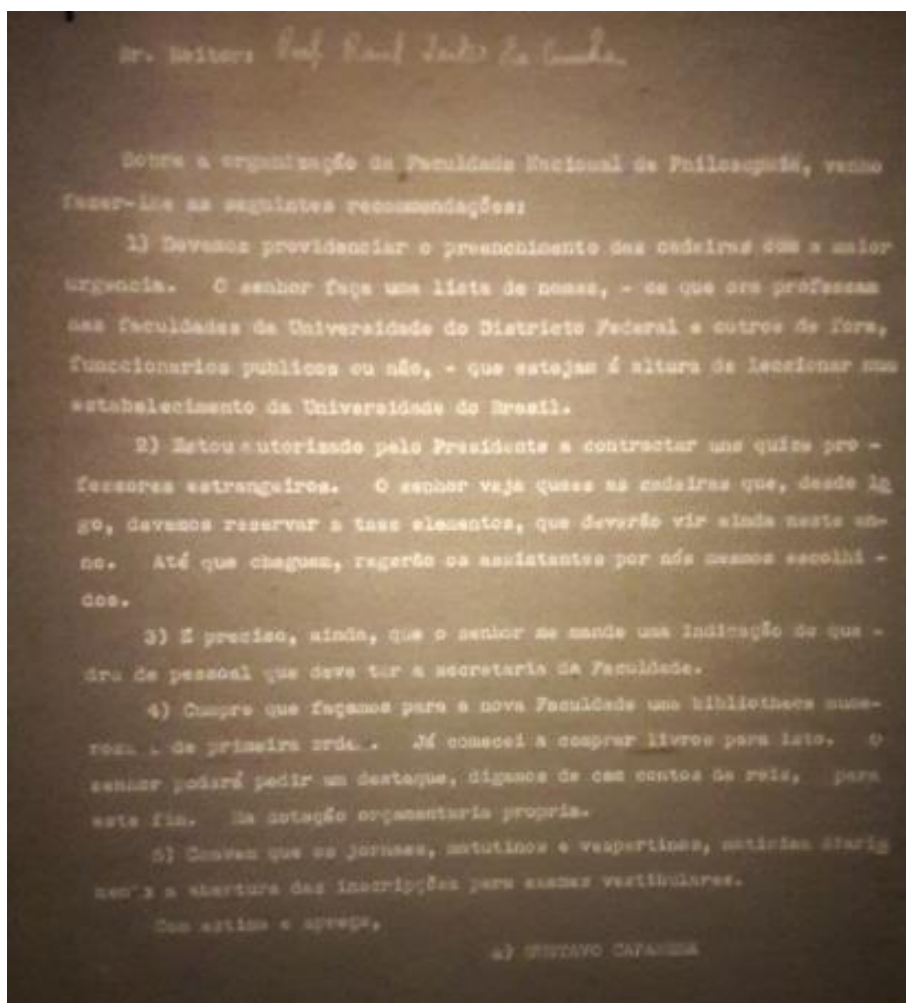
Quadro 13: Estrutura Curricular do Curso Matemático da FNFi no período de 1939-1946

1º Ano	2º Ano	3º Ano
Análise Matemática, Geometria Analítica e Projetiva Física Geral e Experimental	Análise Matemática, Geometria Descritiva e Complementos de Geometria Mecânica Racional	Análise Superior Geometria Superior Física Matemática Mecânica Celeste

Fonte: Favero, 1989, p.65

Silva (2002) esclarece que no período do Estado Novo, o então Presidente autorizou a contratação professores estrangeiros. De fato, em nossa pesquisa no Arquivo Capanema tivemos acesso a documentos microfilmados. Em particular, encontramos uma correspondência do Ministro Gustavo Capanema ao Reitor da FNFfi comunicando que o Presidente Getúlio Vargas havia autorizado a contratação de quinze professores estrangeiros para lecionarem na Faculdade Nacional de Filosofia.

Figura 22: Correspondência do Ministro Capanema ao Reitor da FNFfi

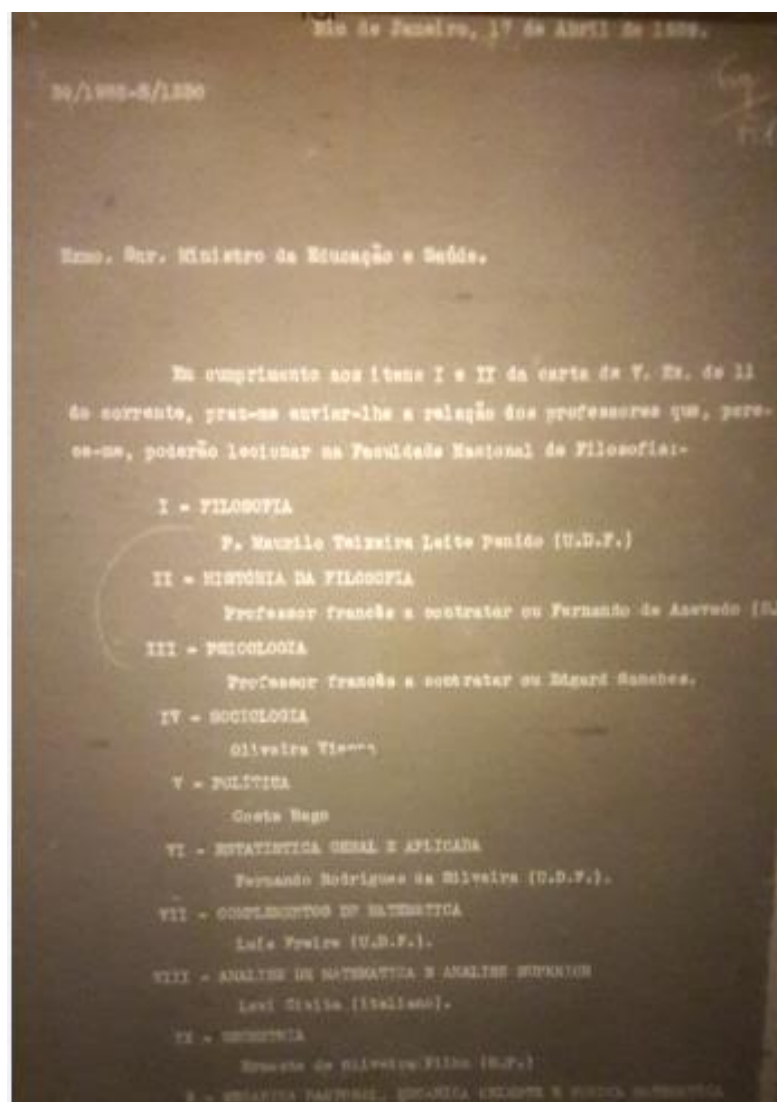


Fonte: Arquivo Capanema - FGV

Dessa forma, ressalta Silva (2002), a chegada dos matemáticos italianos se deu pelos canais oficiais, especificamente, por meio de contatos diretos entre as embaixadas do Brasil e da Itália.

Ademais, devemos salientar que o professor indicado para a cadeira de Análise Matemática foi o italiano Levi-Civita, conforme evidencia o documento expedido para o Ministério da Educação.

Figura 23: Correspondência indicando Levi-Civita para lecionar na FNFi



Fonte: Arquivo Capanema - FGV

Por outro lado, Levi-Civita, embora já tenha dado palestras em São Paulo, tornou-se vítima das leis racistas antisemitas na Itália, tendo sido demitido em 1939 pelo totalitarismo fascista.

No entanto, quem foi contratado para assumir a cadeira foi Gabrielle Mammana, fascista convencido e um representante da *italianità*, sendo um instrumento de difusão da propaganda fascista. Foram contratados também Luigi Sobrero para Física Matemática e Achille Bassi como professor de Geometria.

Diante disso, podemos conjecturar que o nome de Levi-Civita foi sumariamente descartado pela embaixada italiana, por conta de sua origem. Contudo, essa confirmação ainda permanece como uma questão em aberto.

Quadro14: Relação das disciplinas e professores do curso matemático da FNFfi em 1941

Cadeiras	Professores	Assistentes
Complementos de Matemática	José Rocha Lagoa (catedrático interino)	-
Geometria	Ernesto Luis de Oliveira (catedrático inteirino) e Achille Bassi (estrangeiro contratado)	José Abdelhay e Henrique de Almeida Fialho
Análise Matemática e Análise Superior	Gabrielle Mammana (estrangeiro contratado)	-
Física Teórica e Física Matemática	Luigi Sombrero (estrangeiro contratado)	-

Fonte: Silva, 2002, p.110

De acordo com sua biografia⁹⁹, Gabrielle Mammana (1893-1942) formou-se em Matemática na Escola Normal Superior de Pisa, em 1919, apresentando uma tese intitulada “*Sui teoremi di Weingarten sulle evolute delle superficie W*”.

Em 1921, foi nomeado como assistente de geometria descritiva e projetiva na Universidade de Cagliari. Um ano depois, em outubro de 1922, transfere-se para Catânia atuando como assistente da cadeira de Cálculo Infinitesimal até o ano de 1926.

No ano de 1928 foi nomeado professor de Análise Infinitesimal na Universidade de Cagliari, tendo permanecido até 1933. Durante os anos de 1934 e de 1935, Mammana passa a atuar na Universidade de Catânia nas cadeiras de Análise Superior (criada especialmente para sua atuação) e de Análise Infinitesimal. Ainda em 1935, Mammana assume a cadeira de Análise Algébrica na Universidade de Nápoles, tendo permanecido até o ano da sua vinda ao Rio de Janeiro, lecionando na Faculdade Nacional de Filosofia.

⁹⁹ Notizie su Gabrielle Mammana (1893-1942) por Flavia Mammana, comunicação privada.

Medeiros (1996) relata que após a saída de Lélío Gama para o Observatório Nacional, o italiano Gabrielle Mammana assumiu a cátedra de Análise Matemática e Superior, realizando relevante trabalho na FNFfi.

A influência de Mammana foi marcante nessa fase inicial do Departamento de Matemática da FNFfi, como demonstram os primeiros trabalhos de pesquisa de seus estudantes brasileiros. Encontramos, desta fase, nos Anais da Academia Brasileira de Ciências, contribuições de José Abdelhay e Leopoldo Nachbin.
(MEDEIROS, 1996,p.11)

De fato, Silva (2002) considera que Mammana teve uma atuação destacada, despertando nos jovens estudantes um real interesse pela pesquisa matemática, principalmente para a Análise Clássica. Silva (2002) destaca ainda os trabalhos publicados por Mammana em periódicos brasileiros, bem como dos trabalhos publicados por seus alunos sob sua orientação.

Em 1940, surgira uma primeira contribuição de Mammana em um periódico brasileiro: “Autofunzioni relative a sistemi differenziali contennenti una condizione quadratica in due punti”, no tomo XII dos *Anais da Academia Brasileira de Ciências*. A partir de 1941, começam a surgir, nos mesmos anais, trabalhos de brasileiros, visivelmente influenciados por Mammana: “Sobre a permutabilidade entre as operações de passagem ao limite e de integração de equações diferenciais” de Leopoldo Nachbin, apresentado por Mammana. No mesmo ano, o trabalho de Ignácio Azevedo do Amaral, “Sobre a integração de equações diferenciais ordinárias lineares e as equações integrais”. O autor agradece, em seu artigo, aos matemáticos Mauro Picone, da Universidade de Roma e Gabrielle Mammana, da Universidade de Nápoles, que estavam na FNFfi e que leram, estimularam e criticaram o trabalho.
(SILVA, 2002, p.114)

Nessa linha de raciocínio, o intercambio estabelecido continua a evidenciar frutos quando visualizamos o próprio Mammana fazendo referência à uma demonstração de seus próprios alunos.

Não apenas os brasileiros se beneficiaram da presença dos matemáticos italianos; o contrário também ocorreu. Em 1941, no tomo XIII dos *Anais da ABC*, Gabrielle Mammana publicou um artigo intitulado “Sopra taluni teoremi di inversione”, no qual, em nota de rodapé, faz referência a uma demonstração de seu aluno Leopoldo Nachbin, que estaria naquela época se ocupando da mesma questão sob um aspecto mais geral.
(SILVA, 2002, p.114)

Em tempo, devemos ainda ressaltar que a atuação de Mammana não esteve restrita à FNFi, uma vez que, ministrou um curso de Cálculo das Variações, no segundo semestre de 1940, na FFCL, em São Paulo.

Contudo, embora tenha existido uma importante influência italiana no tocante ao desenvolvimento da matemática no Rio de Janeiro, cabe-nos salientar que, na visão exposta por D'Ambrósio (1987), a influência italiana no Rio de Janeiro não foi tão marcante na comparação a influência exercida em São Paulo.

Se na Universidade de São Paulo a influência na Matemática, Física e Mineralogia foi marcante, na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade do Distrito Federal e posteriormente na Faculdade Nacional de Filosofia, sua continuadora, a influência foi menos notável. Também para lá foram contratados matemáticos italianos, mas somente mais tarde que na Universidade de São Paulo, nas vésperas da guerra. Chegaram Gabrielle Mammana e Luigi Sombrero, respectivamente para Análise Matemática e Física Matemática. Ambos menos distinguidos que seus colegas que vieram para São Paulo, tiveram menor influência no desenvolvimento da matemática no Rio de Janeiro. (D'AMBROSIO, 1987, p.518)

Com a ruptura ocorrida entre Brasil e Itália, em 1942, Gabrielle Mammana e Luigi Sombrero retornaram à Itália, enquanto Achille Bassi permaneceu no Brasil, mesmo com a suspensão de seu contrato junto à FNFi.

Silva (2015) relata que em 16 de maio de 1942, embarcaram no navio *Bage* os professores Albanese, com a esposa e cinco filhos além de Mammana com a mulher e um filho. Eles viajaram em uma classe distinta dos demais cidadãos italianos, por serem professores universitários. Já Luigi Sombrero retornou à bordo do navio *Serpa-Pinto* juntamente com sua esposa e filho.

Com efeito, José Abdelhay (1917-1996), segundo nos informa Medeiros (1996), formou-se na FFCL, em São Paulo, em 1939 e, um ano depois, em 1940, já atuava como assistente de Mammana na FNFi. Contudo, após a ida do professor italiano para a Itália, em 1943, Abdelhay (1917-1996) aceita o seu convite para assumir a cátedra de Análise Matemática e Superior.

Nesse ponto, podemos ver claramente uma confluência no contexto da FNFi, visto que o trabalho iniciado por Lélío Gama, procurando trazer um novo olhar e uma nova atitude em termos de pesquisa matemática, conflui-se com a influência estabelecida pela escola italiana (que já havia sido instituída na USP), inicialmente por

meio do trabalho de Mammana e posteriormente por meio da atuação de Abdelhay, que acabava de ser formado no contexto da escola italiana na USP.

De fato, a influência da escola italiana no novo contexto da FNF i pode ser materializada quando notamos que a obra adotada por Abdelhay nas aulas de Análise Matemática foi a mesma obra adotada na FFCL, a saber, “*Lezioni di Analisi*”, de Francesco Severi.

Por outro lado, a atuação de Abdelhay, inicialmente fazendo uso de *Lezioni di Analisi* e posteriormente criando as próprias notas de aulas, gera um importante produto, a publicação de seu “Curso de Análise Matemática”, em 1953, fruto da compilação de suas notas de aula.

Assim, entendemos que uma análise dessa obra pode nos fornecer algumas características desse processo de confluência.

De fato, a maioria dos conceitos básicos da análise já é apresentada numa abordagem modernizada e, mais especificamente, tendo o conceito de limite como base para os conceitos de continuidade, derivada e integral. Por outro lado, ainda não se abandona totalmente o trabalho com os infinitésimos. Os números reais são definidos como um par de classes de números racionais que satisfazem três condições, análogas com as condições dadas pelos cortes de Dedekind.

No capítulo seguinte, são definidos conceitos em termos da reta real, tais como, vizinhança, pontos de acumulação, conjuntos abertos e fechados, ínfimo e supremo, entre outros. No terceiro capítulo, o conceito de função é definido de forma já bem próxima com a definição contemporânea.

O limite de uma função é estabelecido como consequência das propriedades de Limite Superior e limite inferior de uma função, já apresentando uma versão modernizada. “A condição necessária e suficiente para que um número L seja o limite de uma função f em um ponto x' é que para cada $k > 0$ seja possível determinar uma vizinhança V do ponto x' tal que para todo x pertencente a $V - x'$ se tenha $|f(x) - L| \leq k$.” (ABDELHAY, 1953, p.38)

A noção de função contínua é definida por sua vez por meio do conceito de limite. “Seja f uma função definida em um conjunto C do qual x' é um ponto de acumulação, e seja x' pertencente a C . Diremos que a f é CONTÍNUA NO PONTO x' se $\lim_{x \rightarrow x'} f(x)$ existe e é igual a $f(x')$.” (ABDELHAY, 1953, p.63)

De igual forma, o conceito de derivada também é baseado no conceito de limite, de maneira que também são definidos os conceitos de derivada superior baseado no limite superior e, analogamente, derivada inferior, baseada no limite inferior.

No entanto, embora as noções de derivada e de continuidade tenham sido concebidas baseadas no conceito de limite, Abdelhay lança mão do trabalho com os infinitésimos. Nesse contexto, um infinitésimo em a é definido a partir de uma função não identicamente nula $f(x)$ definida numa vizinhança do ponto a . Nessas condições, assim adaptando a noção de Cauchy, a função $f(x)$ será um infinitésimo em a , se:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$$

Após isso são definidas as noções de ordens dos infinitésimos, parte principal e infinitésimos equivalentes.

O conceito de integral de Riemann é cuidadosamente construído a partir das somas superiores e inferiores da função, da partição (decomposição) de um intervalo de forma muito parecida com a que se faz contemporaneamente.

Os conceitos de continuidade, derivada e integral são inteiramente baseados na noção de limite.

Em tempo, cabe-nos salientar que o ensino de matemática superior no Rio de Janeiro passou a ser ministrado em duas frentes. Por um lado, na formação de engenheiros, a Escola Politécnica do Rio de Janeiro, agora já vinculada à Universidade do Brasil, continuava a ser uma instituição formadora de profissionais por meio do ensino de matemática superior e, por outro lado, com a fundação da FNFfi, passou a existir uma instituição de formação de professores de matemática, possibilitando um melhor ambiente para a produção da própria pesquisa matemática.

Por fim, salientemos uma conversa informal que tivemos com o Professor Luiz Adauto Medeiros acerca de suas memórias enquanto aluno da Faculdade Nacional de Filosofia, no final da década de 1940 até meados da década de 1950. Em seu relato, Luiz Adauto relata sua percepção de que a matemática ensinada na FNFfi era substancialmente diferente, daquela ministrada na EPRJ. Enquanto a matemática lecionada na Faculdade já era revestida de elementos contemporâneos, em termos da pesquisa matemática, algumas aulas de Cálculo na EPRJ eram ministradas com o Professor Catedrático sentado em sua cadeira, por meio do auxílio de um assistente.

Essa memória pode nos dar alguma percepção acerca do curso do ensino do Cálculo nas duas instituições.

5. A Escola de Minas de Ouro Preto

“(...) e único meio também de me tornar digno da nobre missão que me foi confiada, guiar-vos e transmitir-vos as tradições científicas que em França recebi dos mais honrados e sábios mestres.”

C.H Gorceix, Inauguração da Escola de Minas, 1876

Apresentaremos nesse capítulo os resultados que temos obtido a respeito de nosso estudo sobre uma instituição extremamente importante no contexto científico brasileiro, a partir do último quarto do século XIX, a Escola de Minas de Ouro Preto.

5.1 Antecedentes da criação da Escola de Minas

Antes mesmo de D.Pedro II criar a Escola de Minas, alguns fatos já sinalizavam a importância e o interesse da criação dessa Escola.

As riquezas minerais presentes na região de Minas Gerais já eram conhecidas e exploradas pelos cientistas, pelo menos, desde o fim do período colonial, conforme é confirmado por Carvalho (2010):

Pombal foi o primeiro a enviá-los à colônia, em busca de riquezas exploráveis. Uma consequência disso foi que a primeira atividade científica exercida no país foi realizada por brasileiros, o que contrasta com o modelo geral de implantação da ciência moderna em colônias europeias.

(...) Em Minas Gerais, pela concentração de recursos e de explorações minerais, houve também uma concentração desses cientistas. Ao fim do período colonial, havia 34 deles ocupando postos públicos na Capitania. (CARVALHO, 2010, p.17-18)

No início do século XIX já existiam discursos ressaltando a importância da criação de escolas de mineralogia, justificadas pela necessidade de exploração de outros metais que não o ouro. O Bispo Azeredo Coutinho, em 1804, questiona: Como podem existir progressos nas Minas se não havia *“um só homem inteligente na mineralogia? Logo, é absolutamente necessário que se estabeleçam escolas de mineralogia nas praças principais das capitanias e especialmente na de São Paulo, Minas Gerais, Goiás, Cuiabá e Mato Grosso.”* (CARVALHO, 2010, p.20).

A criação do Real Gabinete de Mineralogia no Rio de Janeiro, em 1810, destinada a administrar as 3500 amostras da Coleção Werner, trazidas ao Brasil pelo príncipe regente, posteriormente incorporado ao Museu Nacional, em 1818, pode ser

vista como um passo importante com relação ao ensino de Mineralogia, considerando que foi, juntamente com uma cadeira na Escola Militar, o único instrumento de ensino e pesquisa dessa ciência, durante grande parte do século XIX. Sendo mais específico, até a criação da Escola Politécnica e da Escola de Minas, na década de 70.

O Alvará de 13 de maio de 1803, promulgado pelo então Príncipe Regente D.João VI, foi uma referência positiva para o estabelecimento de escolas de mineralogia no Brasil, criando em Minas Gerais, a Junta Administrativa de Mineração e Moedagem. Sendo recomendado que fossem empregados meios para o estabelecimento de escolas mineralógicas e metalúrgicas, semelhantes às de Freyberg e Chemnitz, as quais resultaram àquelas cidades grandes vantagens.

Em 19 de agosto de 1823, foi proposto por Ribeiro de Andrada, membro da Comissão de Instrução Pública da Assembleia Constituinte, a fundação de Universidades em São Paulo e em Olinda, ocasionando o adiamento de uma Universidade em Minas Gerais.

Finalmente, a Lei de 3 de outubro de 1832 criou, na Província de Minas, o instituto que seria denominado como a Escola de Minas, quarenta e quatro anos depois. Contudo, anos de esquecimento passaram-se até a materialização da Escola, pela ação direta do Imperador D.Pedro II, conforme veremos a seguir.

5.2. Fundação da Escola de Minas

Nesse contexto, D Pedro II em uma de suas viagens à Europa (entre maio de 1871 a março de 1872), estabeleceu contato com Auguste Daubrée, Diretor da Escola de Minas de Paris. Nessa ocasião, foi pedido por D Pedro um documento a respeito da melhor maneira de conhecer e explorar as riquezas minerais no Brasil. Em resposta, Daubree aconselha que deveriam ser elaborados, por jovens brasileiros formados em escolas europeias, mapas geológicos gerais e pormenorizados do Império, e ainda que o ensino de geologia fosse ministrado por professores estrangeiros ou por brasileiros treinados no exterior.

Por meio de carta datada de 6 de julho de 1872, o governo brasileiro manifesta sua intenção de contar o trabalho de Daubrée em terras brasileiras, para desenvolvimento de pesquisa e criação de uma Escola de Minas.

O apelo que o governo brasileiro faz ao seu saber e ao seu amor pelas ciências, com vistas às riquezas minerais deste belo país, será, assim o espero, recebido pelo senhor com o mesmo acolhimento em relação ao qual o Brasil já teve oportunidade de se orgulhar.

[...] Antes de pesquisar in loco, a formação de uma Escola de Minas, o senhor poderá por meio de conferências, atrair o público à respeito de seus trabalhos. Confiro, como também o governo brasileiro, grande importância à sua visita a este país. Ele não retirará somente um maior proveito de suas minas: as ciências naturais, em geral, receberão forte impulso. (LIMA, 1977, p.28)

Contudo, devido às suas atribuições, Daubrée reclinou o convite, em carta datada de 7 de agosto de 1872, mas comprometeu-se a encontrar um cientista à altura de desempenhar tal tarefa.

Desejoso de me dedicar a esta importante missão, para cumpri-la teria de sacrificar, mesmo deliberadamente, algumas conveniências e considerações familiares. Mas as funções de diretor da Escola de Minas de Paris, que assumi recentemente, tiram-me toda a liberdade de ausentar-me, não absolutamente por um ano ou dois mas, até, por alguns meses. É absolutamente certo que o governo francês não me daria autorização para afastar-me da tarefa que acaba de me confiar.

[...] No caso em que a participação de um ou dois engenheiros fosse julgada preferível, faria o máximo possível para ajudar Vossa Majestade nesta delicada escolha. (LIMA, 1977, p. 28-29)

Daubrée encontrou várias dificuldades para encontrar tal cientista. Em carta de 29 de dezembro de 1873, finalmente surge uma luz no fim do túnel.

Estou plenamente ciente de minha responsabilidade, e embora tivesse desejado mais de um prorrogamento de cerca de 6 meses, procurarei satisfazê-los, no menor tempo possível. Custa-me muito não poder realizar de imediato a missão que o seu governo teve a honra de confiar-me.

[...] uma das personagens que poderia convir está no momento na Grécia, realizando ótimas pesquisas. (LIMA, 1977, p. 29-30)

Esse personagem não era outro senão Claude-Henri Gorceix, nome que, de fato, viria a ser bastante importante no desenvolvimento da pesquisa mineralógica e do Ensino de Mineralogia no Brasil, em particular, em Minas Gerais. “*É consensual entre os estudiosos da Escola de Minas e, entre os que de alguma forma a conheceram, a opinião de que ela em grande parte foi Gorceix, tanto pela organização que lhe deu, como, sobretudo, pelo espírito que lhe imprimiu.*” (CARVALHO, 2010, p.34)

Gorceix desembarcou no Rio de Janeiro, ao final do mês de julho de 1874 e logo encontrou-se com o Imperador D. Pedro II. A impressão do Imperador foi a melhor possível, bem como a de Gorceix, que admirou a vasta e profunda cultura a qual D. Pedro II possuía.

Gorceix realizou algumas conferências no Museu Nacional com o intuito de atrair a atenção para as minas de Ouro Preto. Contudo, sentiu-se frustrado, visto que apenas sete alunos inscreveram-se e desses, apenas quatro foram admitidos.

5.3. Primeiras questões de investigação sobre a Escola de Minas

A Escola de Minas de Ouro Preto foi criada por influência direta do Imperador D. Pedro II, tendo sido efetivamente inaugurada em 1876, tendo como diretor o emblemático francês Claude Henri Gorceix (1842-1919), conforme discorreremos posteriormente.

Em diversos fatores, a concepção e a estrutura da Escola de Minas foram baseadas em dois modelos já existentes na França, a Escola de Minas de Paris e a Escola de Minas de Saint-Étienne.

No entanto, partindo da realidade brasileira, o modelo escolhido por Gorceix seria o Saint-Étienne e o da École de Mineurs de Paris. Com as influências das duas instituições, foi elaborado um projeto. As diferenças em comparação à principal escola de engenharia do país – a Escola Politécnica do Rio de Janeiro – eram nítidas; a rigidez, o apego às normas, a seleção de alunos e a dedicação integral dos professores, além do espírito cientificista que buscava estimular a criatividade dos estudantes em aulas práticas, são resultados não somente da orientação francesa da escola, mas, principalmente, do empenho do diretor.

(SILVA, 2011, p.372)

O curso oferecido pela Escola de Minas de Paris tinha duração de três anos com uma sólida formação básica. Os seus alunos foram recrutados de um curso anexo e alguns outros dentre os melhores ex-alunos da Escola Politécnica. A Escola de Minas de Saint-Étienne oferecia um curso com dois anos de duração, possuindo a admiração do próprio Gorceix, quando afirmou que a Escola de Saint-Étienne possuía “*un programme de ensino das ciencias phisicas e mathematicas reduzindo às partes*

indispensáveis ao estudo das questões de mecânica, máquinas, metalurgia e exploração.” (GORCEIX, 1875)

No entanto, embora visualizemos influências advindas da Escola de Minas de Paris nos parece que o modelo de Saint-Étienne foi o escolhido, talvez pela mais fácil adaptação a realidade brasileira e também por vislumbrar um ensino que incentivasse os estudantes a empreenderem pesquisas científicas.

Moldando, com fez, a nossa Escola de Minas pela de Saint-Étienne, julgava H.Gorceix que o ensino a ser professado naquela, como acontecia com esta, viria habilitar só por si os alunos diplomados a empreenderem pesquisas puramente científicas, quando para isso tivessem vocação, e a Escola de Saint-Étienne podia se “*vangloriar de terem sido seus alunos alguns dos sábios de que se ufana a ciência francesa.*”

(A ESCOLA DE MINAS, 1966, p.27)

Dessa forma, ao identificarmos a influência das Escolas de Minas francesas, buscaremos entender como se deu o ensino de Matemática nessas Escolas, a fim de que possamos ter melhor compreensão de quão profundo se deu tal influência no ensino da Escola de Minas de Ouro Preto.

Garçon (2004), nos mostra a presença de cursos básicos de Matemática na Escola de Minas de Saint-Étienne.

Ambicioso, ele propôs cinco cursos conjugando o saber teórico e a aplicação: um curso de matemática elementar e geometria subterrânea prática; um curso de exploração subterrânea com cursos frequentes e levantamento das principais máquinas empregadas nas minas; um curso elementar de química e da arte da tentativa de tratamento das substâncias minerais; um curso de mineralogia industrial e de geologia relacionada com o conhecimento dos depósitos de minerais; um curso de desenho.¹⁰⁰ (GARÇON, 2004, p.90, TRADUÇÃO NOSSA)

O regulamento explicita mais detalhes acerca do ensino de matemática a ser implementado.

¹⁰⁰ Ambitieux, Il avait proposé qu'il comprit cinq cours conjuguant savoir theorique et application: un cours de mathématiques élémentaire et de géométrie souterraine mise em pratique; un cours d'exploitation souterraine accompagné de courses fréquentes et du lever des principales machines employées dans les mines; un cours de chimie élémentaire et de pratique appliquée à l'art d'essayer et de traiter les substances minérales; un cours de minéralogie industrielle et de géologie se rapportant à la connaissance du gisement des minéraux utiles, un cours de dessin.

O regulamento manteve as três cadeiras inicialmente previstas, apontando seu conteúdo e conferindo às disciplinas ministradas a desejada espessura pelo diretor.

1º Os elementos de matemática cujo conhecimento é indispensável para elaborar planos e medidas de superfícies, remoção de superfície e planos subterrâneos; nivelamento; elementos de desenho aplicado ao delineamento dos planos, das máquinas e das construções.¹⁰¹

(GARÇON, 2004, p.90, TRADUÇÃO NOSSA)

A partir dessa leitura, temos a impressão de que o ensino de matemática na Escola de Minas de Saint-Étienne parece ter sido restrito à um nível elementar.

Por outro lado, Aguillon (1889) em suas notas históricas relativas a Escola de Minas de Paris, nos revela que o ensino a partir de 1794 foi baseado nos seguintes cursos:

- 1) Mineralogia e Geografia física
- 2) extração das minas
- 3) docimasia ou ensaio das minas
- 4) a metalurgia ou minas que trabalham na íntegra¹⁰²

Além do mais, o ensino conservou-se dessa forma, na Restauração depois de 1815:

As quatro cadeiras constituídas pelo artigo 6 da portaria, que só existiriam até cerca de 1845 (alterações consagradas na lei em 1848) foram as quatro antigas cadeiras de: Mineralogia e geologia; docimasia, exploração das minas, mineralogia, que foram ocupadas respectivamente por quatro professores já conhecidos.¹⁰³

(AGUILLON, 1889, TRADUÇÃO NOSSA)

Assim, ao contrário do que imaginávamos, podemos dizer que não houve ensino de Matemática Superior na Escola de Minas de Paris e o ensino de Matemática na Escola de Minas de Saint-Étienne não parece ter ultrapassado um nível elementar.

¹⁰¹ Le règlement maintint les trois chaires initialement prévues, mais il précisa leur contenu en conférant aux matières enseignées l'épaisseur souhaitée par le directeur.

1º Les éléments de mathématiques dont la connaissance est indispensable pour dresser les plans et mesures les surfaces, la levée des plans superficiels et souterrains; le nivellement; les éléments du dessin appliqué au trace et au lavis des plans, des machines et des constructions.

¹⁰² 1) La minéralogie et la géographie physique

2) l'extraction des mines;

3) la docimasia ou l'essai des mines;

4) la métallurgie ou le travail des mines en grand

¹⁰³ Les quatre chaires constituées par l'article 6 de l'ordonnance, qui devaient seules subsister jusque vers 1845 (modifications consacrées en droit en 1848), étaient les quatre chaires anciennes de : minéralogie et géologie, docimasia, exploitation des mines, minéralurgie, qu'occupèrent respectivement les quatre professeurs qui nous sont déjà bien connus.

Após essas considerações e constatações, surgem naturalmente duas questões de investigação que irão direcionar nosso olhar, pelo menos por agora:

- Existiu ensino de Matemática Superior na Escola de Minas de Ouro Preto?

A partir dessa questão e do fato de termos, nessa época no Brasil, apenas escolas que formavam engenheiros (e não necessariamente matemáticos), surge outra questão não menos relevante:

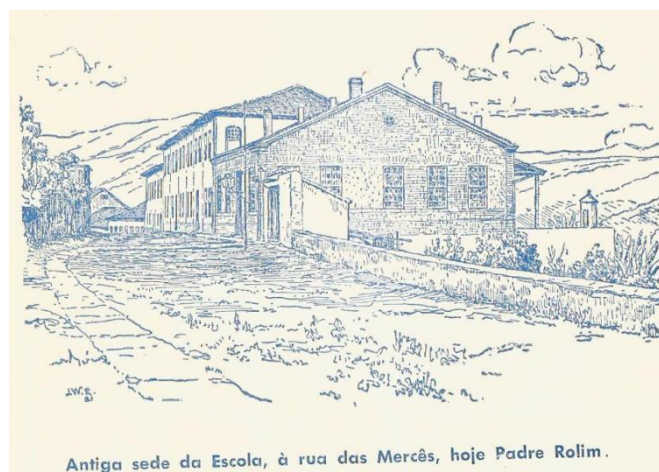
- Existiram Professores de Matemática na Escola de Minas?

Conforme já mencionado direcionaremos nossas ações no intuito de responder devidamente a essas questões.

5.4. Funcionamento Inicial da Escola de Minas

Finalmente, no dia 12 de outubro de 1876, a Escola de Minas foi solenemente inaugurada, em Ouro Preto, então capital da Província de Minas Gerais, na casa da Rua das Mercês, onde funcionou por cerca de vinte anos.

Figura 24: Primeira sede da Escola de Minas



Fonte: A Escola de Minas 1876 - 1966

A obra “A Escola de Minas 1876 - 1966” traz o primeiro regulamento da Escola de Minas, consolidado por meio do Decreto 6026 de 6 de novembro de 1875. O tempo

de duração do curso para formação de Engenheiros de Minas foi estabelecido em dois anos, sendo dez meses de estudo por ano.

O Artigo 3º do regulamento estabelece as matérias a serem estudadas em cada ano da seguinte forma.

- 1º Ano - Física, química geral, mineralogia; Exploração das minas, noções de topografia, levantamento de planos das minas; Trigonometria esférica, geometria analítica, complementos de álgebra, mecânica; Geometria descritiva, trabalhos gráficos, desenho de imitação; Trabalhos práticos: manipulações de química, determinação prática dos minerais, excursões mineralógicas.
- 2º Ano - Geologia, Química dos metais e docimasia, metalurgia, preparação mecânica dos minérios; Mecânica: estudo das máquinas, construção; Estereotomia, madeiramento, trabalhos gráficos; Legislação das minas; Trabalhos práticos: ensaios metalúrgicos, manipulações de química, explorações geológicas, visitas de fábricas.

No relatório de trabalho apresentado por Gorceix, relativo ao segundo trimestre do ano letivo de 1876-1877¹⁰⁴ são explicitados alguns programas referentes à vários conceitos, em particular, ao Cálculo Diferencial e ao Cálculo Integral.

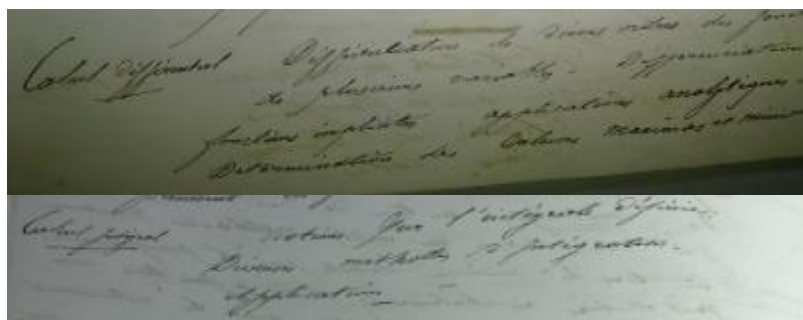
- Cálculo Diferencial – Diferenciação de várias ordens de funções de várias variáveis, diferenciação de funções implícitas, determinação de valores máximos e mínimos, funções de uma variável e funções que podem assumir valores da forma $\frac{0}{0}$.
- Cálculo Integral – Noções sobre integral definida, diversos métodos de integração, aplicações.

Figura 25: Primeira página do relatório de Gorceix [ANRJ 2]



¹⁰⁴ Arquivo Nacional do Rio de Janeiro – Códice IG³265 – Série Educação

Figura 26: Programas de Cálculo descritos no relatório [ANRJ 2]



Embora esse trecho do relatório confirme o ensino de Matemática em nível superior, devemos notar que os conteúdos presentes no relatório referem-se basicamente à poucos procedimentos com funções de uma ou mais variáveis, no caso do Cálculo Diferencial, e métodos de integração, no Cálculo Integral.

Registremos que, a partir da descoberta de tal relatório **podemos constatar a existência do ensino de Matemática Superior na Escola de Minas de Ouro Preto**, respondendo a uma das questões propostas no item anterior.

O aviso de 8 de maio de 1876 sinaliza a preocupação de Gorceix com o baixo nível de conhecimento dos estudantes secundários brasileiros, e conseqüentemente com o número de candidatos reduzidos para admissão na Escola de Minas. Por conseguinte, Gorceix propõe a criação de um Curso Preparatório para estudantes que almejassem a admissão na Escola de Minas.

O professor Gorceix, no intuito de evitar que a Escola de Minas deixe de funcionar por falta de alunos, se não apparecer nem um candidato à matrícula, propõe a criação de um curso preparatório annexo à mesma escola.

Justificando tal criação, poderá com razão aquelle professor que, nas circumstancias actuais do ensino entre nós, não é fácil prepararem-se os candidatos à matrícula, a não ser na Capital e nas cidades em que há cursos superiores de estudos.

Assim, portanto a criação de escolas preparatórias particulares e o desenvolvimento do ensino em lyceus provinciaes não facilita aquelle preparo, a medida proposta é de grande vantagem.

(ARQUIVO NACIONAL DO RIO DE JANEIRO, IG³265, 1876)

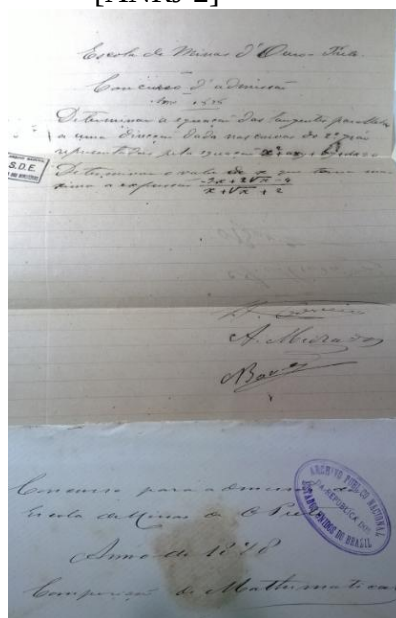
O decreto de 12 de setembro de 1877 trouxe a modificação pleiteada por Gorceix, instituindo a inclusão do Curso Preparatório. Dessa forma a Escola passou a ter três anos de curso, dos quais os dois últimos constituíam a especialização.

O Curso Preparatório era composto por três cadeiras, nas quais eram ministradas as seguintes matérias:

- Geometria elementar, trigonometria retilínea, geometria descritiva, trabalhos gráficos e desenhos de imitação, álgebra (equações do 2º grau, equações biquadradas, questões de máximo e mínimo), noções de cálculo das derivadas, geometria analítica (linha reta e curvas do 2º grau), noções de mecânica; física elementar, química dos metaloides, botânica e zoologia.

Cabe notarmos que a maioria dos conteúdos a serem trabalhados no Curso Preparatório eram conceitos de matemática. As provas de matemática para o primeiro concurso de admissão abrangeram questões de trigonometria (achar os ângulos de um triângulo dados os lados), geometria analítica (determinar a equação das tangentes paralelas a uma direção dada nas curvas representadas por certa equação), álgebra (descobrir o valor de x que tornam determinada expressão máxima)

Figura 27: Prova de Matemática no Concurso de Admissão da Escola de Minas [ANRJ 2]



No ano de 1885 a Escola de Minas teve o seu terceiro regulamento instituído por meio do Decreto 9448, de 27 de junho de 1885. O Decreto estabeleceu o Engenheiro de Minas com as mesmas regalias e direitos de Engenheiro Civil e, para tal, aumentou um ano de estudo. Assim, os estudos passaram a ser feitos em seis anos, sendo três de Curso

Geral e três de Curso Superior. Os alunos que concluíssem os dois primeiros anos do Curso Geral poderiam ser diplomados como Agrimensores.

Devemos notar que, os que saíram da Escola como Agrimensores possuíam uma quantidade significativa de horas de estudos em Matemática, lembrando que a maioria das cadeiras de Matemática eram concentradas nos dois primeiros anos.

A quarta edição dos Annaes da Escola de Minas de Ouro Preto¹⁰⁵ em 1885 registram toda essa mudança curricular, bem como os programas de ensino, conforme pode ser visto no Apêndices 28, 29 e 30.

5.5 Primeiros Professores da Escola de Minas

Desde sua implantação, a Escola de Minas enfrentou diversas dificuldades de ordens burocráticas e financeiras. Por várias vezes, a única solução encontrada por Gorceix foi recorrer diretamente ao Imperador.

Vossa Majestade, sente melhor do que eu a urgência de tal publicação. A criação da Escola está sendo ignorada, em toda parte. A intervenção de vossa majestade é o único instrumento favorável para a salvação da Escola. Sem ela, não teremos nem mestres e nem alunos, e uma ideia tão boa e tão útil permanecerá estéril e sem aplicação.

(LIMA, 1977, p.39)

Por outro lado, dificuldades de outra natureza somaram-se a estas como desafio para consolidação da Escola. O isolamento de Ouro Preto associado com a falta de profissionais qualificados para o ensino tornou-se um fator decisivo para outra dificuldade, a formação de um Corpo Docente à altura do ambicioso projeto da Escola de Minas.

O primeiro regulamento da Escola não explicita quem deveria lecionar, mas determina que o ensino seja dado pelos professores com o auxílio do Adjunto e de dois Repetidores.

O modelo inicial para contratação de novos professores, por meio de concurso, previa uma defesa de tese. Contudo foi ponderado que que sua redação exigiria um tempo muito grande e não muita coisa seria demonstrada do ponto de vista docente. Assim, foi exigido, nos concursos posteriores, aula expositiva de quatro horas, a ser

¹⁰⁵ Periódico vinculado à Escola de Minas, seu primeiro número foi publicado em 1881 e o último em 1961.

ministrada sem notas e sem livros. Abriu-se concurso para as cadeiras de Mecânica Aplicada e Geometria Descritiva, mas não houve candidato inscrito.

A cadeira que mais preocupava Gorceix era a de Exploração de Minas. O trecho da carta escrita por Daubrée evidencia a inquietação pelo preenchimento adequado dessa cadeira. “*Importa que tenha brevemente um bom professor de Exploração de Minas. Espero que minhas buscas nas regiões mineiras cheguem a encontrar pessoa capaz, conhecedora da teoria e da prática.*” (LIMA, 1977, p.41)

Finalmente em correspondência datada de 19 de julho de 1876, Daubrée comunica ao imperador ter achado um nome que poderia estar à altura das expectativas: Armand de Bovet.

Contudo, em um ofício enviado ao Ministro Secretário do Estado, e dos Negócios do Império¹⁰⁶ são relatados alguns problemas, e algumas providências tomadas. A Escola estava sem professor de Mecânica e Armand de Bovet ainda não havia chegado. Comunica-se então que o Bacharel Archias Eurípedes da Rocha Medrado ministraria as aulas de Complementos de Álgebra e de Geometria Analítica.

Não chegou ainda o Professor de Mecânica, e bem pode ser que não se chegue antes de dous meses de demora, por isso o B^{el} Archias Eurípedes da Rocha Medrado, Repetidor e Preparador de Mineralogia, começou hoje a substituí-lo ocupando-se, dos Complementos de Álgebra, e Geometria Analítica.

(ARQUIVO NACIONAL DO RIO DE JANEIRO, IG³265, 1876)

Lima (1977) relata que para prover a cátedra de Geometria Descritiva, foi nomeado um engenheiro, antigo aluno da Escola Politécnica, Borges Carvalho Júnior, mas o interessado nunca deu sinal de vida. Em confirmação, o ofício¹⁰⁷ datado de 14 de novembro de 1876, registra que Carvalho Borges, apesar de já estar nomeado, não respondeu a nenhuma das convocações. O mesmo ofício informa a chegada de Armand de Bovet ressaltando sua formação sólida em desenho e solicita que assuma temporariamente o ensino dessa cátedra.

De fato, no despacho datado de 13 de janeiro de 1877 oficializa-se tanto a demissão de Carvalho Borges quanto a substituição por Bovet.

Bovet não só assumiu temporariamente a cadeira, mas tornou-se o professor adjunto dela até pelo menos 1881.

¹⁰⁶ Documento encontrado no Arquivo Nacional do Rio de Janeiro sob o código IG³265 – Série Educação

¹⁰⁷ Idem

Não se tendo apresentado na Escola o B^{el} João de Carvalho Borges já nomeado professor interino de Desenho e Geometria (já obteve demissão) pede o Diretor autorização para confiar ao professor Armand de Bovet que tem as mesmas habilitações a substituição daquela cadeira com a metade do respectivo vencimento.

(ARQUIVO NACIONAL DO RIO DE JANEIRO, IG³265, 1877)

Depois de imensas dificuldades para a contratação de professores qualificados, as primeiras cadeiras foram iniciadas: Henri Gorceix, Diretor da Escola, lecionando mineralogia, física e química; Armand de Bovet, exploração das minas e metalurgia, e ainda, Geometria Descritiva; Archias Medrado, lecionando Mecânica, Complementos de Álgebra e Geometria Analítica.

Figura 28: Quadro de horários da Escola de Minas em 1876 [ANRJ 2]

Horas	Cursos	Professores	Salários
2 ^{as}	Química descritiva	Henri Gorceix	1000
3 ^{as}	Matemática	Archias Medrado	1000
4 ^{as}	Física	Henri Gorceix	1000
5 ^{as}	Exploração de Minas	Armand de Bovet	1000
6 ^{as}	Matemática Superior	Archias Medrado	1000
7 ^{as}	Física	Henri Gorceix	1000
8 ^{as}	Matemática	Archias Medrado	1000
9 ^{as}	Física	Henri Gorceix	1000
10 ^{as}	Matemática	Archias Medrado	1000
11 ^{as}	Física	Henri Gorceix	1000
12 ^{as}	Matemática	Archias Medrado	1000

Fica evidenciado, portanto, que Archias Eurípedes da Rocha Medrado foi o primeiro professor de Matemática Superior na Escola de Minas de Ouro Preto.

Archias Medrado era Bacharel em Ciências Físicas e Matemáticas, formado pela Escola Central. Logo de início abraçou o magistério tendo sido professor no afamado Colégio do Mosteiro de São Bento, no Rio de Janeiro. O primeiro contato que, possivelmente, o levou à Escola de Minas, se deu na realização do trabalho com o

laboratório de mineralogia e geologia também no Rio de Janeiro feito em conjunto com Gorceix. Embora tenha começado a lecionar as cadeiras de matemática interinamente, consolidou-se como Repetidor de Matemáticas, por meio da Portaria de 14 de fevereiro de 1880, sendo efetivado nesse cargo por meio de concurso (Dec. 5-6-1886). Foi também foi reconhecido por seus posicionamentos políticos, sendo um dos principais abolicionistas de Ouro Preto, presidente da Sociedade Abolicionista Libertadora Mineira e participante de outras sociedades abolicionistas.

Em 1891, ocupou o posto de diretor da Escola de Minas, em substituição ao lendário Henrique Gorceix e com a Reforma Benjamin Constant passou a ocupar a cadeira de Mecânica Racional até a sua jubilação em 1900.

Um dos primeiros alunos da Escola de Minas, Augusto Barbosa da Silva, logo chamou a atenção de Gorceix por sua dedicação e potencial nos estudos. Os registros do Imperador, em uma de suas visitas à Escola de Minas, já destacavam suas habilidades, *“Gorceix deu sua lição durante uma hora, fazendo os estudantes, Barbosa e Paula, reconhecerem as rochas que estavam sobre a mesa, mostrando ambos, sobretudo Barbosa, muita aptidão”* (LIMA, 1977, p. 73)

Após sua diplomação, em 1882, como Engenheiro de Minas, o próprio D. Pedro II enviou Augusto Barbosa à França com uma bolsa particular, tendo feito cursos nas mais tradicionais escolas francesas, tais como a Sorbonne, a École des Ponts et Chaussées e o Collège de France.

Em 1885, Augusto Barbosa da Silva foi nomeado lente interino de Cálculo Diferencial e Integral, Mecânica Racional e Trigonometria Esférica da Escola de Minas, tendo entrado em exercício em novembro do mesmo ano. Em 1889, foi efetivado por concurso na cátedra dessas disciplinas. Seu trabalho como professor não se restringiu às décadas em que esteve na Escola de Minas, visto que também atuou como professor do Ginásio Municipal de Ouro Preto e da Escola Normal de Ouro Preto.

A descrição realizada por Moacyr do Amaral Lisboa, por ocasião do seu centenário de nascimento, ressalta louváveis características de seu antigo mestre.

[...] ao recordar daquela figura extraordinária do Professor AUGUSTO BARBOSA não sei, francamente, o que mais admirar de suas qualidades como professor e cientista. Apesar daquela voz monótona, sem arroubos de retórica, durante 90 minutos, no mínimo, de preleção, sem a prolixidade de citações de bibliografias modernas, ouvia-se a exposição de um capítulo da Física ou da Química de um modo claro, atraente e erudito que impressionava e satisfazia ao mais exigente espírito indagador. Jamais me esqueço daquela imagem de

professor que impressionava pelo seu aspecto modesto e dominava pela segurança com que transmitia conhecimentos básicos e fundamentais sempre atualizados.

(ANNAES DA ESCOLA DE MINAS n°33, 1960, p. 3-4)

Por outro lado, lamenta-se ainda a falta de registros dos trabalhos realizados por Augusto Barbosa .

O seu “Curriculum Vitae” como professor e cientista, infelizmente, não ficou registrado através de publicações que possam atestar tudo aquilo que dele sentiram os seus ex-alunos. Nesse ponto, o velho mestre pecou por excesso de modéstia. Quem o conheceu, e com ele privou, poderá, entretanto, reconhecer que ele foi, segundo os conceitos de RAMON Y CAHAL (Regras e Conselhos sobre a Investigação Científica), um grande mestre e pesquisador.

(ANNAES DA ESCOLA DE MINAS n°33, 1960, p.4)

Augusto Barbosa da Silva também obteve grande destaque ao inventar um tipo de forno elétrico para fabricação de produtos siderúrgicos, trabalhou arduamente em seu invento, tendo recusado convite para trabalhar nos Estados Unidos como Metalurgista.

Arthur Thiré (1853-1924) foi um dos professores franceses da Escola de Minas. Arthur foi professor de Mecânica e Construção, Desenho e Geometria Descritiva na Escola de Minas, no período entre 1878 e 1882.

Arthur teve produzido alguns trabalhos acadêmicos, destaquemos por hora seu artigo intitulado *Sur la théorie du planimètre d'Amsler* publicado na *Nouvelles Annales de Mathématiques*, um ano antes de seu desligamento da Escola de Minas em 1887.

Após o seu desligamento da Escola de Minas a atuação de Artur Thiré como professor de Matemática fica mais intensa, lecionou em diversas escolas e foi Livre Docente de Geometria Analítica e Cálculo Diferencial na Escola Politécnica do Rio de Janeiro (aceito em sessão de Congregação em 1913)

O final da sua carreira foi dedicado ao Ensino secundário. Em 1910 assumiu uma das cátedras de Matemática no Colégio Pedro II, tendo publicado diversas obras didáticas como: Aritmética Ginasial (1911), Álgebra Ginasial (1911), Trigonometria Elementar (1912), Aritmética do Curso Médio (1913) e Aritmética dos Principiantes (1914).

Por fim, destaquemos a atuação do professor Marciano Ribeiro dos Santos, diplomado Engenheiro pela própria Escola de Minas em 1885. Foi lente interino das cadeiras da Secção de Matemática (Álgebra e Geometria Analítica), tendo sido nomeado Lente Catedrático em 1890.

Diante do exposto, fica evidente a resposta à nossa segunda pergunta de investigação. De fato, **existiram professores de Matemática na Escola de Minas de Ouro Preto**, alguns desses atuando no ensino secundário.

Nesse sentido, considerando a existência de ensino de Matemática Superior e de Professores especializados na Escola de Minas espera-se que esse corpo de sábios estabeleçam uma produção própria. Desta forma temos uma nova questão de investigação: Que tipo de produção foi estabelecida na Escola de Minas?

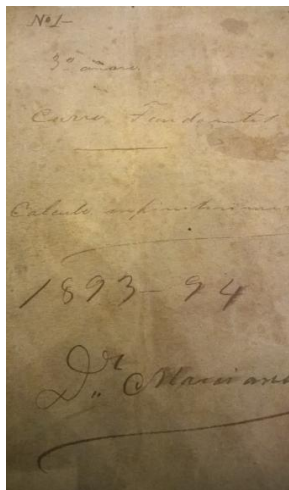
5.6 Ensino de Cálculo na Escola de Minas

Após a lista de tópicos de Cálculo encontrados no relatório de Gorceix em 1876 e da publicação dos programas de ensino nos Annaes da Escola de Minas em 1875, tivemos acesso e examinamos alguns diários de classe do ano de 1893, em particular o único diário do século XIX encontrado.

Em particular, esse diário de classe é referente ao curso de Calculo Infinitesimal ministrado pelo Professor Marciano Ribeiro. Foram registrados os tópicos lecionados em 41 encontros entre outubro de 1893 e abril de 1894, bem como a lista dos alunos ausentes em cada um dos encontros e as notas obtidas pelos estudantes referente as listas de exercícios.

Os tópicos registrados mostram que no curso de Cálculo Infinitesimal foram ministrados diversos conteúdos de Cálculo Diferencial, Geometria Analítica e de Curvas Planas. Contudo, chamou-nos atenção a ausência de registros de conceitos relacionados ao Cálculo Integral.

Figura 29: Capa do Diário de Classe de 1893 [APEM 1]



Outrossim tivemos também acesso à outros diários de classe também elaborado pelo professor Marciano Ribeiro. O estudo dos registros realizados nesses diários mostram um padrão dos cursos de cálculo ministrados no referido período.

5.6.1 Estrutura dos Cursos de Cálculo ministrados na Escola de Minas entre 1893 e 1908

Entre os documentos disponibilizados e analisados no Arquivo Permanente da Escola de Minas, encontramos os diários dos cursos de Cálculo referentes ao período entre 1893 e 1908, ministrados pelo Professor Marciano Ribeiro.

Nessa cadeira as aulas se dividiram em cinco blocos de conteúdo, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Equações Diferenciais, Curvas Planas e Geometria Analítica de duas e três dimensões. Em particular, no ano de 1907 foram ministrados conteúdos acerca do Cálculo das Variações.

Com base na observação desses documentos pudemos traçar, em linhas gerais, a estrutura dos cursos de Cálculo ministrados nesse período, conforme podemos observar em detalhes no Apêndice 31.

Nesse ponto, cabe-nos destacar o trabalho com o método dos limites e com o método dos infinitamente pequenos. Dessa forma, podemos perceber que, de maneira parecida com o que se deu na Escola Politécnica do Rio de Janeiro, os conceitos relativos do cálculo diferencial foram desenvolvidos fazendo uso dos referidos métodos.

Em todos os diários pesquisados chamou-nos atenção a nomenclatura dada ao tratamento dado às formas indeterminadas, a saber, verdadeiro valor de $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$. Encontramos essa nomenclatura em dois livros¹⁰⁸ na Biblioteca de Obras Raras da Escola de Minas. Pauly trabalha essa noção a partir da hipótese de que se os dois termos da fração $\frac{F(x)}{f(x)}$ se anulam para um valor particular x_1 , com a fração assumindo a forma $\frac{0}{0}$. E para encontrar o verdadeiro valor da razão “*deve-se então procurar o limite o qual tende a fração quando é atribuído à variável um valor $x_1 + h$ vizinho de x_1 , fazendo esse valor para x_1* ”¹⁰⁹ (PAULY, 1887, p. 57, TRADUÇÃO NOSSA). Assim, segundo Pauly sendo $f(x_1)$ e $F(x_1)$ simultaneamente nulos segue que:

¹⁰⁸ Pauly, J. Notions Élémentaires du Calcul Différentiel et du Calcul Integral. Paris, 1887
La Vallée Poussin, Ch. Cours d'Analyse Infinitésimale

¹⁰⁹ il faut chercher la limite vers laquelle tend la fraction, lorsque, après avoir donné à la variable une valeur $x_1 + h$ très voisine de x_1 , on fait tendre cette valeur vers x_1 .

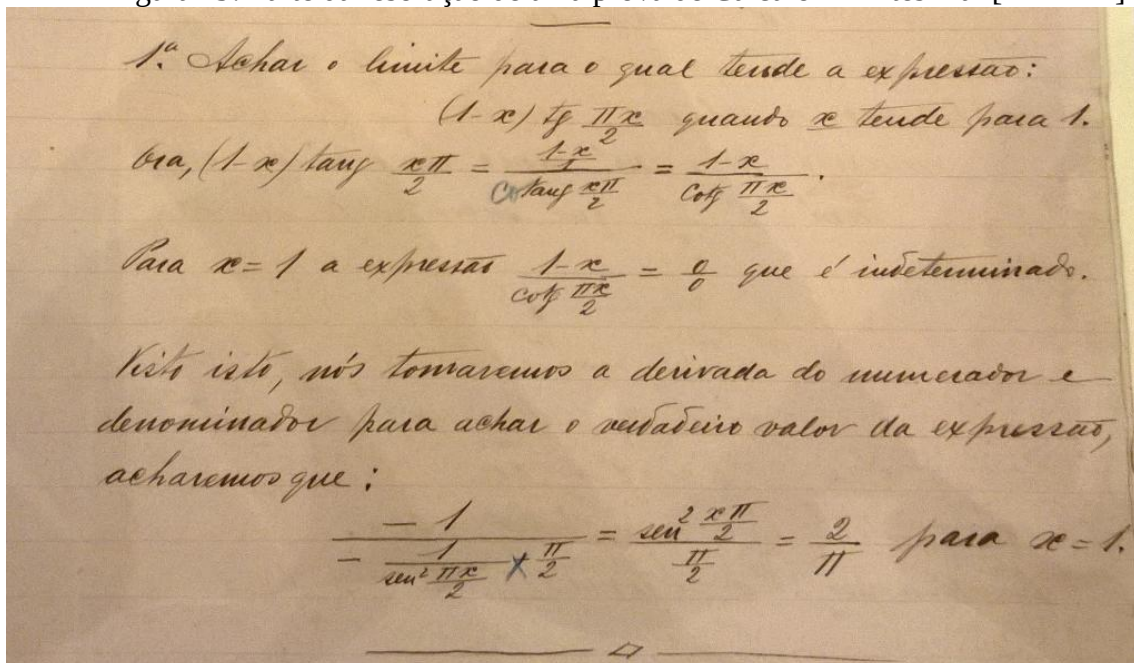
$$\frac{F(x_1 + h)}{f(x_1 + h)} = \frac{F'(x_1 + h_1)}{f'(x_1 + h_1)}$$

E, fazendo h decrescer indefinidamente, o verdadeiro valor da fração será dado por:

$$\frac{F'(x_1)}{f'(x_1)}$$

Nesse ponto, ressaltamos que essa abordagem vem de encontro à resposta dada por um aluno na resolução de uma prova em 27 de setembro de 1893.

Figura 29: Parte da resolução de uma prova de Cálculo Infinitesimal [APEM 1]



Assim, por um lado, a resolução da questão parece evidenciar que o efetivo uso do conceito de limite não era implementada por meio de um símbolo específico, e por outro lado, vemos um certo protagonismo dado ao conceito de “verdadeiro valor de uma expressão” através do procedimento de encontrar a derivada do numerador e do denominador de uma determinada expressão.

Diante disso, devemos relatar que tivemos acesso a algumas provas de Cálculo aplicadas no referido período. As provas eram compostas por poucos itens, praticamente todos relacionados com aspectos procedimentais e de aplicação, típicos do contexto da formação de engenheiros. Ademais, não foram encontradas questões que exigissem reflexões conceituais acerca da matemática.

5.7 Análise Preliminar da Produção na Escola de Minas

Uma vez constatada tanto a existência de ensino de Matemática Superior quanto professores de Matemática na Escola de Minas, espera-se que esse corpo de sábios passe a estabelecer uma produção própria.

Assim, surge naturalmente uma relevante questão. **Como foi estabelecida a produção matemática na Escola de Minas ?**

Contudo, devemos deixar evidente qual é a nossa concepção de produção matemática.

Existem correntes dentro da historiografia que classificam o papel da comunicação, da transmissão e da popularização do saber matemático, como atividades secundárias e periféricas, não atribuindo a esse tipo de estudo a devida importância.

Belhoste (1998) ressalta que sobre essa indiferença é baseada a falsa ideia de que a produção matemática pode ser separada da história das condições de sua reprodução.

Nesse ponto, salientamos nossa consonância com o ponto de vista de Belhoste:

Contra esse preconceito, eu gostaria de defender o ponto de vista baseado no desenvolvimento em comum do saber matemático, isto é, sua socialização dentro das comunidades de especialistas e de utilizadores, sejam elas acadêmicas ou comerciais, mesmo em todo o seu corpo social, constitui um aspecto essencial da atividade matemática, parte integrante da atividade da invenção.¹¹⁰

(BELHOSTE, 1998, p.289, TRADUÇÃO NOSSA)

Registremos ainda a concepção de Belhoste acerca da importância do papel do professor no processo de desenvolvimento científico.

¹¹⁰ Contre ce préjugé, je voudrais défendre le point de vue selon lequel la mise en commun du savoir mathématique, c'est-à-dire sa socialisation au sein de communautés de spécialistes et de communautés d'utilisateurs, qu'elles soient savantes ou de métier, voire même dans l'ensemble du corps social, constitue un aspect essentiel de l'activité mathématique, partie intégrante de l'activité d'invention.

No entanto, os professores constituem um meio de recepção e um instrumento que ecoa em seu trabalho de pesquisa, o qual não deve-se ser subestimado em importância. Resta, aos historiadores, a medida em que as fontes permitirem, explorar, reconstituir suas pesquisas e carreiras, avaliar seus saberes, seus ensinamentos e suas produções.¹¹¹
(BELHOSTE, 1998, p.292, TRADUÇÃO NOSSA)

Em adição a isso, Schubring (2001) aponta outro ator com papel primordial nessa rede, a comunicação. *“É a comunicação que constitui o ato elementar da ciência. É sobre ela que se apoiam o ensino e a aprendizagem, mas também as invenções científicas. Essa última é sempre um ato de comunicação com um público determinado¹¹²”* (SCHUBRING, 2001, p.300, TRADUÇÃO NOSSA)

Desta forma, ao considerarmos o desenvolvimento em comum do saber matemático como aspecto essencial da produção matemática, o trabalho do professor, como ator não coadjuvante, e o papel da comunicação como ato fundamental para o desenvolvimento da ciência, entendemos que a análise da produção, torna-se bastante relevante, visto que pode englobar esses três aspectos: o desenvolvimento em comum do saber matemático, o papel do professor e a importância da comunicação.

Um dos principais canais de comunicação da produção científica estabelecida na Escola de Minas foi o periódico intitulado *Annaes da Escola de Minas de Ouro Preto*, idealizado por Claude Henri Gorceix. A primeira edição dos Annaes foi publicada em 1881 e impressa na Typographia Nacional no Rio de Janeiro.

O primeiro artigo relacionado à Matemática, publicado nos Annaes da Escola de Minas nº11 em 1909, foi de autoria de Gastão Gomes, intitulado “Os Logarithmos de Gauss”.

O autor deixa claro que o artigo tem por objetivo difundir entre os alunos da Escola de Minas o “*uso de tão útil e quão simples systema de logarithmos*”. O artigo tem caráter expositivo, explanando os conceitos básicos relativos a algumas taboas de logaritmos, como as de Bremiker, Schrön e Bruhns e, em particular, os chamados logaritmos de Gauss. A teoria é aplicada por meio da resolução de vários problemas numéricos e da exploração do método de determinação de latitude.

¹¹¹ Les professeurs constituant néanmoins un milieu de réception et une chambre d'écho pour les travaux de recherche dont on ne saurait sous-estimer l'importance. Il reste aux historiens, dans la mesure où les sources le permettent, à explorer, à en reconstituer les réseaux et les carrières, à en évaluer les savoirs, les enseignements et les productions.

¹¹² C'est la communication qui constitue l'acte élémentaire de la science. C'est sur elle que s'appuient l'enseignement et l'apprentissage, mais aussi l'invention scientifiques. Cette dernière est toujours un acte de communication avec un public déterminé.

Um hiato de 11 anos acontece até que sejam publicados novos artigos relativos à matemática. Somente em 1920, na edição de número 16 foram publicados dois artigos de matemática, a saber, “*Normaes à secção plana de uma superfície por um ponto*” por Christovam Colombo dos Santos e “*Resoluções das Equações Numéricas de Raízes Inteiras*”, por José Januário Carneiro.

Notamos que, até a última edição da revista, foram publicados dez artigos de matemática, sendo o último deles, “*Fundamentos da Geometria do Quadrângulo*” de autoria de Luiz Carlos de Assis Moreira, publicado na edição de número 33, em 1960.

Quadro 15: Listagem dos Artigos de Matemática publicados nos Annaes da Escola de Minas de Ouro Preto

Título do Artigo	Autor	Volume/Ano
Os Logarithmos de Gauss	Gastão Gomes	nº11/1906
Normaes à secção plana de uma superfície por um ponto	Christovam Colombo dos Santos	nº16/1920
Resoluções das Equações Numéricas de Raízes Inteiras	José Januário Carneiro	nº16/1920
Séries Condicionalmente Convergentes	Miguel Maurício da Rocha	nº17/1921
Cálculo das Variações	Christovam Colombo dos Santos	nº19/19
Resto da Série de Taylor	Miguel Maurício da Rocha	nº21/19
Transformações em Geometria	Christovam Colombo dos Santos	nº22/1931
O Absoluto no Espaço Matemático	Christovam Colombo dos Santos	nº31/1958
Três Integrais Indefinidas	Altamiro Tibiriça Dias	nº31/1958
Fundamentos da Geometria do Quadrângulo	Luiz Carlos de Assis Moreira	nº33/1960

Em nossa pesquisa, encontramos outro periódico fundado por ex-alunos da Escola de Minas que buscava, de igual forma, constituir-se como um canal de comunicação da produção científica da referida escola, a revista *Auri-Verde*.

Figura 30: Capa da Revista Auri-Verde



Em sua própria capa a revista já salienta a pluralidade de matérias que potencialmente seriam ali publicadas, pois era uma “*revista de assumptos scientificos e literários, humorismo e variedades*”. Contudo, desde o primeiro volume, deixa-se claro que a revista é uma iniciativa independente e sem a pretensão de serem publicados inúmeros volumes. “*Não tem caráter definitivo essa publicação. Só poderá ir avante com o apoio da sociedade Ouropretana.*” (AURI-VERDE, 1919, p.2)

No curto período, de aproximadamente um ano, em que a revista Auri-Verde foi produzida, foram publicados sete artigos relativos à Matemática.

Quadro 16: Listagem dos artigos de Matemática publicados na Revista Auri-Verde

Título do Artigo	Autor	Volume/Ano
Sobre as Roletas	Christovam Colombo dos Santos	nº3/1919
Teoria dos Conjuntos	Joaquim Ribeiro de Oliveira	nº4/1919
Continuação Teoria dos Conjuntos	Joaquim Ribeiro de Oliveira	nº5/1919
Methodo do Sr A.Badet	Christovam Colombo dos Santos	nº7/1920
Questões de Matemática	Miguel Maurício da Rocha	nº7/1920
Séries Syntagmáticas	Joaquim Ribeiro de Oliveira	nº9/1920
Continuação Séries Syntagmáticas	Joaquim Ribeiro de Oliveira	nº11/1920

Em uma rápida análise sobre os artigos de matemática publicados nos Anais da Escola de Minas de Ouro Preto e na revista Auri-Verde podemos notar uma

característica comum na maioria dos artigos publicados, a resolução de problemas propostos, por algum motivo, pelos próprios autores.

Por outro lado, embora todas as fontes ainda não estejam todas devidamente analisadas, já temos alguns indícios de produções próprias na Escola de Minas.

Não encontramos na historiografia nenhuma informação sobre quais foram os livros-textos de Cálculo adotados nos primeiros anos da Escola de Minas.

Contudo, após uma comparação da estrutura dos cursos de Cálculo com a estrutura dos livros de Análise no acervo na Biblioteca de Obras Raras da Escola de Minas, encontramos duas obras que mais se encaixariam com o perfil traçado, “*Cours d’Analyse Infinitésimale*” de De la Vallée Poussin e “*Notions Élémentaires de Calcul Différentiel et Du Calcul Intégral*” de J.Pauly.

Dessa maneira, não temos dúvidas de que a elucidação dessa questão seria um importante passo referente à história do desenvolvimento da análise no Brasil.

Desde a sua fundação, a Escola de Minas consolidou-se como uma instituição que valorizou e incentivou a pesquisa, principalmente por meio da postura e atuação de seu primeiro diretor, Claude-Henri Gorceix.

Nesse intento foi criado um periódico oficial ligado à Escola, os *Anais da Escola de Minas de Ouro Preto*, em 1881, trazendo publicações dos professores além de artigos escritos pelos próprios estudantes, consistindo num ambiente estimulador para o formação de uma própria produção.

Dessa forma, com o passar dos anos, podemos observar as publicações dos professores das mais diversas disciplinas em variadas áreas. Com respeito à matemática não encontramos publicações originais, mas devemos ressaltar a movimentação no intuito de que os conhecimentos pudessem ser aprimorados.

Nessa movimentação, cabe-nos destacar a atuação do professor Cristovam Colombo dos Santos (1890-1980), formado na Escola de Minas de Ouro Preto em 1914. Cristóvam Colombo dos Santos passou a ser professor da Escola de Minas em 1915 tendo atuado posteriormente na Escola de Engenharia da Universidade de Minas Gerais. Possuiu uma produção matemática relevante, de forma que, um de seus trabalhos pode ser considerado o primeiro do gênero no Brasil, “*Cálculo Vectorial – Licções professadas na Escola de Minas de Ouro Preto*”, publicado em 1927.

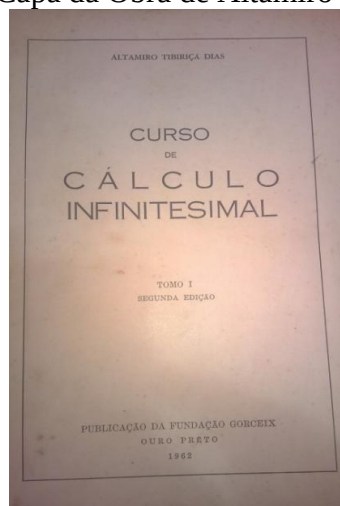
Figura 31: Capa do livro de Christóvam Colombo dos Santos



Fonte: Google Books

No tocante ao Cálculo Diferencial, devemos destacar ainda o protagonismo exercido pelo professor Altamiro Tibiriça Dias (1911-1993). Tibiriça Dias formou-se na própria Escola de Minas no ano de 1937. A partir de 1939 já atuou como Professor Catedrático de Cálculo Infinitesimal e Integral, tendo permanecido até pelo menos o ano de 1967. A partir de suas notas de aulas, produziram-se apostilas para uso dos alunos, que foram compiladas originando um dos primeiros livros-textos de Cálculo no Brasil.

Figura 32: Capa da Obra de Altamiro Tibiriça Dias



Assim, por um lado, durante longo tempo, as aulas de Cálculo na Escola de Minas foram baseadas na obra de Tibiriça Dias e, por outro lado, vemos que uma das primeiras produções próprias do cálculo no Brasil se deu pela demanda advinda da formação de engenheiros na Escola de Minas de Ouro Preto.

O *Curso de Cálculo Infinitesimal* de Altamiro Tibiriça Dias traz o conceito de números reais por meio dos cortes de Dedekind. O conceito de limite já é apresentado de maneira algebrizada e, em termos da convergência, apresenta-se também a noção de convergência uniforme. Nessa linha são apresentados o método dos limites e a teoria acerca dos infinitésimos.

Na concepção apresentada, o Cálculo Infinitesimal é definido como aquele em que utiliza o conhecimento dos infinitésimos, sendo dividido em Cálculo Diferencial e Cálculo Integral. Nesse sentido, no cálculo diferencial as quantidades são consideradas como o limite da razão de dois infinitamente pequenos e, no cálculo integral, consideradas como o limite da soma de infinitésimos em número indefinidamente crescente.

O conceito de função é definido em termos da correspondência entre as variáveis x e y não sendo exigido que, para cada valor de x corresponda somente um valor de y . Esse caso especial é definido como função unívoca ou uniforme.

O conceito de continuidade é definido em torno da noção de oscilação. Nesse contexto, uma função será contínua em um determinado ponto se a sua oscilação for nula nesse ponto.

De forma geral, podemos entender que a obra de Tibiriça Dias já trouxe uma abordagem moderna para alguns contextos, do ponto de vista da matemática desenvolvida na formação de matemáticos.

Diante disso, podemos observar uma certa vanguarda em termos da produção advinda da Escola de Minas de Ouro Preto, uma vez que, as primeiras obras de Cálculo Vetorial e Cálculo Diferencial produzidas no Brasil foram concebidas como frutos das aulas ministradas na Escola.

Portanto, a produção matemática dos professores da Escola de Minas esteve relacionada com a própria produção de livros-textos, publicados como aprimoramento das notas de aulas ministradas pelos professores.

6. A Escola Politécnica de São Paulo e a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da USP.

“A theoria cujos resultados não se conformam com a pratica não é theoria; e assim também aquelles processos empiricos que não concordam com os resultados verificados da theoria não constituem pratica”

Antônio Francisco de Paula Souza, 1901.

Desde o início da República foi notório o crescimento populacional e econômico do Estado de São Paulo e, em particular, de sua capital, devido principalmente à economia cafeeira, destacando-se cada vez mais no cenário econômico nacional.

Contudo, tal explosão deixava ainda mais evidente a falta de estrutura em todo o sistema de ensino. Segundo Santos (1985), entre as décadas de 1880 e 1890, São Paulo foi perdendo sua influência colonial transformando-se em uma cidade completa e economicamente dinâmica. Nesse contexto, continua argumentando Santos (1985), o progresso encontra uma cidade ainda com más escolas primárias, poucas escolas profissionais e sem instituições superiores eficientes, apesar de, durante o último quarto do século, São Paulo ter passado do décimo para o segundo lugar em tamanho do país.

Em termos de obras públicas, a instituição concebida para atender as necessidades da cidade naquela época era o Gabinete Topográfico, cuja atribuição era de formar topógrafos medidores de terra e engenheiros construtores de estradas, além de inserir alunos nas Matemáticas Puras e desenhos necessários às aplicações em medições de terrenos, construção de pontes e conhecimentos dos instrumentos utilizados para esses fins. Contudo, o Gabinete Topográfico, fundado em 1835, não teve vida longa e funcionou até 1849.

Nos anos que se seguiram ao fechamento do Gabinete Topográfico, os debates em torno do papel do Estado na “instrução pública” e em sua responsabilidade com respeito ao ensino tecnológico foram intensificados. Um dos maiores defensores da criação de uma escola de engenharia foi Antônio Francisco de Paula Souza (1843-1917), deputado estadual eleito em 1892 e que viria a ser um dos personagens principais da fundação da Escola Politécnica de São Paulo.

A visão de Paula Souza não era restrita apenas à formação de profissionais de ensino superior, mas também em formar técnicos que pudessem dar suporte ao rápido crescimento da indústria e a expansão das ferrovias.

Em seu discurso no parlamento, na sexta seção ordinária em 20 de abril de 1892, fica evidente a maneira como Paula Souza lançou mão dessa visão no intuito de convencer os deputados a votarem favoravelmente à criação da nova instituição.

os moços que tiverem frequentado apenas o 1º anno possam prestar enormes e relevantes sérvios a nossa industria, aquelles que tiverem concluído o 2º anno, muito mais, e aquelles que tiverem completado o curso preparatório, não só prestarão enormissimos serviços às nossas industrias, como exercerão perfeitamente bem os cargos que hoje são exercidos por aquelles que cursam a escola superior de engenharia. Não poderão, naturalmente, no 1º anno competir com estes que possuem títulos e pergaminhos; mas em poucos annos de pratica ficarão habilitados a rivalizar com os melhores.

(Annaes da Camara dos Deputados apud SANTOS, p.28, 1985)

Assim, menos de um mês do discurso proferido por Paula Souza, o Congresso Legislativo do Estado de São Paulo, por meio da Lei nº 26, criava uma Escola Superior de Agricultura e outra de Engenharia e em 17 de agosto do mesmo ano, por meio da Lei nº 67, criava o Instituto Polytechnico de São Paulo.

A combinação dessas duas leis resultou finalmente na Lei nº 191, de 24 de agosto de 1893, a qual criou a “Escola Polytechnica de São Paulo”, caracterizando-se como a primeira Instituição brasileira de Ensino Superior criada por um estado e somente a terceira escola de Engenharia no país, juntando-se assim às já existentes Escola Politécnica do Rio de Janeiro e a Escola de Minas de Ouro Preto.

6.1. O personagem da Escola Politécnica de São Paulo – Antônio Francisco de Paula Souza

Antonio Francisco de Paula Souza é considerado um dos principais personagens, senão o principal, da criação e consolidação da Escola Politécnica de São Paulo. O seu trabalho não repercutiu apenas como deputado que formulou a lei que criou a Escola Politécnica, mas também por sua atuação que deixou a marca de seu espírito na Escola durante aproximadamente vinte e cinco anos, decorridos da criação da Escola até a sua morte.

Não é exagerado dizer que Paula Souza foi a figura central nos quase 25 anos iniciais da Escola Politécnica. Ao lado de suas inúmeras atividades administrativas como diretor, especialmente na fase de

implantação de uma faculdade de engenharia, foi sempre um mestre dedicado e academicamente produtivo. Como docente, foi responsável durante cerca de vinte e quatro anos por duas disciplinas muito importantes na formação do engenheiro: Resistência dos Materiais e Estabilidade das Construções. Ele sempre se preocupou em produzir material didático de qualidade, conforme mostra sua lista parcial de publicações voltadas para o ensino de engenharia.

(PADILHA, 2010, p.120)

Não restam dúvidas a respeito do protagonismo desempenhado por Antônio Paula Souza na implantação e desenvolvimento da Escola Politécnica de São Paulo. Não somente em sua luta como parlamentar para a criação da Escola, com os acalorados debates com Euclides da Cunha, mas também como Diretor e professor, funções as quais desempenhou até o último dia de sua vida.

Figura 33: Busto em homenagem a Antônio Francisco de Paula Souza na Escola Politécnica da USP



Fonte: Arquivo Pessoal

Encontramos em nossa pesquisa bibliográfica diversos artigos e textos contendo informações a respeito de Paula Souza e outros membros de sua família. No entanto,

também tivemos acesso a algumas fontes primárias, as quais nos levaram a questionar diversas afirmações constantes nos respectivos relatos com relação a vida de Paula Souza. Doravante faremos uma exposição do que está registrado nos textos e faremos uma contraposição com a análise realizada a partir das fontes primárias.

A historiografia tradicional com respeito à vida de Paula Souza relata que ele era oriundo de uma família de políticos e estadistas, tendo nascido em 06 de dezembro de 1843 na cidade de Itú. Seu pai, que tinha exatamente o mesmo nome, Antônio Francisco de Paula Souza (1819-1866), cursou até o terceiro ano de medicina no Rio de Janeiro, tendo concluído seu curso na Universidade de Louvain, na Bélgica, em 1842. Um registro histórico de sua passagem em Louvain é a sua Tese de Doutorado que pode ser localizada no catálogo on-line da Universidade de Tübingen¹¹³. Presume-se, a priori, que essa ida para a Bélgica tenha aproximado a família da Europa, visto que, posteriormente, Paula Souza, seu irmão e seus tios realizaram parte de seus estudos em terras europeias.

De fato, nas variadas notas biográficas a seu respeito consta que Paula Souza, acompanhado de seu irmão Francisco de Paula Souza e de seus tios Diogo Antônio de Barros e Antônio Paes de Barros, que possuíam a mesma faixa etária que Paula Souza, desembarcaram na Alemanha em 1858, fixando morada na cidade de Dresden.

Devemos chamar atenção para carta escrita¹¹⁴ pelo Capitão Antônio Paes de Barros aos seus filhos Antônio Paes de Barros e Diogo Antônio de Barros, tios de Paula Souza, datada de 1855. Os relatos tradicionais dão conta que os jovens teriam chegado a Dresden em 1858, mas a carta em questão foi escrita em 1855.

Ao fazermos a leitura da carta temos a impressão, ou mesmo indícios, que os jovens teriam sido enviados à Europa acompanhados por um tutor alemão.

Muito desejamos saber como foram tratados na viagem, e lá como se acham; tudo miudamente desejamos saber. Meus filhos cuidai com esmero em vossos estudos. Respeitai e obedecei a vossos Mestres e ao Snr. Hirsch como a vosso pai, e respeitai sempre os mais velhos.
(BARROS, 1855)

¹¹³ Tal comprovação pode ser visualizada em <https://tue.ibs-bw.de/aDISWeb/app;jsessionid=AB399E2D13924E195FB94D6E1E568B0F> . Acesso em 15/09/2015

¹¹⁴ Transcrição da carta feita pela historiadora Tiffany Bühlmann em <http://ospaesdebarrossaopaulo.blogspot.com.br/2013/03/carta-do-1-barao-de-piracicaba-aos-seus.html>. Acesso em 04/09/2015. Transcrição disponível no Apêndice 14.

Uma vez que assumimos a presença e o acompanhamento do tutor, podemos entender sua importância na introdução dos jovens à língua e a cultura alemã. Certamente o papel do tutor foi fundamental, visto que a inserção dos jovens em uma cultura tão diferente não poderia ter se dado sem uma adequada e intensa preparação. Por isso suspeitamos que tenha existido uma escola privada em Dresden, de maneira que os jovens tenham alcançado tal preparação.

Segundo Padilha (2009), Paula Souza, seu irmão e seus tios desembarcaram nas terras germânicas no porto de Hamburgo tendo sido recebidos por uma família durante um período de adaptação.

Em Hamburgo ficaram sobre a tutela do casal Duplat, tiveram aulas de alemão e estudos com professores particulares, enfim passaram por um período de adaptação, antes de seguir para Dresden. Naquela época, a rede ferroviária estava em plena fase de implantação na Alemanha, mas já era possível fazer o percurso de Hamburgo até Dresden de trem.

(PADILHA, 2009, p.8)

A maioria das notas relata que, em 1860, os irmãos Paula Souza teriam sido enviados de volta ao Brasil, receosos com respeito à morte do filho único de um presidente sul-americano, visto que viviam em Dresden com temperaturas mínima e máxima entre -13°C e -20°C no inverno e entre 30°C e 36°C no verão e, supostamente, tiveram problemas de saúde. No entanto, não são explicitadas as relações entre os dois fatos, ou seja, quais seriam exatamente as relações entre as baixas temperaturas em Dresden com a morte prematura relatada do filho do presidente colombiano. Dessa forma, entendemos que os fatos que supostamente relacionam os dois episódios não estão explicitados, tampouco fundamentados, permanecendo, desta forma, como uma questão a ser melhor esclarecida.

Em novembro de 1860, os dois irmãos Paula Souza foram enviados de volta ao Brasil pelos diretores do colégio, receosos que estavam devido à morte do então filho único do Presidente da Colômbia (República de Nova Granada) Mariano Ospina Rodríguez (1805-1855), vítima de forte resfriado.

(PADILHA, 2010, p.24)

De maneira que, no ano seguinte, eles teriam retornado à Europa, mas dessa vez em terras suíças.

Antonio Francisco de Paula Souza chegou em Zurique em julho de 1861. Ao chegar tomou professores particulares e preparou-se para os exames de admissão e em outubro já cursava a ETH. Na listagem de alunos matriculados na ETH no ano escolar de 1861/1862, constam os nomes de seu tio Diego (o correto é Diogo) de Barros, matriculado no curso preparatório de matemática, do próprio Antônio Francisco de Paula Souza matriculado no primeiro ano de engenharia e de seu tio Antonio Paes de Barros. (PADILHA, 2010,p.25)

Contudo os estudos não foram concluídos em Zurique, nesse período são citados possíveis desavenças entre o diretor e os alunos fazendo-os, em tese, deserta-los em massa.

A estada de Paula Souza em Zurique também foi marcada por seu efetivo envolvimento nas questões políticas que borbulhavam. Teve participação ativa em organizações estudantis e envolveu-se em variados debates, envolvendo-se em particular com o movimento de unificação italiana, tendo, inclusive, viajado à Itália em apoio ao movimento liderado por Giuseppe Garibaldi (1807-1882).

Nesse período, início da década de 1860, Paula Souza conheceu George Herwegh (1817-1871), possivelmente por ter sido colega de classe de seu filho mais velho Horace Herwegh (1843-1901) na ETH (Eidgenössische Technische Hochschule) em Zurique.

George Herwegh, que viria a ser sobro de Paula Souza após casar-se com sua filha Ada Virginie (1849-1921) em 1870, foi um grande ícone da esquerda e um dos protagonistas de revoluções não exitosas em estados germânicos no ano de 1848, viveu grande parte de sua vida no exílio e, possivelmente exerceu grande influência sobre os ideais políticos de seu futuro genro. George casou-se com Emma Herwegh (1817-1904), a qual também teve intensa participação cultural e política principalmente em causas feministas.

Após morarem em Zurique a família Herwegh passa a viver na região de Baden-Baden, com distância aproximada de 30 km de Karlsruhe. Assim, ao lembrar que Paula Souza já encontrava-se em Karlsruhe em 1864, que Ada Herwegh já residia nas cercanias de Baden-Baden desde outubro de 1866 e que já existia ligação ferroviária entre as duas cidades, Padilha (2009) considera que:

Portanto, é razoável supor que o contato entre a família Herwegh e Antônio Francisco de Paula Souza tenha sido frequente e intenso tanto em Zurique quanto em Baden-Baden. A interação com a família Herwegh certamente teve grande influência na formação e nas ideias republicanas e antiescravistas de Paula Souza.

(PADILHA, 2010, p.55)

Assim, considerando os fatos relatados e a proximidade entre Paula Souza com a família Herwegh podemos conjecturar uma possível relação da permanência de Paula Souza em Karlsruhe com a mudança dos Herwegh para Baden-Baden.

É provável que a futura mudança da família Herwegh para a Alemanha tenha tido alguma influência na decisão de Paula Souza de continuar seus estudos em Karlsruhe. Em 1866, a família Herwegh, constituída então do pai Georg, da mãe Emma, da filha Ada e do filho mais novo Marcel, mudou-se de Zurique para Lichtenthal, bairro de Baden-Baden. (PADILHA, 2010, p.31)

Após esses fatos, os irmãos Paula Souza chegam à cidade alemã de Karlsruhe, sendo matriculados na Escola Politécnica de Karlsruhe em 1864 permanecendo ali até o ano de 1867.

No ano seguinte, Paula Souza volta à São Paulo e após passar um período com a sua família na Fazenda Santa Gertrudes em Rio Claro, assume o cargo de Inspetor das Obras Públicas em maio de 1868, por meio do convite do então Presidente da Província de São Paulo, Joaquim Saldanha Marinho (1816-1895). No entanto, embora tenha empregado esforço começando a planejar a rede ferroviária da Província, a queda do governo liberal findou sua primeira incursão no serviço público, segundo Padilha (2009).

Padilha (2009) relata ainda que, em abril de 1869, Paula Souza parte para os Estados Unidos, iniciando uma verdadeira odisséia, segundo o relato apresentado. A embarcação que o levava encalhou nas costas da Martinica implicando uma viagem extremamente difícil, tendo chegado à Nova York com apenas 10 dólares. Após isso, seguiu para Saint Louis para trabalhar na construção de estradas de ferro, precisando vender seus instrumentos de engenharia para sobreviver. Trabalhou como carregador de fardos de algodão, copista, ajudante de medição e desenhista, na construção da estrada de ferro Rock Island – Saint Louis, voltando ao Brasil dois anos depois, fixando definitivamente sua residência no país. Foi responsável, nas duas décadas seguintes, por diversas obras relativas à construção de ferrovias e também a outras obras públicas.

Finalmente, em 1892 foi eleito Deputado Estadual tendo atuação decisiva na aprovação da lei que criou a Escola Politécnica de São Paulo.

O trabalho realizado por Padilha (2009), em sua dissertação de mestrado, nos traz informações e fontes primárias específicas sobre a vida acadêmica de Paula Souza. São explicitados documentos nas quais constam os nomes de Antonio Francisco de

Paula Souza, de seu irmão Francisco de Paula Souza e de seus tios Diogo Paes de Barros (1844-1888) e Antônio Paes de Barros (1840-1909) na lista de alunos matriculados na ETH (Eidgenössische Technische Hochschule) de Zurique.

A ETH foi fundada em 1855 possuindo, desde seu início, um status de ensino superior. Em particular, podemos notar a chegada de Paula Souza na ETH, seis anos após sua fundação, conforme podemos ver nos Apêndices 1 e 2 referentes aos alunos matriculados na ETH no ano escolar de 1861/1862. Constanam ainda os nomes de seu tio Diego (o correto é Diogo) de Barros, matriculado no curso preparatório de Matemática, no Apêndice 1, do próprio Paula Souza matriculado no primeiro ano de Engenharia e de seus tios, no Apêndice 2.

Nos Apêndices 3 e 4, novamente encontramos os nomes de Paula Souza, de seu irmão e de seus tios na listagem de alunos matriculados na ETH no anos escolares de 1862/1863.

Por outro lado, devemos notar ainda que os irmãos Paula Souza estavam também matriculados na Universidade de Zurique, em 1863, cursando Filosofia, conforme Apêndice 15.

Figura 34: Lista de Alunos da Universidade de Zurique

** C18 **		RZU <--> STAATSARCHIV		** C18 **		Matrikel der UNIVERSITAET ZUERICH 1833 - 1949		** C18 **	
IMMATR.-NRN	NAME VORNAME	SEX	GEB- JAHR	ORT	H E R K U N F T S - R E G I O N	L A N D	STUDIEN - FACH IMMATRIKULIERT		
52436	PATTY EARLE EUGENE JR.	M	1927	VAN NUYS	CALIF.	USA	PHIL. I GERM. WS 1947		
22231	PATULOFF WALDEMAR	M	1884	LIDA		RUSSLAND	CHEM WS 1913		
30664	PATZIG GABRIELE	M	1904	DRESDEN		D	NAT. OEK. SS 1924		
49872	PAUCKER KURT	M	1924			D (STAATENLOS)	PHIL. II CHEM. WS 1945		
02554	PAULA SOUZA ANTON FRANZ	M		ITU		BRASILIEN	PHIL SS 1863		
02625	PAULA SOUZA FRANCISCO	M		ITU		BRASILIEN	PHIL WS 1863		
11725	PAULCKE WILHELM	M	1873	LEIPZIG		D	PHIL SS 1897		
48592	PAULI ALFRED	M	1924	VECHIGEN	BE	CH	NAT. OEK. SS 1944		
05720	PAULI EUGEN	M	1859	STETTIN	PREUSSEN	D	IUR SS 1879		
52917/47806/ /80438/	PAULI HANNS	M	1924	VILLNACHERN	AG	CH	MED. WS 1947		
47806	PAULI HANNS	M	1924	VILLNACHERN	AG	CH	MED. WS 1943		
50438/47806/	PAULI HANNS	M	1924	VILLNACHERN	AG	CH	MED. WS 1945		
04042	PAULI RICHARD	M	1850	LANDAU	BAYERN	CH	MED WS 1871		
31636	PAULI WILFRIED	M	1908	VILLNACHERN	AARGAU	CH	MED. WS 1925		

Fonte: Padilha (2009)

Dessa forma, Padilha (2009) argumenta que o fato de Paula Souza estar matriculado simultaneamente na ETH e na Universidade de Zurique, pode ter ocasionado atrito entre a direção da ETH e os alunos, em particular com Paula Souza,

visto que era proibida a matrícula simultânea nas referidas instituições, apesar da Universidade de Zurique funcionar no prédio da ETH.

Na análise realizada por Padilha (2009), referente a vida acadêmica de Paula Souza em Karlsruhe, conclui-se após análise dos documentos constantes nos Apêndices 4 ao 9, que Antônio Francisco de Paula Souza foi reprovado nos exames finais, não se inscrevendo posteriormente para repetição das provas e, conseqüentemente, nenhum diploma de engenheiro foi emitido em seu nome pela Escola Politécnica.

De fato, a tradução dos documentos trazidos por Padilha evidencia que Paula Souza foi aprovado em Física e em Construção de Canais e Calçadas tendo seu desempenho considerado muito bom (*“recht gut”*), respectivamente pelos Professores Wiedemann e Sternberg. Já com relação ao exame em mecânica aplicada e elementos de máquinas, ele foi arguido pelo Professor Grashoff e teve suas respostas consideradas satisfatórias (*“befriedigend”*).

Nas arguições referentes a construção de máquinas, analítica e mecânica analítica, feitas respectivamente pelos Professores Hart e Schell suas respostas foram consideradas insuficientes (*“ungenügend beantwortet”*, *“nicht vollkommen genügend”* e *“nicht genügend”*). O mesmo Professor Schell o examinou em geometria analítica e classificou o seu desempenho como parcialmente suficiente (*“teilweise genügend”*)

Os exames referentes a geometria descritiva e a geometria aplicada, foram aplicados respectivamente pelos Professores Wiener e Doll os quais consideraram bom (*“gut”*) o desempenho de Paula Souza. Já seu desempenho em Química, foi considerado bastante bom (*“ziemlich gut”*) pelo Professor Weltzien.

No Apêndice 8, vemos uma ata a qual Paula Souza compromete-se a resolver em três dias e sem ajuda externa questões relacionadas a:

1. Mecânica Aplicada e elementos de máquinas (*“Angewadte Mechanik und Maschinenlehre”*)
2. Análise (*“Analysis”*)
3. Geometria Analítica (*“Analytischen Geometrie”*)

Assim, podemos visualizar o documento constante no Apêndice 9, uma carta emitida pelo chefe do arquivo da Universidade de Karlsruhe confirmando que Paula Souza foi, de fato, reprovado nos exames finais, e que nenhum diploma foi emitido em seu nome.

Em face dessas fontes parece não haver dúvidas de que Paula Souza não foi diplomado em Karlsruhe, fato o qual parece ser citado pelo próprio em uma de suas falas, nesse caso direcionadas ao deputado Gabriel Prestes, na Assembleia Legislativa de São Paulo.

Por isso estou certo de que, apesar de ter a oposição do meu colega sr. Gabriel Prestes, si não passar este projeto passará algum outro idêntico. Eu não faço questão do meu projeto: não sou tão afeiçoado às coisas que apresento, **tanto mais quanto não sou portador de títulos, sou um simples engenheiro pratico, porque na escola em que estudei não se davam títulos.**

(PADILHA, p.40, 2010, GRIFO NOSSO)

6.1.1 Paula Souza e uma análise de novas fontes primárias

No intuito de investigar quais fatores influenciaram a vida acadêmica de Paula Souza, buscamos novas fontes junto aos arquivos da Universidade de Karlsruhe e da ETH em Zurique. O contato foi estabelecido por e-mail, por meio do historiador alemão Gert Schubring, professor orientador da presente pesquisa. Os arquivos referentes à ETH encontram-se nos arquivos do estado e nos foram enviados gratuitamente. Já os documentos constantes na Universidade de Karlsruhe, referentes à Escola Politécnica de Karlsruhe¹¹⁵ nos foram enviados mediante um serviço de busca dos próprios funcionários da Universidade.

Os documentos comprovam que os irmãos Paula Souza e seus tios de fato estudaram nas escolas europeias. Contudo, a análise dos primeiros documentos por um lado, já nos revelam fatos até então desconhecidos e, por outro lado, nos levam a novas indagações de pesquisa.

A ficha escolar de Paula Souza na ETH nos trazem fatos reveladores. Logo na folha de apresentação na ficha (Apêndice 10) nos é revelado que Paula Souza era aluno egresso da Escola Politécnica de Hanover, fato esse desconhecido quando confrontado com a historiografia relativa a esse personagem.

¹¹⁵ Salientamos que a Escola Politécnica de Karlsruhe passou por diferentes nomenclaturas ao longo dos anos. Passando a chamar-se Technische Hochschule (TH), posteriormente passando a ser chamada de Technische Universität (TU), tendo a nomenclatura atual de Karlsruhe Institute of Technology (KIT).

Figura 35: Folha de rosto da ficha escolar de Paula Souza na ETH (GRIFO NOSSO) [AETH1]

Paula de Souza, Ant. Brasileira

Abtheilung: I

Jahreskurs: I Schuljahr: 1862

Geburtsort: Rio de Janeiro, Brasilien

Bisherige Ausbildung: Polyt. Sch. Hannover

Deposite Zeugnisse: Polyt. Sch. Hannover

Entretanto, em nossas pesquisas, não encontramos registros, em todas as notas históricas referentes a Paula Souza, de que tenha estudado em Hannover. Assim, a partir dessa constatação, podemos praticamente refutar a recorrente afirmação de que Paula Souza retornou ao Brasil em 1860, pois como poderiam ser compatíveis as hipóteses de retorno ao Brasil em 1860, da chegada em Zurique em 1861 e o fato de ter estudado anteriormente na Escola Politécnica de Hannover? Essa é, sem dúvida, uma questão que carece de esclarecimentos.

Outra questão que não está explicitada, nem esclarecida, refere-se ao forte vínculo estabelecido pela família Paula Souza com a Europa, em particular, com Alemanha, Suíça e Bélgica. Reparemos que o pai de Paula Souza, irmão e tios consolidaram parte de seus estudos em terras europeias. Assim, buscaremos investigar qual seria o contexto da família com tantas relações com países europeus. Certamente, a resposta a essa pergunta não está manifesta nas notas históricas tecidas até então.

Durante boa parte de sua história, principalmente no período Brasil Colônia, o Brasil viveu em ambiente hostil ao desenvolvimento científico. Portugal implementou

uma política de restrição à difusão de conhecimentos e saberes na colônia brasileira. Até a vinda da Família Real em 1808 não existia imprensa no Brasil e a circulação de livros era muito combatida com sérias barreiras à entrada de livros e periódicos em todo território brasileiro. A manutenção do ensino superior em Portugal foi forte instrumento de manutenção desse intenso controle. Assim, em praticamente em todo o período colonial, as pessoas nascidas no Brasil que desejassem fazer cursos universitários deveriam dirigir-se a metrópole. Semelhantemente o ensino secundário brasileiro esteve restrito a membros da elite dominante e a pouquíssimas instituições, sendo sua maioria ligada ao clero.

Nesse contexto, temos por um lado uma educação secundária precária, e talvez por isso, indícios de uma elite que estaria habituada à prática de enviar seus filhos à Portugal e a outros países da Europa para fazerem cursos universitários e para obterem formação secundária. Mesmo no século XVIII, podemos citar como exemplo, uma prática referente à elite colonial mineira no final do referido século, relatada por Fausto (2014):

Muitos membros da elite mineira circulavam pelo mundo e estudavam na Europa. Por exemplo, um ex-estudante de Coimbra – José Joaquim da Maia – ingressou na Faculdade de Medicina de Montpellier na França, em 1786. Naquele ano e no ano seguinte teve contatos com Thomas Jefferson, então embaixador dos Estados Unidos na França, solicitando apoio para uma revolução que, segundo ele, estava sendo tramada no Brasil. Um participante da Inconfidência – José Álvares Maciel – formou-se em Coimbra e viveu na Inglaterra por um ano e meio. (FAUSTO, 2014, p.63-64)

Por outro lado, não encontramos sustentação para afirmarmos que tal prática acontecia comumente, mas em contrapartida, vemos a família Paula Souza (pelo menos duas gerações) construindo toda sua formação secundária e acadêmica em terras Europeias.

Dessa forma, entendemos que estudos culturais acerca dos laços e relações que levaram os “Paula Souza” à Europa, bem como, das práticas da elite brasileira referentes à educação de seus filhos, seriam relevantes para melhor entendimento do contexto.

No tocante ao desenvolvimento escolar de Paula Souza em Zurique, podemos observar a ficha (Apêndice 11) a qual consta sua aprovação no exame de entrada na ETH. Nos trechos marcados, constatamos que Paula Souza não teve um bom

desempenho no exame relativo à Aritmética, com grau $1\frac{1}{2}$, numa escala crescente de 1 à 5, ao contrário do desempenho em matemática, o qual teve nota máxima. A decisão dos examinadores é expressa na última linha: aceite.

Figura 36: Ficha de Aprovação de Paula Souza na ETH (GRIFO NOSSO) [AETH1]

Schuljahr 1861/2
 Name: Paula de Souza Abteilung I Semester: 1
 A. Aufnahme oder Promotion.

Fach	Lehrer	Noten	Fach	Lehrer	Noten
Arithm.		1 1/2	Geometrie		2 1/2
Math.		5	Lehrstuhl		4
Math.		4	Geometrie		1
deutsche Sprache		2 1/2			
franz. u.		1			
Physik		1 1/2			
Conferenzenbeschlüsse: Aufgenommen					

Na análise da mesma ficha escolar, especificamente na terceira página (Apêndice 12), encontramos uma informação jamais mencionada em toda a historiografia consultada, o Professor de Cálculo Diferencial de Paula Souza na ETH foi o célebre matemático alemão Richard Dedekind. Reparemos que o seu desempenho foi excelente, tendo como professor o lendário Dedekind, sendo avaliado com nota máxima (nota 5) no primeiro semestre, com excessão de uma avaliação a qual foi aferido com $4\frac{1}{2}$, também uma excelente nota. É notório também a sua queda de rendimento por ocasião da substituição de Dedekind por Durège, ocasião pela qual seus graus passaram a decrescer de $4\frac{1}{2}$ para $3\frac{1}{2}$

Figura 37: Ficha Escolar de Paula Souza comprovando que foi aluno de Richard Dedekind (GRIFO NOSSO) [AETH1]

C. Quartalberichte.										
Fächer?	Lehrer.	I. Quartal		II. Quartal		III. Quartal		IV. Quartal		Durchschnitt für das Jahr.
		Hilf.	Seit.	Hilf.	Seit.	Hilf.	Seit.	Hilf.	Seit.	
Hilf. d. Physik	Dedekind	5	22	6	5	4	4	5	26	36
Mathematik	Dedekind	2	3	5	4	4	4	5	4	
Physik	Fuchs	3	3	4	3	5	4	5	5	
Mathematik	Walters	5	3	5	3	5	4	5	4	
Physik	S.	5	3	5	3	5	4	5	4	
Mathematik	Krugger	4		5	5					
Physik	Walters	5		6	4	6	4	6	4	
Mathematik	Ad.	5	25	6	4	6	4	6	4	
Physik	Walters	2		6	4	8	4			
Mathematik	Walters					6	4	5	4	
Physik	Walters					4	4	4	4	
Mathematik	Walters							5	3	
		Absent!		Absent!		Absent!		Absent!		
Mathematik	Fuchs	4								
D. Disciplinarisches Verhalten.										

Richard Dedekind lecionou na ETH a partir de 1858 tendo permanecido na instituição até o ano de 1862, retornando a sua cidade natal Braunschweig. É notável relatarmos que, exatamente no período em que ministrava na ETH, Dedekind concebeu a teoria dos chamados “cortes de Dedekind” no sentido de melhor fundamentar alguns conceitos matemáticos.

No desenvolvimento de seus estudos na ETH, Paula Souza passou a ter como professor da cadeira de Cálculo Diferencial e Integral o matemático Elwin Christoffel (1829-1900), tendo um bom desempenho sendo aferido com grau 4. Christoffel iniciou seus estudos universitários na Universidade de Berlim em 1850, onde foi aluno de Johann Dirichlet (1805-1859), tendo concluído sua tese de Doutorado sobre a eletricidade em corpos homogêneos em 1856.

Figura 38: Ficha Escolar de Paula Souza explicitando que foi aluno de Elwin Christofel (GRIFO NOSSO) [AETH1]

D. Disziplinarisches Verhalten.

262

matemática foram escritos por ele, a saber, “*Geometria Superior*”¹¹⁶, formado pelas notas de aulas ministradas no curso com o mesmo nome na Escola Politécnica de São Paulo, publicado em 1895 e “*Mathematik*”¹¹⁷ um livro escrito de próprio punho em língua alemã com variadas explanações sobre diversos tópicos referentes a matemática secundária.

Conforme já explicitado, os estudos de Paula Souza não foram concluídos em Zurique, pois a partir de 1864 passou a ser aluno da Escola Politécnica de Karlsruhe.

A Escola Politécnica de Karlsruhe foi fundada em 1825 não possuindo inicialmente status de ensino superior. Nesse contexto, conforme ressaltado por Schubring (1989), a matemática desempenhava um papel propedêutico em todas as Escolas Politécnicas alemãs, em particular na Escola de Karlsruhe. Devemos lembrar que a visão predominante era de que a matemática possuía uma função preparatória, sendo estudada apenas no primeiro ano juntamente com outras disciplinas consideradas básicas e, nos anos seguintes, sendo cursadas as disciplinas especializadas, de acordo com a carreira escolhida pelo estudante.

Diante dos documentos obtidos, podemos visualizar que Paula Souza iniciou seus estudos na Escola Politécnica de Karlsruhe, matriculado no curso de Química, no ano letivo de 1864/1865, conforme Apêndice 16.

Figura 39: Ficha de Paula Souza na Escola Politécnica de Karlsruhe, referente à 1864/1865. (GRIFO NOSSO) [AKIT2]

21003, 2: Einschreibebuch der Schüler, Studienjahr 1864/65, Neumatrikulierte, Heft 2:

Paula Souza	1864	Matr. (matr.)	Eng. (eng.)	Chemie	1864	11	Paula Souza

Contudo, nos registros referentes ao ano escolar seguinte, o nome de Paula Souza já consta na lista dos matriculados no curso de Engenharia.

¹¹⁶ A referida disciplina foi ministrada pela primeira vez por Paula Souza, consistindo o livro como publicação de suas notas de aulas. O exemplar consultado está disponível na Biblioteca da Escola Politécnica de São Paulo.

¹¹⁷ Exemplar consultado na Biblioteca da Escola Politécnica de São Paulo

21003, 2: Einschreibebuch der Schüler, Studienjahr 1865/66, Rückmelder, Heft 1:

[illegible]

Figura 41: Relatório relativo à Paula Souza na Escola Politécnica de Karlsruhe.
O NOSSO) [AKIT1]

[illegible]

264

Dessa forma, considerando que a atribuição de diplomas na Escola Politécnica de Karlsruhe se deu imediatamente antes da conclusão do curso por parte de Paula Souza, podemos perceber que todo o processo de conclusão dos estudos foi, nesse tempo, um procedimento novo para toda a comunidade, em particular para o próprio Paula Souza.

Outrossim, notemos a existência de uma disparidade em seu desempenho nas provas escritas e orais. O desempenho nas provas escritas foi substancialmente melhor do que nas provas orais. Ainda, no tocante as três provas orais de matemática, notemos que Paula Souza não obteve uma boa avaliação. Coincidentemente, foi o mesmo professor que realizou tal aferição, Wilhelm Schell. Cabe dizer, que Schell era um membro suplente da banca, nesse caso estava substituindo Dienger, que encontrava-se doente.

6.2. Funcionamento da Escola Politécnica de São Paulo

Conforme já colocado, a Escola Politécnica de São Paulo foi instituída por meio da Lei Estadual nº 191 de 24 de agosto de 1893, bem como o seu primeiro regulamento.

A Politécnica foi definida como uma escola superior de matemática e ciências aplicadas às artes e indústrias, com a criação dos cursos de Engenharias Civil, Industrial e Agrícola além do curso anexo de artes mecânicas. A distribuição das cadeiras relativas aos primeiros anos de curso foi disposta da seguinte maneira:

PRIMEIRO ANO

- 1ª Cadeira.-Algebra superior, trigonometria rectilinea e geometria analytica.
 - 2ª Cadeira.-Calculo differencial e integral (1.ª parte).
 - 3ª Cadeira-Physica experimental e meteorologia.
 - 4ª Cadeira.-Geometria descriptiva e suas applicações á theoria das sombras.
- Aula.-Desenho de mão livre. Trabalhos graphicos. .

SEGUNDO ANO

- 1ª Cadeira.-Calculo differencial e integral (2.ª parte).
 - 2ª Cadeira.-Topographia e elementos de physica mathematica.
 - 3ª Cadeira.-Estereolomia e perspectiva.
 - 4ª Cadeira.-Mechanica analytica (1.ª parte) e applicada ás machinas simples.
- Aula.-Trabalhos graphicos correspondentes.

TERCEIRO ANO

1ª Cadeira.-Trigonometria espherica e elementos de astronomia e geodesia

2ª Cadeira.-Mechanica analytica (2.ª parte) e applicada ás machinas e effeito das machinas.

3ª Cadeira.-Resistencia dos materiaes.

4ª Cadeira.-Technologia das profissões elementares e architectura. Aula.-Desenho e projectos de architectura.

Notemos que, nesse modelo as cadeiras de matemática estão concentradas nos dois primeiros anos, além de uma cadeira de trigonometria esférica no terceiro ano.

Entretanto, um ano depois, um novo regulamento foi instituído por meio do Decreto 270-A de 20 de novembro de 1894. Nele foram estabelecidos cursos fundamentais e cursos especiais.

Os cursos fundamentais eram constituídos pelo curso preliminar (com duração de um ano) e pelo curso geral (com duração de dois anos). Os cursos especiais eram os cursos de Engenheiros Civis, Engenheiros Arquitetos, Engenheiros Industriais, Engenheiros Agrônomos, Mecânicos e Maquinistas. Existiam ainda, sem constituírem em cursos especiais, a diplomação como Contadores, Agrimensores e de Engenheiros Geógrafos eram formadas pelas matérias do curso fundamental.

O título de Contador era atribuído àqueles que concluíam o curso preliminar. O título de Engenheiro Geógrafo era conferido aos alunos habilitados em todas as matérias dos cursos preliminar e geral. Já os estudantes que concluíssem o curso fundamental e obtivessem aprovação nas cadeiras de Física Experimental, Meteorologia, Topografia, Elementos de Geodésia, Astronomia, Desenho Topográfico, Elementos de Arquitetura recebiam o título de Agrimensor.

Por outro lado, para a conclusão dos cursos de Engenharia Civil, Arquitetos e Industriais era necessário concluir o curso preliminar, o curso geral e ainda cursar três anos com o currículo correspondente do respectivo curso especial, totalizando assim um total de seis anos.

O estudante era diplomado como Engenheiro Agrônomo ao completar as matérias do curso preliminar e concluir os quatro anos do curso especial, totalizando cinco anos de estudos.

Já para que o estudante obtivesse o título de Mecânico deveria ser aprovado nas matérias do curso preliminar e concluir dois anos de estudos relativos às matérias específicas do curso de mecânico. Os alunos que almejassem o título de Maquinista deveriam ter frequência nos cursos práticos de mecânico e dois anos de estudos com matérias específicas.

Devemos notar que, de alguma forma, a mudança no regulamento reconhece os diversos tipos de formação, contemplando com diploma todos aqueles que concluíssem ao menos o curso geral.

Ressaltemos novamente que a reforma no regulamento mudou completamente a estrutura existente instituindo um curso preliminar e cursos gerais. Lembremos que, de forma semelhante, a Escola de Minas de Ouro Preto também instituiu um curso fundamental por constatar que os alunos que chegavam à Escola não tinham condições de acompanhar devidamente as lições ministradas. Nesse contexto, o curso fundamental assumiu o papel de efetivar uma melhor preparação de maneira a dar suporte para o restante da trajetória na Escola.

Por outro lado, lembrando que Paula Souza teve sua formação secundária e acadêmica na Suíça e Alemanha, ressaltamos que as “escolas politécnicas alemãs” foram estabelecidas no início do século XIX e embora tenham adotado um modelo parecido com a *École Polytechnique* de Paris, tiveram um *status* decisivamente inferior durante toda a primeira metade do século XIX. Contudo com a expansão industrial alemã por volta de 1870 elas cresceram rapidamente em importância até que em 1900 chegaram a ser consideradas de possuir *status* igual ao das universidades.

Schubring (1989), em sua análise acerca do papel da matemática nos “colégios técnicos alemães” relata que:

Ao longo do século XIX, a matemática nos colégios técnicos passou por um processo de transformação a qual num certo sentido foi semelhante ao que as universidades já haviam passado. Originalmente, a matemática tinha a mesma função preparatória: deveria ser estudada antes do estudo especializado das disciplinas profissionais (i.e., técnicas). O lugar da matemática dentro do currículo foi caracterizado por sua designação como uma *allgemeine Wissenschaft* (ciência geral). Essa concepção remonta à tradicional função politécnica da matemática, e sua unânime adoção nas escolas politécnicas alemãs foi, de fato em grande parte, efeito da transmissão do modelo da *École Polytechnique*. Deve-se ressaltar, entretanto, que essa concepção

também tinha raízes no pensamento epistemológico alemão.¹¹⁸
(SCHUBRING, 1989, p.180, TRADUÇÃO NOSSA)

Em particular, a matemática também desempenhava um papel propedêutico dentro da estrutura da Escola Politécnica de Karlsruhe. Devido, em boa parte, ao fraco nível dos alunos egressos do ensino secundário, o primeiro ano do currículo da Escola era concebido como um período introdutório, com forte presença da matemática.

Oliveira (2004), quando refere-se à mudança de regulamento também ressalta o papel propedêutico da matemática.

Loschiavo dos Santos (1985) ressalta o papel propedêutico da Matemática e das demais disciplinas do Curso Fundamental, bem como a importância do ensino da Matemática, da Física, da Química e das Ciências Naturais para a formação do Engenheiro.

A Matemática, em particular o Cálculo Infinitesimal, exerceu seu papel de disciplina de serviço na educação dos estudantes de engenharia. Tinha a finalidade de atender às necessidades dos estudantes em seu Curso, capacitando-os para o exercício de suas futuras funções.

(OLIVEIRA, 2004, p.22)

Dessa forma, podemos entender que, talvez o contato de Paula Souza com a estrutura das escolas técnicas na Alemanha, em particular na Escola Politécnica de Karlsruhe, somado com o sistema precário do ensino secundário brasileiro e consequente despreparo dos estudantes postulantes à Escola Politécnica de São Paulo pode ter sido um dos fatores que motivaram essa mudança de regulamento.

Nesse sentido, parece-nos adequado conjecturar que a nova estrutura estabelecida na Escola Politécnica de São Paulo pode ser visualizada como transmissão do modelo das Escolas Politécnicas alemãs, particularmente da Escola Politécnica de Karlsruhe, uma vez que, o currículo nas referidas instituições adotou o modelo de um primeiro ano introdutório, com a matemática assumindo um papel propedêutico, e, em

¹¹⁸ Over the course of the 19th century, mathematics at the technical colleges was undergoing a process of transformation that was in a certain sense similar to that which it already experienced at the universities. Originally, mathematics had the same preparatory function: it had to be studied before one began specialized studies in the professional (i.e., here: technical) discipline. The place of mathematics within the curriculum was characterized by its designation as an *allgemeine Wissenschaft* (general science). This conception harkens back to the traditional polytechnical function of mathematics, and its unanimous adoption within the German polytechnical schools was in fact largely the effect of the transmission of the model of the *École Polytechnique*. One must stress, however, that this conception also had roots in German epistemological thought.

ambos casos, com uma estrutura influenciada pela existência de um ensino secundário que não satisfazia as demandas necessárias.

Nesse novo cenário, regulamentado pelo novo decreto, as matérias relativas ao Cálculo, Geometria Analítica, Trigonometria, Trigonometria Esférica, Geometria e Álgebra concentraram-se nas grades do curso preliminar e no primeiro ano do curso geral, conforme podemos perceber ao olharmos para as grades curriculares:

Curso Preliminar

- Cadeira – Matemática Elementar (Revisão e Complementos), trigonometria retilínea e esférica, álgebra superior e rudimentos de geometria analítica e de geometria descritiva.
- 1ª Aula – Escrituração Mercantil
- 2ª Aula – Desenho a mão livre e geométrico elementar

Curso Geral

1º Ano

- 1ª Cadeira – Geometria Analítica a duas e a três dimensões, e geometria superior.
- 2ª Cadeira – Cálculo Infinitesimal
- 3ª Cadeira – Geometria Descritiva
- 4ª Cadeira – Física Experimental e meteorologia.
- Aula – Desenho Geométrico e de ornamento

2º Ano

- 1ª Cadeira – Mecânica Racional
- 2ª Cadeira – Topografia e elementos de geodésia e de astronomia.
- 3ª Cadeira – Aplicação da geometria descritiva e generalidades da arquitetura
- 4ª Cadeira – Química Geral e noções de ciências naturais
- Aula – Desenho Topográfico e Elementos de Arquitetura

Nesse sentido, cabe salientarmos que, embora somente os alunos que cursassem o curso geral estudariam o Cálculo, todos os cursos, exceto o de maquinista, tiveram contato com vários conceitos matemáticos na cadeira do curso preliminar.

6.2.1 Ensino de Cálculo na Escola Politécnica de São Paulo

Paula Souza conheceu a prática das escolas alemãs, em particular da EP de Karlsruhe e da ETH em Zurique, de publicar anualmente um anuário. Dessa forma,

iniciou esta prática na sua escola também a partir do ano de 1900. Assim, a partir desse momento, passaram a ser publicados os intitulados “Annuários da Escola Polytechnica de São Paulo” A partir da leitura das informações constituídas nos anuários começamos a traçar um desenho de como foram constituídos os cursos iniciais de Cálculo na Escola Politécnica de São Paulo.

O primeiro anuário explicita os programas relativos às cadeiras dos Cursos Preliminar e Geral, dos anos letivos de 1899-1900. Em particular, os conceitos de análise concentraram-se na 2ª cadeira do 1º ano do Curso Geral. Os tópicos foram subdivididos em Cálculo Infinitesimal, Cálculo Diferencial, Aplicações analíticas do Cálculo Diferencial e Cálculo Integral, conforme pode ser visto no Apêndice 23.

O lente da referida cadeira foi Urbano de Vasconcellos, engenheiro formado pela Escola Politécnica do Rio de Janeiro em 1886. Urbano iniciou o exercício da docência em 1893 ensinando Matemática aos candidatos à matrícula na Escola Politécnica e em 15 de maio de 1894 foi nomeado como lente substituto da seção de Matemática. Tornou-se lente catedrático da Escola Politécnica de São Paulo das 1ª e 2ª cadeiras do 1º ano do Curso Geral (Geometria Analítica e Análise Infinitesimal) por meio de sua nomeação em 15 de janeiro de 1895.

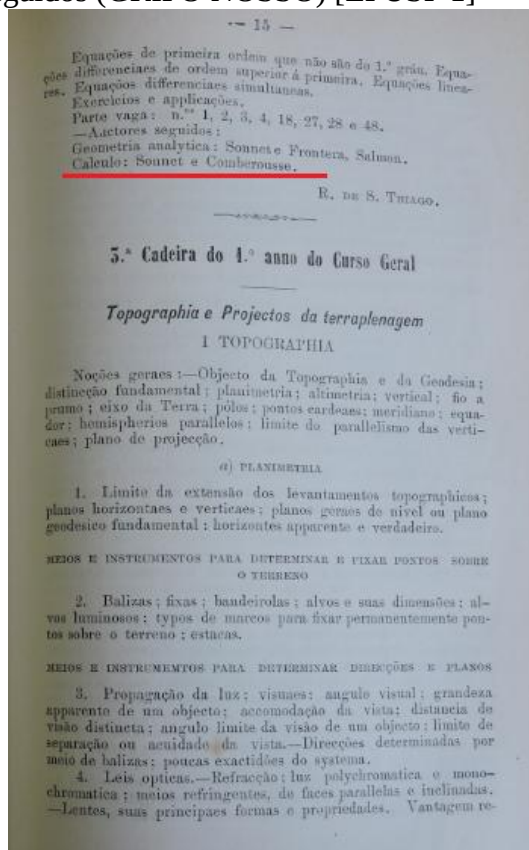
Desde a implantação da Escola Politécnica o ensino dos conceitos relacionados ao Cálculo seguiu o programa descrito anteriormente até o ano de 1901, ano da morte prematura do professor Urbano de Vasconcellos, interrompendo abruptamente um ciclo que se estabelecia desde o início da Escola.

Ao mesmo tempo, um novo e amplo ciclo era iniciado. A reforma do regulamento por meio do Decreto nº 924-A de 19 de julho de 1901 modificou os programas de ensino. O professor Rodolpho de São Thiago (1870-1933) assumiu a recém criada cadeira de Geometria Analítica e Cálculo Diferencial e Integral em 1901, em substituição à cadeira de Geometria Analítica e Análise Infinitesimal, permanecendo nela por três décadas consolidando as marcas de seu trabalho em gerações de estudantes que perpassaram pela Escola Politécnica nas primeiras décadas do século XX.

O programa da disciplina de Geometria Analítica e Cálculo Diferencial permaneceu basicamente o mesmo, apresentando entretanto maior detalhamento na seção referente às noções preliminares do cálculo infinitesimal. O novo programa acrescentou o método da exaustão, também chamado de método dos antigos, aos métodos de Newton, de Leibniz e de Lagrange já contemplados no programa. Foram acrescentadas proposições relativas aos infinitamente pequenos.

O novo programa foi publicado no Anuário da Escola Politécnica em 1903, trazendo também uma importantíssima informação, os autores das obras que foram utilizadas como base para os cursos. Em Geometria Analítica foram seguidas as obras de Sonnet e Frontera, Salmon. O curso de Cálculo foi baseado na obras de Sonnet e de Comberousse.

Figura 42: Parte do Programa de Ensino de 1902 a 1903 informando os autores seguidos (GRIFO NOSSO) [EPUSP 1]



O supracitado autor Sonnet refere-se em verdade à Hippolyte Sonnet (1800-1879), ex-aluno da Escola Normal Superior¹¹⁹ tendo defendido sua Tese para obtenção de grau de Doutor em Ciências em 1840. A partir de 1846 foi Professor de Análise e também de Mecânica na Escola de Artes e Manufaturas e Inspetor da Academia de Paris.

Sonnet foi autor de diversas obras sobre Matemática Aplicada, Geometria Analítica, Análise e Mecânica. Em particular, sua principal publicação na área de

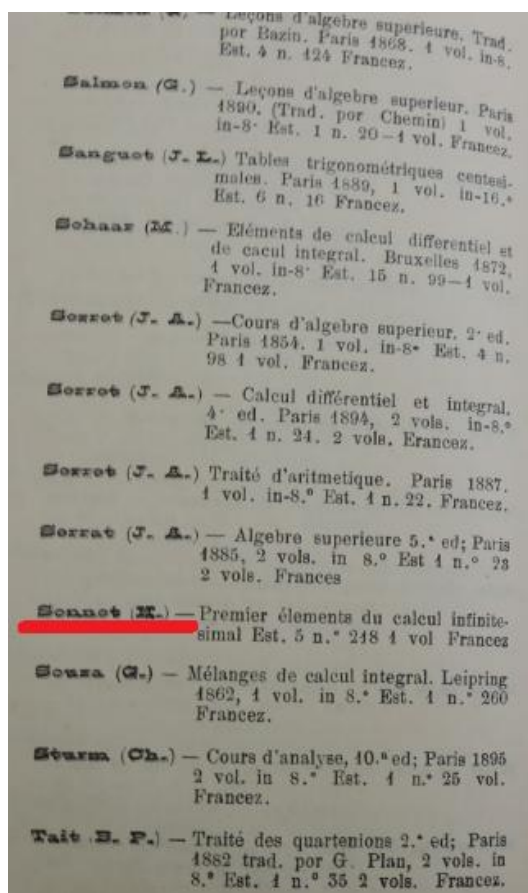
¹¹⁹ Ecole Normale Supérieure

análise foi *Premiers éléments de calcul infinitesimal à l'usage des jeunes gens qui se destinent à la carrière d'ingénieur* (1869), tendo tido oito edições e qual foi usada como base para o curso de Cálculo na Escola Politécnica de São Paulo.

No clássico trabalho realizado por Zerner (1986), a respectiva obra de Sonnet foi classificada como pertencente a uma segunda geração de tratados de análise franceses, geração que era caracterizada pelo uso do princípio da substituição dos infinitamente pequenos. Entretanto é salientado que a obra em questão possuía características próximas das obras da chamada primeira geração de tratados, cujos autores são Lacroix (1802) e Boucharlat (1813), mais especificamente a obra de Sonnet é classificada como um arcaísmo de segunda geração, ou seja, uma obra pertencente a segunda geração mas também relacionada com as obras da primeira geração.

No catálogo da Biblioteca da Escola Politécnica de São Paulo publicado em 1913 constam a obra intitulada *Dictionnaire des mathématiques appliquées* e o tratado *Premier éléments de calcul infinitesimal*.

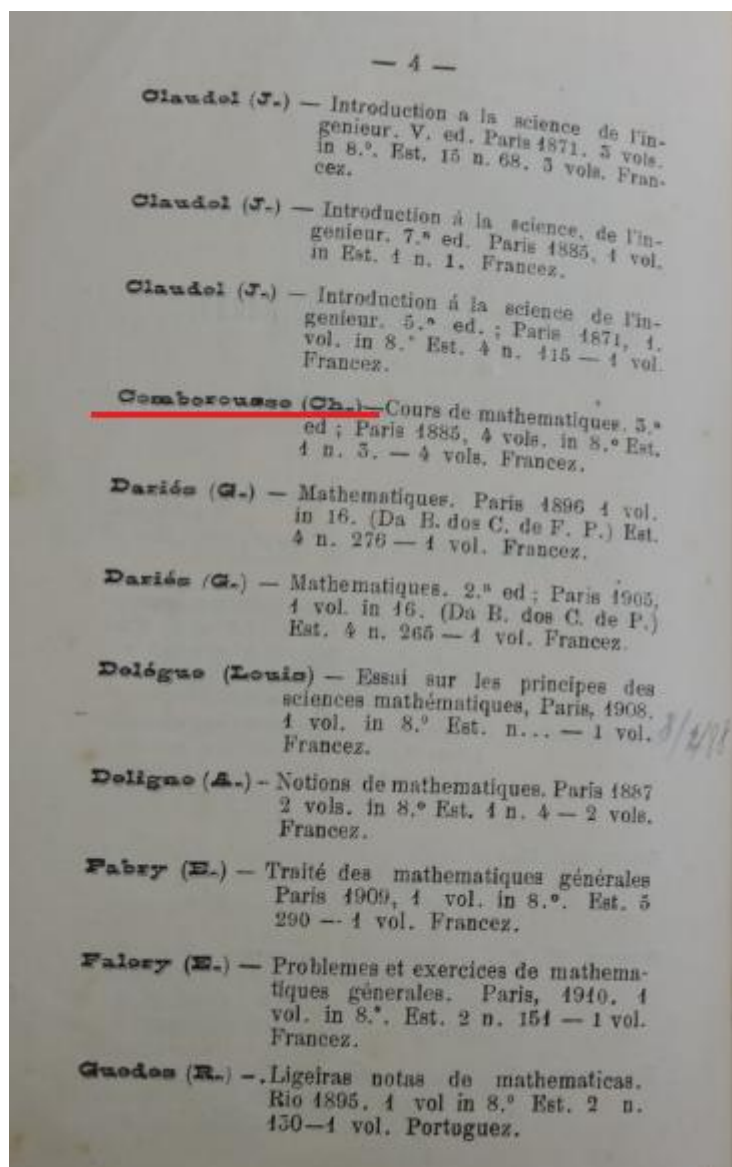
Figura 43: Página do Catálogo contendo o tratado de Sonnet (GRIFO NOSSO) [EPUSP 9]



Charles de Comberousse (1826-1897) escreveu um tratado intitulado *Cours des Mathematiques* formados por quatro volumes, a qual também foi utilizada como referência para o curso de Cálculo na Escola Politécnica. Além de seu *Cours des Mathematiques*, Camberousse também escreveu um tratado de Geometria e um livro sobre a história da Escola Central de Artes e Manufaturas.

A sua obra também consta no Catálogo da Biblioteca da Escola Politécnica em 1913.

Figura 44: Página do Catálogo contendo a obra de Comberousse (GRIFO NOSSO) [EPUSP 9]



Após a publicação do programa da disciplina Geometria Analítica e Cálculo Diferencial e Integral em 1901, somente no ano de 1932 foi publicado um programa relativo à disciplina Cálculo Diferencial e Integral no Anuário da Escola Politécnica de São Paulo.

O programa publicado em 1932 não apresenta maiores alterações na comparação com o programa publicado anteriormente em 1901. No entanto, existem mudanças relevantes a serem destacadas.

Destaca-se inicialmente no novo programa a inserção dos números reais e imaginários.

O programa continua contendo tópicos relacionados aos infinitamente pequenos, o trabalho com números reais (racionais e irracionais) e com os chamados números imaginários. Com relação às funções foi acrescentada a definição e proposições relativas à continuidade. Em termos de séries foram incluídas as principais proposições relacionadas com a convergência e o trabalho com as chamadas séries exponenciais, logarítmicas e circulares. Ressalte-se ainda a inserção do trabalho com as Séries de Fourier e um programa mais robusto de Equações Diferenciais.

- Funções e sua classificação. Noções sobre a continuidade.
- Método dos limites – Conceção de Newton.
- Método infinitesimal – Conceção de Leibniz
- Método das derivadas – Conceção de Lagrange
- Considerações sobre a análise ordinária ou algébrica e a análise transcendente ou infinitesimal. Distinção entre o método e o cálculo.

a) Números reais: racionais, irracionais e relativos. Números imaginários, expressões imaginárias ou complexas; expressões imaginárias conjugadas; módulo e argumentos. Representação gráfica das quantidades imaginárias;

b) Funções: definição e classificação. Limite, definição e proposições. Primeiras noções sobre o que se deve entender por quantidade infinitamente pequena. Continuidade das funções; definição e proposições.

c) Recapitulação sumária sobre as séries; definições; utilidade das series. Convergência das séries: proposições mais importantes. Séries exponenciais, logarítmicas e circulares.

Ao observarmos os programas relativos ao Cálculo na Escola Politécnica de São Paulo podemos traçar, de forma preliminar, características presentes nos respectivos programas.

As noções preliminares destacam procedimentos associados a alguns dos precursores do Cálculo. Estão presentes em todos os programas consultados, do início da Escola Politécnica até o ano de 1932, os métodos dos limites (concepção de Newton), infinitesimal (concepção de Leibniz) e o das derivadas (concepção de Lagrange).

Desta maneira, parece evidente que nas primeiras quatro primeiras décadas de ensino de Cálculo, foram ministrados clássicos procedimentos desenvolvidos e/ou associados aos célebres matemáticos Newton, Leibniz e Lagrange. A tendência do uso dos antigos métodos fica mais evidente quando lembramos que a partir de 1901 foi incluído aos métodos supracitados o chamado método da exaustão. Embora não saibamos ao certo como eram colocados exatamente esses procedimentos devemos destacar sua permanência no programa durante, pelo menos, mais de trinta anos.

Diante disso, vemos que a fundamentação do cálculo diferencial por meio dos métodos de Newton, Leibniz e Lagrange já estabelecida na Escola Politécnica do Rio de Janeiro, também apresenta a mesma configuração na Escola Politécnica de São Paulo.

As expressões indeterminadas como $\frac{0}{0}$ (por vezes chamadas de verdadeiro valor) também aparecem em todos os programas.

Devemos ressaltar o trabalho com as quantidades infinitamente pequenas a partir, pelo menos, de 1901 e também com os números reais, já presentes no programa de 1932.

De forma geral, entendemos que grande parte dos programas parecem ser destinadas ao ensino de procedimentos algorítmicos relacionados às operações de diferenciação e integração, bem como das aplicações do Cálculo Diferencial e do Cálculo Integral. A grande maioria dos tópicos dos programas de Cálculo Integral é dedicada às técnicas de integração e aplicações.

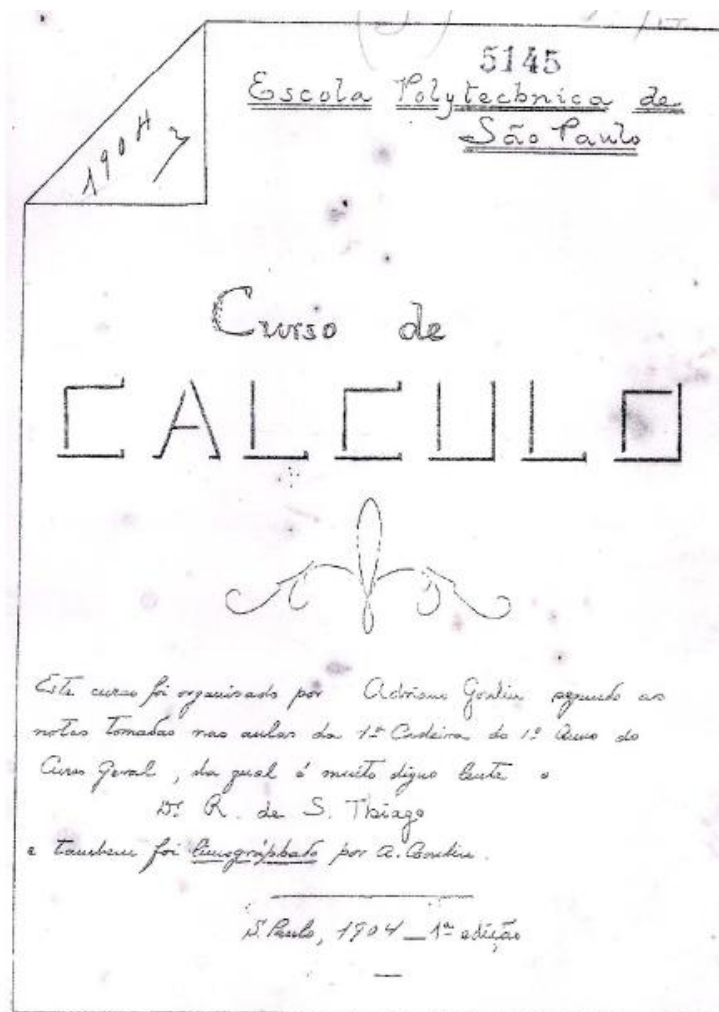
6.2.1.1 Notas de Aula

O trabalho de Oliveira (2004), traz uma análise das notas de aulas da disciplina Geometria Analítica e Cálculo Infinitesimal da Escola Politécnica de São Paulo em

1904. A fonte em questão foi litografada e organizada na forma de caderno pelo ex-aluno Adriano Goulin.

O caderno contém as notas de aula do curso de Cálculo ministrado pelo professor Rodolpho de San Thiago. Sem dúvida alguma, essa fonte configura-se como extremamente relevante em nossa pesquisa.

Figura 45: Capa do caderno organizado por Goulin



Fonte: Oliveira (2004)

As páginas iniciais do texto são dedicadas à apresentação das noções fundamentais do Cálculo, discussões de conceitos básicos como função e continuidade. São apresentados ainda os métodos da Exaustão, de Leibniz, de Newton e de Lagrange, métodos esses que, segundo parece dizer o texto, conduzem ao mesmo resultado, o Cálculo Diferencial.

O texto é iniciado com a seguinte definição de função:

Função de uma ou mais quantidades é uma expressão analytica em que entram estas quantidades combinadas ou não com outras que têm valores certos e determinados ao passo que ellas podem receber valores quaesquer. Essas quantidades que têm valores certos e determinados ao passo que ellas podem receber valores quaesquer. Essas quantidades que têm valores certos e determinados denominam-se constantes e as outras variáveis.

(GOULIN, 1904, p.3)

Notemos que a definição de função apresentada assemelha-se com a definição feita por Euler em 1748: “*Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de um modo qualquer dessa quantidade e de números, ou de quantidades constantes.*”¹²⁰ (EULER, 1748, TRADUÇÃO NOSSA)

Logo a seguir as variáveis são classificadas como dependentes e independentes. Nesse ponto novamente observamos algumas semelhanças com os conceitos definidos por Euler, uma vez que este também apresentou uma conceituação para a noção de variável.

Assim como houve classificação das variáveis, as funções foram classificadas em funções implícitas e explícitas. É especificado que, de forma geral $f(x, y, z) = 0$ é uma função implícita e $z = f(x, y)$ é uma função explícita.

Após a argumentação de que quando existe um maior número de equações do que de incógnitas fatalmente existirão variáveis independentes, é citada a existência de outras classificações para funções, como, por exemplo, racionais e irracionais, concretas e abstratas, ressaltando-se a distinção entre funções simples e funções compostas. Nessa concepção existem dez funções simples as quais são aquelas em que a variável dependente está ligada a variável independente por uma única operação, a saber:

$y = a + b$	Função soma
$y = a - b$	Função subtração
$y = ab$	Função produto
$y = \frac{a}{b}$	Função quociente
$y = b^a$	Função potência
$y = \sqrt[a]{b}$	Função raiz
$y = \lg b$	Função logarítmica
$y = \operatorname{sen} b$	Função circular direta
$y = \operatorname{arc}(\operatorname{sen} = b)$	Função circular inversa
$y = a^b$	Função exponencial

¹²⁰ Functio quantitalis variabilis est expressio analytica quomodocunque compósita ex illa quantitate variabili et numeris seu quantitatibus constantibus.

Assim considerando-se que as seis primeiras funções “*só figuram as operações da álgebra*” elas são denominadas *algébricas*, sendo as outras denominadas *transcendentes*.

Nesse ponto, devemos notar que a apresentação e classificação das funções denominadas simples, conforme explicitado por Goulin, nos remete a mesma classificação feita por Cauchy, de forma pioneira, em seu *Cours d'Analyse*.

Dessa forma, entendemos que a apresentação das funções simples sugere uma evidente influência do texto de Cauchy, de forma que a apresentação tecida por Goulin, pode ser considerada como documentação de recepção de conceitos estabelecidos por Cauchy.

A noção de continuidade apresentada vincula-se a costumeiras formulações do século XVIII: “*uma quantidade se diz contínua quando não pode passar de um valor a outro sem passar por todos os valores intermediários*” (GOULIN, 1904, p.4).

Logo a seguir, maiores detalhes relativos à respectiva noção são acrescentados. Dessa vez o texto define a noção de “função contínua em um intervalo”.

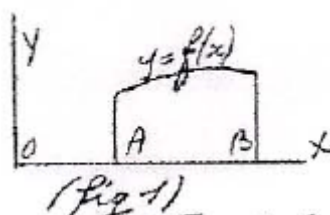
Tendo um systema de eixos coordenados e sendo $y = f(x)$ a equação de uma certa curva, se, dando a b um valor A e outro B , fizermos variar b de um modo contínuo e se a função variar de um modo contínuo nesse intervallo, diremos que a função é continua nesse intervallo. A continuidade é pois, representada por uma curva.
(GOULIN, 1904, p.4-5)

Observemos que a noção de continuidade apresentada parece estar em consonância com àquela concebida por Arbogast, em 1791. De fato, Arbogast entendia que a lei da continuidade estava baseada no fato de que, uma determinada quantidade não pode passar de um estado para outro, sem passar por todos os valores intermediários que estão sujeitos à mesma lei.

Lembremos que o entendimento de Arbogast relativo ao conceito de continuidade foi diferente com relação ao conceito estabelecido por Euler, amplamente aceito até então. De maneira que podemos entendê-lo como um estágio intermediário, entre o entendimento estabelecido por Euler e os posteriormente estabelecidos por Cauchy e Bolzano.

O texto especifica ainda que a continuidade pode ser indefinida ou limitada, sem entretanto defini-los. A representação visual referente ao conceito de continuidade é dada por meio da imagem abaixo:

Figura 46: Representação visual do conceito de continuidade



Fonte: Goulin (1904)

Na concepção exposta, a dificuldade da resolução dos problemas encontra-se na determinação das relações existentes entre as quantidades dadas e as quantidades desconhecidas objetivando obter os valores destas. Nesse sentido, segundo o texto, os métodos da análise ordinária são insuficientes para tal demanda, devendo-se lançar mão dos métodos da chamada análise transcendente ou infinitesimal. A distinção entre a análise ordinária e a infinitesimal foi exemplificada da seguinte maneira:

Supponhamos resolver uma questão qualquer de áreas. Se quizermos achar a área de um rectangulo, p. ex, resolveremos facilmente esse problema com os recursos da Algebra fazendo figurar na equação dos dados. Quando não se pode resolver directamente a questão lança-se mão de meios indirectos nos quaes não figuram os dados da mesma. É o caso da área de um circulo, que é obtida extendendo a formula de um polígono. O primeiro methodo, em que se joga com os elementos da questão, é o methodo directo ou da analyse ordinária e o segundo é o da analyse infinitesimal. Nesse último se joga com elementos entre os quaes seja mais fácil resolver a questão do que com os próprios dados. Procura-se relações entre os elementos para se colligir quaes as relações entre as quantidades. (GOULIN, 1904, p.5)

Dentro dessa visão, diante da colocação do problema e do método de resolução, as chamadas “quantidades auxiliares” parecem constituir-se como elemento chave na construção da teoria e, segundo a visão proposta, Leibniz, Newton e Lagrange elaboraram diferentes propostas para as respectivas quantidades, assim, “*essas quantidades auxiliares introduzidas para facilitar a resolução da questão são para Leibniz, os infinitamente pequenos ou differenciaes, para Newton os limites das relações dos acréscimos dessas quantidades e para Lagrange as derivadas.*” (GOULIN, 1904,p.5).

Nessa linha de raciocínio existem diferentes respostas para os mesmos problemas e o desenvolvimento de diferentes métodos conduzindo ao mesmo resultado, o que fica claro nas próprias palavras registradas no texto, “*vamos estudar esses*

metodos em separados e confronta-los, mostrando que, embora diferentes em sua origem, conduzem sempre ao mesmo resultado” (GOULIN, 1904, p.5-6)

No entanto, o primeiro método a ser comentado é o chamado método da exaustão, o qual segundo o texto foi o fundamento do Cálculo Diferencial. Cabe-nos lembrar que o método da exaustão somente passou a constar no programa da cadeira de Cálculo Diferencial na Escola Politécnica de São Paulo na reformulação do programa em 1901, exatamente no momento em que Rodolpho de S. Thiago assumiu a cadeira.

Antes da discussão do método da exaustão, a noção de limite é apresentada como uma quantidade fixa a qual uma variável se aproxima sem, no entanto, jamais atingi-la.

Chama-se limite de uma quantidade uma quantidade fixa da qual uma variável se aproxima sem jamais atingi-la. É preciso, para que a fixa seja limite, que a diferença entre ella e a variável se possa tornar menor do que qualquer quantidade dada. Se supuzermos uma circunferência de circulo e um polygono nella inscripto e se duplicarmos sempre o numero de lados o pollygono tenderá para a circunferência e esta será limite daquelle. (GOULIN, 1904,p.6)

Notemos que a noção de limite apresentada, vincula-se com a concepção amplamente aceita, no século XVIII, a partir de D’Alembert, entendendo que uma grandeza poderia aproximar-se, tanto quanto se queira, da quantidade a qual é o limite. Salientemos ainda que, nessa apresentação, o conceito de função não ocupa um papel central, visto que o limite está sendo definido como limite de uma quantidade, e não como, o limite de uma função.

Por outro lado, assim como a concepção corrente no século XVIII, a noção de limite não foi apresentada como um objeto novo, mas baseado na chamada autoridade dos antigos, associando o conceito de limite com o método da exaustão, desenvolvido pelos gregos antigos.

O método da exaustão, dentro da visão exposta no texto, é considerado como a base do Cálculo Diferencial, visto que, *“como elles tinham estudado as formas planas tornaram-nas como auxiliares para o estudo das formas curvas. Elles constituíram, portanto, a base do Cálculo differencial porque introduziram os polygonos para estudar uma circunferência de círculo”* (GOULIN, 1904, p.6)

O texto ressalta que o método da exaustão surge da impossibilidade do trabalho direto com as formas limitadas por curvas e do consequente uso dos conhecimentos

relativos às formas geométricas limitadas por linhas retas para a resolução dos problemas relativos com as formas curvas.

Na descrição do método chama-se a atenção para a propriedade relativa aos polígonos semelhantes inscritos em circunferências de diferentes raios, a saber, que os quadrados dos diâmetros são proporcionais às áreas dos polígonos:

$$\frac{A_p}{A_{p'}} = \frac{D^2}{D'^2}$$

Argumenta-se que, como não foi especificado o número de lados dos polígonos, pode-se dizer que a propriedade existe sempre e que em virtude da continuidade a mesma propriedade deve ser válida para circunferências:

$$\frac{C}{C'} = \frac{D^2}{D'^2}$$

Ressaltou-se ainda que como a propriedade acima não poderia ser demonstrada diretamente utilizou-se o chamado método do absurdo, entendido como: *“depois de suspeitarem a verdade elles admittiam que não era verdade e demonstraram que disto resultava um absurdo. Era esse o método para avaliar a área de uma circunferência.”* (GOULIN, 1904, p.6)

Nessa visão, a circunferência e a denominação do método da exaustão foram definidas da seguinte maneira:

Daki a definição seguinte de circunferência de circulo: é um polygono de numero indefinido de lados infinitamente pequenos. À medida que o polygono vae augmentando elle vae como se exaurindo: daki a denominação de methodo da exaustão. Este methodo é quase o verdadeiro methodo infinitesimal e, se elle tivesse uma notação especial, talvez seria o mais empregado. (GOULIN, 1904, p.6)

Em seguida, são destinadas algumas páginas com considerações referentes ao Método de Leibniz. Contudo, não é descrito um método em particular, mas são feitas reflexões com respeito à forma como Leibniz encarava determinados problemas e elementos de sua teoria entremeadas com alguns exemplos.

Assim, a ideia central de Leibniz no desenvolvimento de sua teoria foi expressa da seguinte forma:

Leibniz, para resolver as questões, introduziu os taes infinitamente pequenos ou differenciaes das quantidades. Elle suppunha as quantidades compostas de elementos infinitesimae, estabelecia relações entre estas e, partindo dessas relações, chegava a determinar as relações entre as quantidades da questão. (GOULIN, 1904, p.6)

Observemos que, a concepção expressa no texto, corrobora com a visão predominante de que Leibniz fundamentou o seu cálculo por meio dos infinitamente pequenos.

No entanto, conforme já ressaltado em capítulos anteriores, o entendimento trazido pela atual historiografia da matemática é antagônico a este, ou seja, o cálculo de Leibniz não estaria fundamentado nas quantidades infinitamente pequenas, mas na noção de diferencial, o qual é, em última análise, uma variável tomada ao longo de sequências infinitas de valores, ao longo dos eixos.

São tecidas rápidas análises a respeito dos problemas da quadratura e do movimento de um móvel com movimento variado. Segundo o texto, Leibniz no intuito de resolver o problema da quadratura, supõe um retângulo infinitesimal de maneira que a área a ser calculada seja composta por uma série desses retângulos. Nessa abordagem a área de cada um dos retângulos é composta pelo produto do elemento y pela altura infinitamente pequena α . Finalizando o comentário o texto conclui que a área em questão seria dada por:

$$A = y\alpha + y'\alpha + y''\alpha + \dots$$

A estratégia sugerida no texto para resolução do problema relativo a um móvel com movimento variado é a de fazer uma “decomposição em partes do movimento variado”

Outro exemplo temos em *Mechanica*, quando se estuda o movimento de um móvel que percorre com movimento variado uma certa distancia num certo tempo 20^m , digamos. No fim de algum tempo não se pode determinar exactamente a velocidade nesse instante. Se dividirmos esse tem em metade a variação do movimento será mais fácil de determinar do que anteriormente. Em 5^m seria ainda mais fácil. Chegando a 1^m , o erro é facilmente desprezível. Num segundo podemos considerar o movimento como uniforme. O que fizemos, pois? Decompomos em partes o movimento variado.

(GOULIN, 1904,p.7)

Finalizando o comentário, o texto faz uma comparação entre os papéis do movimento uniforme e dos elementos infinitamente pequenos no estudo da cinemática e do Cálculo respectivamente; “*em Mechanica o movimento uniforme está para o variado, assim como no Calculo os elementos infinitesimales de um todo estão para o todo*” (GOULIN, 1904,p.7)

Essa analogia configura-se no texto como um ponto de partida para uma explanação acerca dos elementos infinitamente pequenos. Tais elementos não são caracterizados como quantidades quase nulas, mas como uma quantidade variável que tende para zero.

É grande erro supôr que um elemento infinitamente pequeno é quase nullo porque ele é uma quantidade essencialmente variável que tende para o limite zero. Elle pode se tornar menor do que qualquer quantidade, por menor que ella seja, assim como existem os infinitamente grandes maiores do que qualquer quantidade dada.
(GOULIN, 1904, p.6)

Notemos aqui que a noção de infinitamente pequeno é a mesma adotada por Cauchy, “*Diz-se que uma quantidade variável torna-se infinitamente pequena, quando seu valor numérico decresce indefinidamente de maneira a convergir para o limite zero.*” (SCHUBRING & ROQUE, 2016, p.17), sinalizando outro sinal de recepção de conceitos estabelecidos por Cauchy. A relação entre tais quantidades são discutidas em termos dos chamados infinitamente pequenos de diversas ordens.

Nesse sentido, a relação entre essas duas espécies de quantidades é também visualizada como sendo uma quantidade que tende para zero de maneira mais rápida que a outra.

Supponhamos um numero b que tenda para zero. Á medida que b decresce para zero, b^2 decresce muito mais rapidamente. Assim também, uma fracção própria é tanto menor quanto maior é a sua potência. Há, pois, vários infinitamente pequenos, mas tendendo mais rapidamente do que os outros para o limite zero. Exemplo:
 $\frac{dy}{x}, \frac{dy}{x^2}, \frac{dy}{x^3}, \dots$ (GOULIN, 1904,p.7)

Na continuação do desenvolvimento da teoria ressalta-se que o produto $M\alpha$ de uma quantidade finita M por um infinitamente pequeno α será uma quantidade infinitamente pequena. As quantidades infinitamente pequenas de diversas ordens são caracterizadas por meio da comparação do produto de uma quantidade finita por um

infinitamente pequeno principal com respeito ao próprio infinitamente pequeno principal.

Dessa forma, considerando α como infinitamente pequeno principal e M uma quantidade finita, é definido que, se a relação do infinitamente pequeno com o principal é uma quantidade finita, então ela será chamada de infinitamente pequeno de primeira ordem.

$$\frac{M\alpha}{\alpha} = M$$

Analogamente, se a relação do infinitamente pequeno para o principal for um infinitamente pequeno de primeira ordem então diremos que ele será um infinitamente pequeno de segunda ordem.

$$\frac{M\alpha^2}{\alpha} = M\alpha$$

De forma geral, quando a relação entre um infinitamente pequeno e o principal é de ordem $n - 1$, diz-se que ele será um infinitamente pequeno de ordem n .

$$\frac{M\alpha^n}{\alpha} = M\alpha^{n-1}$$

A partir desse ponto são explicitados os chamados métodos de Leibniz, de Newton e de Lagrange.

Logo de início de sua exposição acerca do Método de Leibniz, Goulin evidencia, em seu entendimento, qual seria a visão de Leibniz com respeito ao Cálculo.

Leibniz, para resolver as questões, introduziu os taes infinitamente pequenos ou differenciaes das quantidades. Elle suponha as quantidades compostas de elementos infinitesimais, estabelecia relações entre estas e, partindo dessas relações, chegava a determinar as quantidades da questão. (GOULIN, 1904, p.5)

Dentro da visão expressa por Goulin, o cálculo de Leibniz estaria fundamentado nas quantidades infinitamente pequenas. Fato esse, conforme já explicitado, não corresponde com o entendimento colocado pela historiografia atual de que o cálculo

leibniziano não esteve baseado na noção de infinitamente pequeno, mas no conceito de diferencial.

Tal concepção é ilustrada, logo a seguir, por meio de dois exemplos distintos, no contexto de cálculo de quadraturas e da cinemática.

Assim, a partir da colocação do problema de se encontrar a área sob uma curva, afirma-se que a abordagem de Leibniz é iniciada com a suposição de um retângulo infinitesimal, de maneira que, a área procurada seria composta por uma série desses retângulos, sendo a área de cada um deles dada pelo produto do elemento y pela altura infinitamente pequena α . Dessa forma, a área total seria dada por: $A = y\alpha + y'\alpha + y''\alpha + \dots$

No contexto da mecânica, segue a argumentação de que, no estudo de um móvel que percorre com movimento variado determinada distância num certo tempo, no fim de algum tempo não se poderá determinar a exata velocidade nesse instante, mas se o tempo for dividido à metade, a variação do movimento será mais fácil de determinar do que anteriormente. Dessa maneira, continuando dessa mesma forma, chegará um momento em que o erro será facilmente desprezível. Nesse momento, o movimento pode ser considerado como uniforme. É explicado então, que o processo consiste em decompor em partes o movimento variado e daí efetua-se uma conclusão associando o Cálculo e a Mecânica: *“Pois bem: em Mechanica o movimento uniforme está para o variado, assim como no Cálculo os elementos infinitesimais de um todo estão para o todo”* (GOULIN, 1904, p.6)

Observemos que as argumentações tecidas até esse momento são fundamentadas na noção de infinitamente pequeno, a qual, logo em seguida, é definida como uma quantidade variável que tende para o limite zero.

De fato, a partir desse ponto são tecidas considerações mais específicas sobre os infinitamente pequenos de diversas ordens.

A seguir, o texto passa a referir-se mais especificamente ao chamado Método de Leibniz. Essa visão expressa a diferencial criada por Leibniz vinculada com a “diferença” entre a circunferência e os respectivos polígonos regulares inscritos.

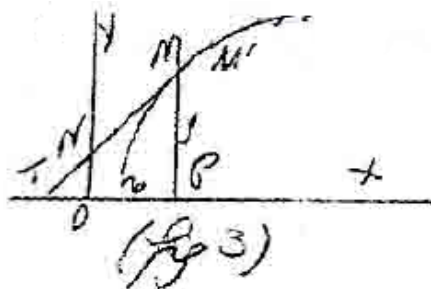
Supponhamos querer determinar o comprimento da circunferência de círculo circunscripta a um polygono cujo numero de lados supponemos augmentar indefinidamente. Leibniz chamou d a diferença entre o polygono e o círculo, sendo z a diferença dz que quer dizer differencial de z . (GOULIN, 1904 ,p.8)

No entanto, embora a caracterização apresentada da diferencial esteja restrita à circunferência, o texto parece descrever o método para uma curva sem qualquer especificação.

No exemplo de aplicação do método, o texto argumenta que Leibniz, a partir de um ponto M de coordenadas (x, y) , supunha um ponto infinitamente próximo M' de coordenadas $(x + dx, y + dy)$ sendo dx e dy diferenças infinitesimais de x e y respectivamente e concluía que a reta tangente era dada pela equação abaixo, sendo x e y as coordenadas do ponto de contato.

$$Y - y = \frac{dy}{dx}(X - x)$$

Figura 47: Ilustração do Método de Leibniz



Fonte: Goulin (1904)

O texto traz o entendimento que, na visão de Leibniz, o Cálculo Diferencial objetiva determinar as relações entre as quantidades infinitamente pequenas e reforça a visão do Cálculo Integral como o “inverso” do Cálculo Diferencial. Nesse contexto, o Cálculo Integral parece ser visto como aquele em que trata de eliminar as quantidades auxiliares.

Leibniz definiu o seu Calculo em duas partes: uma que chamou Calculo diferencial, que tem por fim determinar as relações entre as quantidades infinitamente pequenas, e outra inversa desta e que tem por fim eliminar essas quantidades por elle denominada Cálculo integral. Há no entanto algumas questões que não há necessidade do Calculo Integral para eliminar as quantidades auxiliares. (GOULIN, 1904,p.8-9)

Tal visão é reforçada adiante: “a integração é a inversa da diferenciação como em *Mathématique* a multiplicação o é da divisão” (GOULIN, 1904,p.9)

Após a apresentação dos exemplos infere-se novamente que o Método de Leibniz é fundamentado nos infinitamente pequenos. “*O methodo de Leibniz introduz os taes infinitamente pequenos para estabelecer as equações entre as quantidades auxiliares. Parece, portanto, que nas fórmulas deverão figurar essas quantidades auxiliares e as conhecidas*” (GOULIN, 1904, p.8)

O chamado método de Newton passa a ser descrito salientando-se inicialmente que o próprio Newton apresentou o seu método sob duas formas, a saber, método das primeiras e últimas razões e método das fluxões.

As noções de primeiras e últimas razões são caracterizadas a partir de quantidades fixas $A, B, C, D, \dots$, denominadas últimos valores, limites das quantidades $x, y, z, w, \dots$ que se aproximam simultaneamente de formas diferentes e ao mesmo tempo de $A, B, C, D, \dots$.

Assim, considerando que as relações entre x e y , y e $z, \dots$ tendem para as relações entre A e B , B e $C, \dots$, as relações entre as quantidades fixas A e B , B e $C, \dots$ são definidas como últimas razões das relações entre as variáveis. De forma análoga, no caso em que $x, y, z, w, \dots$ se afastem de $A, B, C, D, \dots$, estes serão chamados de primeiros valores e a relação entre esse primeiros valores serão chamadas de primeiras razões das quantidades $x, y, z, w, \dots$.

A aplicação do método das primeiras e últimas razões foi iniciado em termos retóricos por meio da relação entre a circunferência e a sequência de polígonos inscritos.

Estamos, agora, em condições de ver como Newton resolveu os problemas com o seu methodo. Determinava as razões entre as quantidades $x, y, z \dots$ e, como as de cima. Assim, p.ex. , os limites das propriedades dos polygonos semelhantes são, como sabemos, as propriedades da circunferência. (GOULIN, 1904, p.9)

Em seguida o chamado método de Newton é descrito de maneira mais explícita. A partir de dois eixos coordenados, de uma curva $y = f(x)$, o método consiste em tomar a reta secante por dois pontos M de coordenadas (x, y) e M' de $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, sendo Δx e Δy acréscimos finitos e analisar o comportamento dessa reta quando ela “se move em torno do ponto M ”.

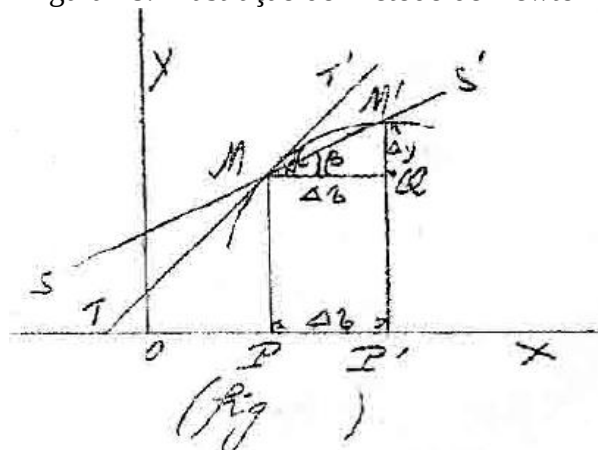
É importante ressaltar que nessa concepção a reta tangente é vista como limite da reta secante que a alcançará exatamente no limite.

Mas, o que é uma tangente? É o limite de uma secante. Ora, o coeficiente angular de recta que passa por dois pontos é $\frac{y''-y'}{x''-x'}$ ou $\frac{y+\Delta y-y}{x+\Delta x-x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é a tangente do ângulo $M'MK$. Seja β o ângulo. Então, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = tg\beta$. Supponhamos, agora, que a secante irá tendendo para se confundir com a tangente cuja posição ella ocupará no limite. (GOULIN, 1904,p.10, GRIFO NOSSO)

Dessa forma, conclui-se que, quando Δy e Δx tendem para zero a relação $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tende para tga onde α é chamado de ângulo da tangente, de maneira que:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = tga$$

Figura 48: Ilustração do Método de Newton



Fonte: Goulin (1904)

Notemos que o chamado Método de Newton baseia-se no argumento geométrico de que “a reta secante tende à reta tangente, de maneira a coincidir com ela no limite”. Contudo, devemos chamar a atenção que não encontramos fundamentações na historiografia relativa aos trabalhos de Newton, tanto no tocante aos procedimentos das fluxões e fluentes, quanto aos das primeiras e últimas razões, que pudessem estar relacionados com tal abordagem, considerando que Newton optou por publicar seus resultados utilizando a geometria sintética, praticamente não fazendo uso da geometria analítica.

A partir desse ponto o texto passa a dissertar sobre o segundo método desenvolvido por Newton, o das fluxões e dos fluentes. A teoria é desenvolvida levando fortemente em consideração um contexto cinemático de maneira que, nessa visão, toda

linha seria gerada pelo movimento de um ponto, toda superfície pela movimentação de uma linha e todo volume pelo movimento de uma superfície.

Nesse contexto, Newton teria definido fluxão como a velocidade do ponto que se move sobre uma linha descrevendo um determinado arco. Esse arco teria sido definido como fluente.

Contudo, não são descritos maiores detalhes acerca do uso dos conceitos de fluxão e fluentes. São colocados apenas falas gerais associando o cálculo com as fluxões com o Cálculo Diferencial e o trabalho dos fluentes com o Cálculo Integral.

Para resolver o problema elle decompunha o movimento em dois movimentos segundo dois eixos coordenados. Quer no primeiro caso, quer no segundo elle dividiu o seu Calculo em dois, num introduzindo os limites e as fluxões e n'outro eliminando tanto os limites como as fluxões. No primeiro caso seu Calculo tem o mesmo fim do Calculo differencial e no segundo tem o mesmo fim do integral. Só differem nas denominações que elle deu: chamou o primeiro Calculo das fluxões e o segundo Calculo dos fluentes. (GOULIN, 1904, p.10-11)

O chamado Método de Lagrange é também descrito de maneira geral. A argumentação inicial salienta que os dois métodos anteriores tiveram origens concretas buscando elementos para resolver questões geométricas e mecânicas. O texto salienta qual teria sido a visão pessoal de Lagrange acerca dos métodos de seus predecessores os quais teriam introduzidos “elementos estranhos” à Análise.

Lagrange, depois de conhecer os dois methodos anteriores, achou que nenhum delles devi ser empregado para a Analyse. Dizia elle que os de Leibniz se introduziram quantidades extranhas à Analyse porque não precisamos de infinitamente pequenos. No de Newton também introduzimos elementos extranhos que são os limites.

(GOULIN, 1904, p.11)

Dessa forma, a partir dessas concepções, Lagrange teria concebido o seu Método das derivadas, a partir da Fórmula de Taylor:

$$f(x + h) = f(x) + ph + q \frac{h^2}{2} + r \frac{h^3}{3} + \dots$$

A partir desse ponto, Lagrange teria estudado os coeficientes e concluído que cada um deles era formado pelo seu anterior, ou seja, “derivavam-se dos anteriores”, representando-as então por meio das derivadas de diversas ordens, $f'(x)$, $f''(x)$, ...

O texto sintetiza as ideias do Método de Lagrange salientando seu pensamento de que “*se é difícil obter entre $F(x)$ e $f(x)$ uma relação, procurá-la-emos entre $F'(x)$ e $f'(x)$ e, ainda não sendo possível, determiná-la-emos entre as derivadas de outras ordens*” (GOULIN, 1904, p.11)

Dessa maneira, conclui o texto, o primeiro cálculo em que foram introduzidas as derivadas, Lagrange denominou-as de Cálculo das derivadas ou das funções derivadas. Já o procedimento de eliminação dessas quantidades de cálculo das funções primitivas. Nesse sentido, “*o Cálculo das funções derivadas tem o mesmo fim que o Cálculo diferencial e o Cálculo das funções primitivas o mesmo fim que o integral*” (GOULIN, 1904, p.12)

Nesse ponto, é iniciada uma seção acerca da comparação entre os métodos. É colocada uma questão norteadora. Os três métodos conduzem ao mesmo resultado? A resposta é afirmativa e a partir daí é realizada uma argumentação no intuito de mostrar que os métodos são idênticos

A argumentação inicia-se considerando uma quantidade x , um acréscimo infinitamente pequeno dx e a substituição dessas quantidades na fórmula atribuída a Lagrange, obtendo-se:

$$f(x + dx) = f(x) + p dx + q \frac{dx^2}{2} + r \frac{dx^3}{6} + \dots$$

A partir dessa igualdade, da subtração de $f(x)$ nos seus dois membros e considerando que $f(x + dx) - f(x) = dy$ é obtido que:

$$dy = p dx + q \frac{dx^2}{2} + r \frac{dx^3}{6} + \dots$$

Dividindo-se ambos os membros por dx chega-se a igualdade:

$$\frac{dy}{dx} = p + q \frac{dx}{2} + r \frac{dx^2}{6} + \dots$$

Nesse ponto considerando p uma quantidade finita é entendido que os demais membros à direita devem ser desprezados por serem quantidades infinitamente pequenas, e a partir disso conclui-se que:

$$\frac{dy}{dx} = p$$

Por fim são comparadas as noções estabelecidas por Lagrange e Leibniz no intuito de associá-las a um mesmo conceito.

Mas, quem é p ? É o que Lagrange denomina um polynomio derivado. Logo, a relação $\frac{dy}{dx}$ que Leibniz chama coefficiente differencial não é mais do que a derivada de Lagrange, que se representa por $f'(x)$. Portanto, $\frac{dy}{dx} = f'(x)$; $dy = f'(x)dx$; isto é, a differencial de uma funcção é igual ao producto da derivada pela differencial da variavel independente. (GOULIN, 1904, p.13)

Após essa argumentação considera-se a equivalência entre os métodos de Leibniz e Lagrange.

Com um raciocínio análogo e considerando o acréscimo Δx em vez de dx , chega-se em:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = p + q \frac{\Delta x}{2} + r \frac{\Delta x^2}{6} + \dots$$

E assim, no limite teríamos:

$$\lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = p$$

Fato que teria mostrado a equivalência entre os Métodos de Lagrange e Newton. Assim, a identidade entre os três métodos é expressa sinteticamente por meio da seguinte igualdade:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Sendo $\frac{dy}{dx}$ associado ao Método de Leibniz, $\lim \frac{\Delta y}{\Delta x}$ associado ao Método de Newton e $f'(x)$ ao Método de Lagrange.

Finalmente, a partir da precedente igualdade o conceito de derivada de uma função é definido como “o limite da relação do acréscimo da função para o da variável quando este último tende para zero.” (GOULIN, 1904,p.13)

A diferenciação de uma função de uma variável independente $y = f(x)$ é realizada considerando um acréscimo Δx na variável independente, ocasionando, dessa forma, um acréscimo Δy na função, podendo ser este positivo ou negativo, estabelecendo-se a relação:

$$y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

Nesse momento é perguntado qual seria o acréscimo da função, o qual seria:

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

Considerando, a partir daí, que:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Argumenta-se que, no limite, o primeiro membro da relação acima passará a ser $\frac{dy}{dx}$ e o segundo membro será definido como $f'(x)$, de forma que:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Define-se então, a diferencial de uma função como o produto da derivada pela diferencial da variável independente, ou seja, $dy = f'(x)dx$.

A partir da definição de derivada são tecidas diversas proposições acerca da diferenciação entre funções. Na dedução relativa a diferenciação de um produto de duas funções de uma mesma variável independente, percebemos um raciocínio similar com àquele tecido por Leibniz. Nessas condições tomando $y = uv$, chega-se ao final de alguns passos em:

$$\begin{aligned} y + dy &= uv + vdu + udv + dudv \\ dy &= vdu + udv + dudv \end{aligned}$$

E, assim, em consonância com o raciocínio expressado por Leibniz, “o produto $dudv$ pode ser abandonado em presença dos outros termos” (GOULIN, 1904, p.22). Chegando-se, finalmente em:

$$dy = vdu + udv$$

Da mesma forma, podemos notar também, na dedução relativa a diferenciação do quociente entre duas funções de mesma variável, que algumas quantidades infinitamente pequenas são negligenciadas na comparação com outras quantidades. Considerando a função $y = \frac{u}{v}$ e os acréscimos Δu , Δv e Δy , tem-se que:

$$y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$$

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$$

Chegando-se após as devidas reduções em:

$$\Delta y = \frac{v\Delta u - u\Delta v}{v^2 + v\Delta v}$$

Expressão que, “após tomados os limites”, transforma-se em:

$$dy = \frac{vdu - udv}{v^2 + vdv}$$

É argumentado então que “ vdv é abandonável em presença de v^2 ” (GOULIN, 1904, p.22). Chegando-se, finalmente, na conhecida expressão:

$$dy = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

O mesmo princípio pode ser percebido na dedução da derivada da função $y = u^m$. Dessa forma, considerando que $y + \Delta y = (u + \Delta u)^m$ e o desenvolvimento

do binômio chega-se em:

$$\begin{aligned}
 y + \Delta y &= u^m + mu^{m-1}\Delta u + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}u^{m-2}\Delta u^2 + \dots \\
 \Delta y &= mu^{m-1}\Delta u + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}u^{m-2}\Delta u^2 + \dots \\
 \frac{\Delta y}{\Delta u} &= mu^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}u^{m-2}\Delta u + \dots
 \end{aligned}$$

É argumentado então que, ao ser tomado o limite, chega-se em $\frac{dy}{du} = mu^{m-1}$, visto que todas as outras quantidades seriam desprezíveis com relação a mu^{m-1} .

Notemos que, além da utilização das “quantidades desprezíveis com respeito a outras quantidades” na dedução de derivadas de determinadas funções, a abordagem estabelecida no conceito de derivada não está condicionada e/ou relacionada com o conceito de continuidade, conforme feito por Cauchy, em 1823.

Devemos ressaltar ainda que, embora a derivada tenha sido apresentada por meio da relação $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, não notamos um cuidado especial com o fato da derivada constituir-se como uma função. Em particular, não existe o cuidado, no sentido estabelecido por Cauchy, de observar que cada valor determinado por x , determina um limite, quando este existe.

No tocante à noção de convergência, relatemos que o conceito de série não é definido formalmente. Em verdade, as séries são tratadas particularmente no contexto das séries de Taylor. Deixa-se claro que a motivação para o tratamento das séries, reside no estudo das funções complexas. *“A vantagem das series está em que, quando queremos estudar uma função complexa, nós a decompomos em uma serie de expressões mais simples e , por conseguinte, mais facéis de estudar”* (GOULIN, 1904, p.73)

A série de Taylor é apresentada na forma abaixo, onde R é denominado de resto da série:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{1 \cdot 2} + \dots + f^{n-1}(x)\frac{h^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} + R$$

Na visão estabelecida, a série de Taylor será convergente se o resto tender para o limite zero. São então apresentadas duas formas de resto, de Lagrange e de Cauchy.

Após argumentações chega-se na expressão da série de Taylor, com resto de Lagrange, sendo θ positivo e maior que a unidade, a saber:

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \dots + f^{n-1}(x) \frac{h^{n-1}}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} + f^n(x+\theta h) \frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n}$$

Já a série de Taylor com resto de Cauchy é expressa por:

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f''(x) \frac{h^2}{2} - \dots \pm f^n(x-\theta h) \frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n}$$

No intuito de demonstrar que a série é convergente, ou seja, que o resto tem limite zero, é lembrado que não há a necessidade de considerarmos o termo $f^n(x+\theta h)$, visto que, todas as derivadas são supostas como contínuas e finitas. Dessa forma, supondo-se $h > 1$, são construídos argumentos utilizando desigualdades, chegando em:

$$\frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n} < \frac{h^{n'}}{1 \cdot 2 \dots n'} \times \left(\frac{h}{n'+1} \right)^{n-n'}$$

Finalmente, conclui-se que visto ser n' o maior número inteiro contido em h , termos $n' + 1 > h$ e, portanto, $\frac{h}{n'+1}$ será menor do que 1. Essa fracção será tanto menor quanto maior fôr a sua potencia, isto é, quanto maior for n . Tenderá, portanto, para zero; o mesmo acontecerá, por conseguinte, a $\frac{h^n}{1 \cdot 2 \dots n}$ e, portanto, a R . (GOULIN, 1904, p.77)

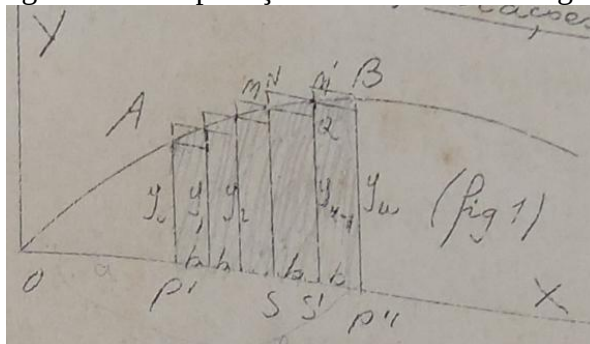
Assim, podemos perceber que, embora o desenvolvimento do conceito de séries esteja restrito a essa seção, existe nessa argumentação a presença de elementos do teste da comparação, estabelecidos já em Cauchy.

O Cálculo Integral é iniciado por meio da visualização do que é chamada a interpretação geométrica da integral.

A noção de integral é introduzida a partir de uma curva qualquer de equação $y = f(x)$, compreendidas entre duas abscissas a e b . A partir do problema de calcular a área compreendida entre a curva, o eixo das abscissas e as retas verticais determinadas pelas abscissas a e b , o segmento localizado no eixo das abscissas entre a e b é dividido em n partes iguais, sendo b a medida de cada uma das partes.

A partir daí, considerando as ordenadas referentes às respectivas abscissas são traçados retângulos que aproximam, por falta e/ou por excesso, a área procurada.

Figura 49: Interpretação Geométrica da Integral



Fonte: Goulin (1904)

Denominando a área procurada por $\mathcal{U}$, argumenta-se por um lado que soma das áreas dos chamados retângulos internos é um limite inferior para $\mathcal{U}$, ou seja:

$$\mathcal{U} > y_0b + y_1b + y_2b + \dots + y_{n-1}b$$

Por outro lado, a soma das áreas dos chamados retângulos externos constitui-se como limite superior para $\mathcal{U}$:

$$\mathcal{U} < y_1b + y_2b + y_3b + \dots + y_nb$$

Assim, dados dois limites para $\mathcal{U}$, lembra-se que a diferença entre os limites é dada por $(y_n - y_0)b$, sendo b a única quantidade variável. A partir daí, infere-se que “os dous limites, para valores de b cada vez menores, tendem para a area e, no limite, a area poderá ser substituída por um qualquer dos dous limites” (GOULIN, 1904,p.2)

Tal argumento é sintetizado, por meio da representação:

$$\mathcal{U} = \lim \sum yb$$

Nesse contexto, é salientado que Σ indica a soma de quantidades que não variam de modo contínuo. Daí, conclui-se que o retângulo de variação será constante quando b for infinitamente pequeno, ou dx e que:

$$\lim \Sigma = \int$$

Dessa forma, o símbolo $\int$ indica a soma de quantidades que variam de modo contínuo e a área passa a ser expressa por:

$$u = \int f(x)dx$$

Nesse contexto, a integral expressa a soma dos elementos que variam de modo contínuo. Assim, afirma-se que sendo conhecidas a equação de uma curva, os valores das abscissas e os respectivos valores de ordenadas, basta integrar para descobrir o valor da área. Em particular, quando não são determinadas quais são as abscissas define-se que a integral resultante será chamada de *integral indefinida*, denotada por:

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

A área procurada entre as abscissas a e b será expressa pela *integral definida*:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Devemos ressaltar que, logo a seguir são enunciados dois resultados, citados como teoremas fundamentais, a saber:

- 1) Quando, submettido ao signal $\int$, se tem o valor constante, pode-se passar esse factor para fora do signal sem alterá-lo absolutamente e, reciprocamente, pode-se passar um factor constante para fora para baixo do signal. (GOULIN, 1904, p.4)
- 2) A integral de uma somma algebrica de differenciaes é igual a somma algebrica das integraes de cada uma dessas differenciaes. (GOULIN, 1904,p.4)

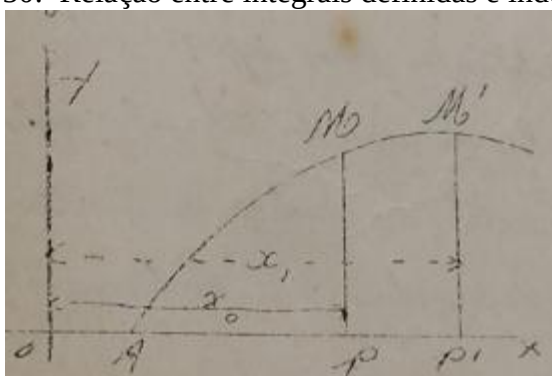
Particularmente, na demonstração da segunda proposição, fica clara a utilização da relação inversa entre a derivação e a integração. No entanto, devemos destacar que o conceito de integral foi construído até o referido momento, não sendo baseado na noção de antidiferenciação, mas de soma de quantidades.

A partir daí, são deduzidos e apresentados os procedimentos relativos às integrais indefinidas das principais funções e, posteriormente, explorados os chamados métodos de integração.

Após essa seção, uma nova seção intitulada “Integrais Definidas” é iniciada. Como introdução é realizada uma argumentação, não feita anteriormente, acerca das relações inversas entre os processos de diferenciação e de integração. “Vimos, no início do *Calculo Integral* que tendo uma função qualquer $d[F(x) + C] = f(x)dx$ em que $f(x)$ era a derivada da função e dx a diferencial da variável independente. A essa $\int f(x)dx = F(x) + C$ é que chamamos uma integral indefinida.” (GOULIN, 1904,p.29)

A relação entre as integrais definidas e indefinidas são deduzidas a partir da interpretação geométrica da integral e da definição já expressa da integral indefinida. Para tal, considera-se uma curva qualquer e duas abscissas quaisquer.

Figura 50: Relação entre integrais definidas e indefinidas



Fonte: Goulin (1904)

Argumenta-se que a área delimitada por $MM'P'P$ será a diferença entre as áreas determinadas pelas abscissas x_0 e x_1 . Assim, tomando-se $x = x_1$ chega-se a $F(x_1) + C$ e $x = x_0$ chega-se a $F(x_0) + C$. Como a área procurada é a referida diferença, ou seja, $F(x_1) - F(x_0)$. Daí, define-se então:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = F(x_1) - F(x_0)$$

Em termos do conceito de integral, ressaltamos que o referido conceito é inicialmente construído com base na soma de quantidades, que representam uma

determinada área, sem que, entretanto, houvesse a suposição de que a função em questão deveria ser contínua. A integral definida, por sua vez, foi apresentada e deduzida posteriormente de maneira completamente retórica.

No entanto, todo o desenvolvimento posterior referente às integrais indefinidas foi apresentado baseando-se na noção de anti-diferenciação sem que esse tenha sido formalmente apresentado.

Por fim, cabe-nos dizer que as ideias de área e de anti-diferenciação foram trabalhadas separadamente, sem que houvesse uma conexão formal entre os processos referentes à essas ideias.

6.2.1.1.1 Descrição Geral da Fonte

A organização dos conteúdos expostos no caderno são apresentadas a partir de pontos vinculados ao currículo da cadeira de Geometria Analítica e Cálculo Infinitesimal da Escola Politécnica de São Paulo. A lista dos referidos pontos é listada abaixo.

Ponto nº29 - (vago)

Ponto nº30 - Propriedades gerais das derivadas

Ponto nº31 - Diferenciais e derivadas sucessivas das funções de uma só variável independente. Notações.

Ponto nº32 - Diferenciais e derivadas das funções explícitas de duas ou mais variáveis independentes. Diferencial parcial e derivada parcial; notações.

Ponto nº33 - Diferenciais totais de diversas ordens de uma função composta de funções de algumas variáveis independentes.

Ponto nº34 - Diferenciação das funções implícitas isoladas.

Ponto nº35 - Mudança da Variável

Ponto nº36 - Desenvolvimento das funções em série

Ponto nº37 - Avaliação dos símbolos indeterminados

Ponto nº38 - Máximos e mínimos

Ponto nº39 - Equações das tangentes e normais às curvas planas

Ponto nº40 - Análise das curvas planas

Ponto nº41 - Diferencial do arco, da área e da inclinação de uma curva plana.

Ponto nº42 - Curvatura

Ponto nº43 – Contacto das curvas planas, evolutas e involventes.

Ponto nº49 – Interpretação geométrica de uma integral; integral indefinida; integral definida; notações.

Ponto nº50 – Diferenciaes algebricas racionais

A introdução do Cálculo Diferencial é feita por meio da apresentação dos chamados métodos de Newton, de Leibniz e de Lagrange.

Após a definição de derivada são enunciados e demonstrados resultados acerca da diferenciação de funções inversas e de funções compostas. A diferenciação das funções algébricas são abordadas por meio do estabelecimento de regras de derivação relativas a produtos, quocientes, potências, raízes. A diferenciação das funções transcendentais são deduzidas envolvendo as funções logarítmicas, exponenciais, as funções trigonométricas diretas e inversas.

No intuito de deduzir as propriedades envolvendo crescimento e decrescimento de funções e derivadas, a derivada é apresentada por meio da expansão de uma função em série. As demonstrações das referidas propriedades fizeram uso de desigualdades e da referida expansão.

A seguir foram desenvolvidos os resultados acerca das funções duas ou mais variáveis independentes, envolvendo, em particular, diferenciais parciais, totais, de funções implícitas, além da teoria acerca de mudança de variável.

Na introdução do tópico intitulado “Aplicações Analíticas do Cálculo Diferencial” é apresentada a expansão de uma função em uma série de Taylor, com um determinado resto, o qual deve tender para zero quando n cresce, sendo apresentadas duas formas de restos, de Cauchy, e de Lagrange, salienta-se ainda que a importância da utilização da série está relacionada com as funções complexas. “*A vantagem das series está em que, quando queremos estudar uma função complexa, nós a decompomos em uma serie de expressões mais simples e, por conseguinte, mais fáceis de estudar*” (GOULIN, 1904, p73)

A noção de verdadeiro valor é apresentada considerando variadas formas, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$, $\infty - \infty$, 0^0 , ∞^0 , 1^∞ .

O caso $\frac{0}{0}$ parte da hipótese de que se tenha $\frac{f(x)}{F(x)}$, de maneira que, para $x = a$, seja assumida a forma $\frac{0}{0}$, ou seja, $\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{0}{0}$. Observando que a anula ambos os termos, segue:

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{(x-a)f_1(x)}{(x-a)F_1(x)}$$

Assim, se $x = a$ não anular ambos os termos de $\frac{f_1(x)}{F_1(x)}$ então $\frac{f_1(a)}{F_1(a)}$ será o verdadeiro valor de $\frac{f(x)}{F(x)}$ para $x = a$. No caso de $x = a$ anular ambos os termos de $\frac{f_1(x)}{F_1(x)}$, pode-se empregar o mesmo raciocínio para que seja descoberto o verdadeiro valor.

Deixa-se claro, entretanto, que esse procedimento só poderá ser aplicado no caso das expressões serem racionais e inteiras, devendo-se lançar mão do cálculo no caso de não o serem.

Nesse caso, no lugar de substituir x por a , substitui-se por $a + h$, sendo h uma quantidade infinitamente pequena. Desenvolve-se então , ambos os membros, pela fórmula de Taylor, chegando-se à:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f(a) + f'(a)h + f''(a)\frac{h^2}{1 \cdot 2} + f'''(a)\frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots}{F(a) + F'(a)h + F''(a)\frac{h^2}{1 \cdot 2} + F'''(a)\frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots}$$

Como $f(a)$ e $F(a)$ são nulos e simplificando a expressão, temos:

$$\frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f'(a) + f''(a)\frac{h}{1 \cdot 2} + f'''(a)\frac{h^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots}{F'(a) + F''(a)\frac{h}{1 \cdot 2} + F'''(a)\frac{h^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots}$$

Argumenta-se então que, fazendo-se a quantidade auxiliar h tender para 0, o primeiro membro tenderá para o valor procurado $\frac{f(a)}{F(a)}$, entendendo-se que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)}{F(a+h)} = \frac{f(a)}{F(a)} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(a) + f''(a)\frac{h}{1 \cdot 2} + f'''(a)\frac{h^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots}{F'(a) + F''(a)\frac{h}{1 \cdot 2} + F'''(a)\frac{h^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots}$$

Por fim, conclui-se que, “o verdadeiro valor da fracção é, pois, a relação das derivadas de ambos os seus termos, substituindo-se nessas derivadas x por a ” (GOULIN, 1904, p.86)

$$\frac{f(a)}{F(a)} = \frac{f'(a)}{F'(a)}$$

O verdadeiro valor de todos os outros casos são deduzidos a partir do caso $\frac{0}{0}$.

A seguir são deduzidos resultados acerca dos máximos e mínimos de funções contínuas.

No tópico relativo às aplicações geométricas do cálculo diferencial são exploradas as equações da tangente e da normal, bem como, os comprimentos da sub-tangente e sub-normal.

Em termos de estudos das curvas planas, em um primeiro momento, são desenvolvidos resultados acerca da concavidade e dos chamados pontos singulares. Em seguida, são tecidas considerações acerca da diferencial de área e da inclinação de uma curva.

Finalizando a seção referente ao Cálculo Diferencial é desenvolvida a teoria acerca da noção de curvatura.

O Cálculo Integral é iniciado por meio da reflexão acerca da interpretação geométrica da integral. Logo a seguir são enunciados os chamados teoremas fundamentais e deduzidas as integrais de funções elementares, além de várias funções transcendentais.

Os métodos de integração são apresentados por meio de algumas explicações e posteriormente, por meio de exemplos. Nesse momento são apresentados quatro processos diferentes, a saber, processo por decomposição, por substituição, por partes e por séries.

A seguir explana-se a teoria referente às diferenciais algébricas racionais. A integração dessas diferenciais são divididas em dois casos: caso das funções de forma inteira e caso das funções de forma fracionária.

A integração referente às diferenciais algébricas irracionais são divididos em três casos, a saber, integração das funções que só contém irracionais monomiais, integração das funções que contém a raiz quadrada de um trinômio do segundo grau, integração das diferenciais trinomiais.

As integrais definidas são introduzidas por meio de uma argumentação envolvendo a interpretação geométrica e o processo de anti-diferenciação, sem, no entanto, relacioná-las, no sentido estabelecido por Cauchy. São então enunciadas proposições acerca das integrais definidas que servirão de base para a introdução das integrais duplas, que são rapidamente focadas no tópico seguinte.

Em termos das aplicações geométricas do cálculo integral, são tecidas considerações acerca da retificação e quadratura de curvas planas, quadratura das superfícies e cubatura dos volumes.

6.2.1.1.2 Conclusões acerca da análise da fonte

Na análise apresentada temos visto que, os métodos de Leibniz, de Newton e de Lagrange foram concebidos no intuito de serem estabelecidos métodos que potencialmente podem ser usados na resolução de problemas, buscando encontrar valores de quantidades desconhecidas a partir de quantidades dadas.

Vimos até agora que a dificuldade que se encontra na resolução dos problemas está em determinar as relações existentes entre as quantidades dadas e as desconhecidas afim de obter os valores destas. Em vez de empregar os methodos exiguos da analyse ordinaria estabeleceram-se methodos especiaes, mesmo indirectos, que constituem a analyse transcendente ou infinitesimal.

(GOULIN, 1904, p.3, GRIFO NO ORIGINAL)

Por outro lado, devemos salientar que os três métodos convergem em um mesmo sentido, se direcionam ao mesmo ponto comum: ao conceito de derivada.

Nesse sentido, concordamos com Oliveira (2004) quando afirma que:

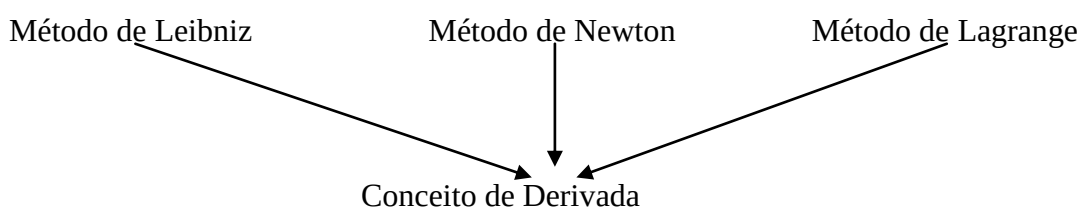
Nossa opinião é que esses métodos conduzem, de fato, ao mesmo resultado, isto é, produzem a ideia de derivada. Seus modos de produção, porém, são diferentes, porque partem de semânticas diferentes. Assim, não podem ser denominados equivalentes, frente a uma análise epistemológica. (OLIVEIRA, 2004,p.39)

De fato, entendemos que a equivalência entre os métodos pode ser confrontada tanto em uma análise epistemológica, como afirma Oliveira (2004), quanto em uma análise do ponto de vista matemático.

Dessa forma, lembremos que o método de Leibniz está inteiramente baseado nas quantidades infinitamente pequenas, o método de Newton nos processos de limite e, segundo a argumentação contida na própria fonte, o método de Lagrange buscava evitar os elementos estranhos trazidos por Leibniz e Newton, ou seja, as quantidades infinitamente pequenas e o limite.

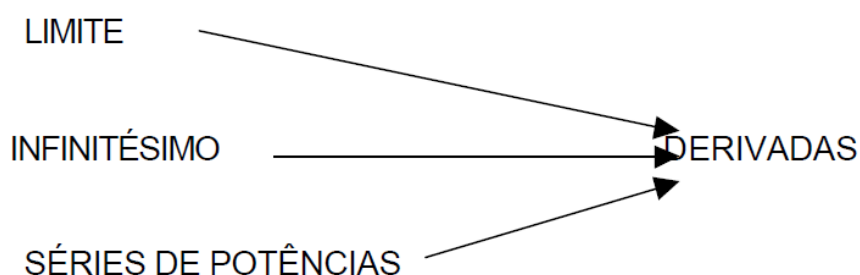
Assim, vemos que os procedimentos tecidos no intuito de unificar os métodos, tentam unir na prática procedimentos fundamentados em bases completamente distintas, ao mesmo tempo, em que o estatuto de cada uma das referidas bases ainda não está completamente definida. Nesse sentido, por um lado, cabe-nos sinalizar esse fato e, por outro lado, reiterar que os três métodos são projetados no intuito de fundamentar o conceito de derivada, de acordo com a concepção expressada na fonte.

Diante disso, cabe-nos apresentar o seguinte esquema, conforme tecido por Oliveira (2004).



Ao lembrarmos que cada um dos métodos está baseado em fundamentações diferentes, torna-se relevante considerarmos o esquema tecido por Oliveira (2004).

Figura 51: Esquema tecido por Oliveira (2004)



Dessa maneira, entendemos, assim como Oliveira (2004), que o processo estabelecido de diferenciação é executado por meio de um cálculo híbrido, envolvendo simultaneamente limites e infinitésimos, a serem usados conforme forem convenientes.

Em termos do cálculo integral, reiteremos que o trabalho com as ideias de quadratura e de anti-diferenciação foram trabalhadas de forma separada, sem que houvesse uma conexão formal entre os processos relativos à essas ideias.

Por fim, salientemos a ausência de uma concepção clara acerca do conceito de número real e da noção de convergência.

6.2.1.2 Análise da obra *Premiers éléments du calcul infinitésimal à l'usage des jeunes gens qui se destinent à la carrière d'ingénieur* de Hipolyte Sonnet, 1884.

Sonnet deixa claro, já no prefácio, que foi influenciado diretamente pela leitura dos trabalhos escritos por Lacroix, Cournot, Duhamel e Serret. O cálculo diferencial é definido logo na primeira linha como a parte da matemática que trata das variações infinitamente pequenas das funções. O conceito de função é definido em seguida baseado nas relações entre variáveis, sem contudo apresentar uma definição precisa, especificando apenas a distinção entre variáveis dependentes e independentes.

Dizemos que uma variável y é dita função de outra variável x , se y varia com x e se y assume um ou mais valores determinados quando atribuímos um determinado valor para x . Assim, em coordenadas retilíneas, a ordenada de uma curva é uma função da abscissa.¹²¹
(SONNET, 1884, p.1, TRADUÇÃO NOSSA)

Notemos que a concepção expressa não vincula o conceito de função com a sua expressão analítica, fato que é corroborado em seguida. “Se a relação que liga x e y é expressa por uma equação com relação à x , como $y = f(x)$, dizemos que y é uma função explícita de x ”¹²² (SONNET, 1884, p.2, TRADUÇÃO NOSSA) sendo x denominado em seguida como *variável independente*.

O entendimento expresso por Sonnet, em termos do conceito de função, o desvincula de sua expressão analítica, sendo estabelecido pela relação entre as variáveis e, assim como Cauchy, efetua a classificação de variáveis independentes.

¹²¹ On sait qu’une variable y est dite *fonction* d’une autre variable x , si y varie avec x , et si y prend une ou plusieurs valeurs déterminées quand on attribue une valeur déterminée à x . Ainsi, en coordonnées rectilignes, l’ordonnée d’une courbe est une fonction de l’abscisse.

¹²² Si la relation que lie x et y est exprimée par une équation résolue par rapport à y , comme $y = f(x)$, on dit que y est une fonction explicite de x

Quando quantidades variáveis são tão relacionadas entre si que, dado o valor de uma delas, pode-se concluir o valor de todas as outras, concebe-se normalmente essas diversas quantidades expressas por meio de uma dentre elas, que toma, então, o nome de *variável independente*; e as outras quantidades expressas por meio da variável independente, são o que chamamos de *funções* dessa variável.

(SCHUBRING & ROQUE, 2016, p. 13)

Dessa forma, entendemos, por um lado, que a formulação de função concebida por Sonnet é desvinculada da concepção euleriana, considerando a independência do conceito de função com a sua expressão analítica e, por outro lado, próxima da concepção expressa por Cauchy, uma vez que, enfatiza a relação entre as variáveis, classificando-as e empreendendo um estilo retórico.

No clássico estudo dos tratados de análises franceses realizado por Zerner (1986), a referida obra é classificada como uma arcaísmo da segunda espécie, ou seja, pertence a uma segunda geração de tratados, que são caracterizados pelo uso do chamado princípio da substituição dos infinitamente pequenos, mas com características da primeira geração.

Nesse ponto, Zerner salienta a existência de fatores na obra de Sonnet os quais, em comparação com outras obras, não apresentavam a mesma atualidade, no tocante à abordagem de determinados conceitos matemáticos. *“Eu insisto sobre um ponto: para que haja arcaísmo, não é suficiente que o conteúdo científico do livro esteja ultrapassado, devem também existir no mercado outros livros mais atuais versando sobre o mesmo conteúdo”*¹²³.” (ZERNER, 1986, p.10, TRADUÇÃO NOSSA)

Zerner salienta ainda a intensão de Sonnet de reunir sinteticamente, em uma só obra, todo o conhecimento de cálculo necessário ao futuro engenheiro. *“Um breve prefácio indica o propósito do livro, reunir em uma obra de dimensão modesta (Sonnet empregou o termo “livreto”) as partes do cálculo infinitesimal necessárias ao futuro engenheiro.*¹²⁴” (ZERNER, 1986, p.70-71, TRADUÇÃO NOSSA)

O princípio da substituição dos infinitamente pequenos não é enunciado, nem efetivamente utilizado por Sonnet, mas as noções relativas às quantidades infinitamente pequenas são explicitadas.

¹²³ J'insiste sur un point: pour qu'il y ait archaïsme, il ne suffit pas que le contenu scientifique du livre soit dépassé, il faut aussi qu'il existe sur le marché d'autres livres beaucoup plus à jour portant sur le même contenu.

¹²⁴ Une brève préface indique le but de l'ouvrage: réunir dans un ouvrage de dimension modeste (Sonnet emploie le mot « opuscule ») les parties du calcul infinitésimal nécessaires au futur ingénieur.

Uma quantidade infinitamente pequena é definida como uma quantidade que tende para zero e que está em um estado muito próximo de seu limite.

Notemos aqui que a definição expressa de quantidade infinitamente pequena é exatamente aquela caracterizada pelas obras da segunda geração. “*As obras da segunda geração comportam uma definição de infinitamente pequenos como as quantidades que tem zero por limite.*”¹²⁵ (ZERNER, 1986, p.13, TRADUÇÃO NOSSA)

As quantidades infinitamente pequenas são apresentadas, em seguida, sendo definidas como uma quantidade que tem zero por limite. Como consequência dessa definição afirma-se que, se uma quantidade infinitamente pequena α é adicionada à uma determinada quantidade finita a , pode-se negligenciar α com relação à a .

Em seguida são definidas as noções de infinitamente pequeno principal, de infinitamente pequenos de diversas ordens e são apresentadas diversas proposições acerca desses conceitos, sem, no entanto, que as referidas proposições fossem demonstradas.

A noção de função contínua é definida, em seguida, como: “*A função f é dita continua, se pudermos tornar Δx pequeno suficiente, de forma que Δy possa tornar-se menor que qualquer quantidade dada.*”¹²⁶ (SONNET, 1884, p.4, TRADUÇÃO NOSSA)

Por outro lado, devemos lembrar que, conforme colocado por Zerner (1986), as funções contínuas são apenas definidas não havendo trabalho com elas posteriormente, inclusive, não sendo formuladas outras proposições acerca delas.

Nesse ponto, lembremos que as obras da primeira geração, Lacroix (1802) e Boucharlat (1813), não falaram de funções contínuas, enquanto Sonnet apenas a enuncia. “*Collignon et Pauly não falam de funções contínuas, Sonnet e Haag as definem, nada mais.*”¹²⁷ (ZERNER, 1986, p.13, TRADUÇÃO NOSSA) Talvez seja exatamente um ponto que o aproxime das obras da primeira geração, ou mais especificamente, como um arcaísmo de segunda espécie.

Por outro lado vemos que Sturm, pertencente à segunda geração de tratados franceses, traz uma definição fortemente vinculada ao aspecto geométrico.

¹²⁵ Les ouvrages de la deuxième génération comportent une définition des infiniments petits comme quantiés ayant zéro pour limite.

¹²⁶ La fonction f est dite *continue*, si l’on peut prendre Δx assez petit pour que Δy puisse être rendu moindre que toute quantité donnée.

¹²⁷ Collignon et Pauly ne parlent pas de fonctions continues, Sonnet et Haag les définissent, sans plus.

A seguir são tecidas considerações acerca da diferenciação de funções explícitas de uma variável. Nesse contexto, quando as diferenças Δx e Δy tornam-se infinitamente pequenas passam a serem chamadas de *diferenciais*, onde no lugar do operador Δ passa-se a usar o operador d . A *diferencial* dy de uma função y é definida como o acréscimo obtido em $f(x)$ ocasionado pelo acréscimo de dx com a quantidade x . Tem-se então que:

$$dy = f(x + \Delta x) - f(x)$$

O texto esclarece que *diferenciar* uma função é encontrar sua diferencial. Nesse ponto, cabe-nos salientar que Sonnet trabalha com a diferencial de uma função, ao contrário do texto de Sturm, por exemplo, que define a diferencial de uma variável.

A derivada é definida a partir da relação dada por $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$. Sonnet afirma que essa relação sempre terá um limite determinado, destacando ainda que o limite é uma função de x . Dessa forma, a função derivada será definida como o limite da relação $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ quando Δx tende para zero, ou seja:

$$\lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim. \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Assim, ressaltemos que, por um lado, a definição concebida destaca a derivada como função, mas, por outro lado, afirma-se que o referido limite sempre existe, ao contrário de Cauchy, que considerava a hipótese de que a existência do referido limite nem sempre é garantida.

No intuito de redefinir o conceito de diferencial em termos da função derivada é argumentado que $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \varepsilon$. Daí, sendo os acréscimos Δx e Δy substituídos pelos infinitamente pequenos dx e dy , ε também se torna um infinitamente pequeno podendo ser negligenciado com relação à quantidade finita $f'(x)$, sendo concluído que $\frac{dy}{dx} = f'(x)$. A diferencial de uma função é então definida como o produto da função derivada pela diferencial da variável. Em particular, quando a derivada é representada por $\frac{dy}{dx}$ ela assume o nome de *coeficiente diferencial*.

Novamente, vemos aqui uma típica característica da segunda geração de tratados: o trabalho com as denominações de diferencial e de derivada. “Outra linha de

demarcação: derivadas e diferenciais. Lacroix e Boucharlat falam apenas de coeficientes diferenciais.¹²⁸” (ZERNER, 1986, p.13, TRADUÇÃO NOSSA)

Em tempo, lembremos que Sturm também trabalha com as noções de derivada e de diferencial.

Em termos da noção de limite, cabe-nos destacar que, embora a noção seja utilizada em toda a obra, não é formulada uma definição formal para o limite, tampouco existem demonstrações nas referidas utilizações.

Assim, salientamos que a obra de Lacroix também não apresenta uma definição formal para o conceito de limite. Dessa forma, temos um outro componente que aproxima Sonnet das obras da primeira geração.

Sturm, por sua vez, apresenta uma definição de limite em termos retóricos, mas posteriormente efetua operações e desigualdades com o símbolo ε , evidenciando o uso do conceito de limite com um caráter mais algebrizado.

Sonnet especifica que a definição de derivada apresenta também uma maneira de encontrar essas funções e exemplifica tais aplicações por meio de três funções fundamentais, $y = x^m$ (com m inteiro e positivo), $y = \log x$, $y = \sin x$.

Basicamente, a dedução é feita pelo uso da substituição das respectivas funções na definição e, em geral após algumas manipulações algébricas e/ou uso de outros resultados é encontrado o limite.

A dedução da função derivada da função $y = \log x$ é feita partindo da igualdade:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log(x + \Delta x) - \log x}{\Delta x} = \frac{\log\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}$$

E realizando a substituição $\Delta x = \frac{x}{m}$ chega-se em:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{\frac{x}{m}} = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m}{x}$$

¹²⁸ Autre ligne de démarcation: dérivées et différentielles. Lacroix e Boucharlat ne parlent que de coefficients différentiels.

Por fim, por meio da argumentação de que o limite do logaritmo de $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ quando m tende para infinito é o número e conclui-se que:

$$\lim. \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \frac{\log e}{x}$$

Após essas deduções algumas propriedades básicas acerca da diferencial de constantes, da soma ou diferença de funções, além de resultados específicos acerca das chamadas diferenciais logarítmicas são enunciadas e demonstradas.

O quinto capítulo da obra trata acerca do desenvolvimento das funções em séries.

Nesse sentido é ressaltada a intenção de que dada uma função de x , representada por $f(x)$ seja encontrada uma série ordenada de potências crescentes de h , tal que, seja convergente e possa aproximar o valor de $f(x + h)$ tão próximo quanto se queira, com um número suficiente de termos.

A série procurada é desenvolvida para o caso das funções da forma $f(x) = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Tx + U$, fazendo uso da expansão binomial e chegando à clássica Fórmula de Taylor.

$$f(x + h) = f(x) + f'(x) \frac{h}{1} + f''(x) \frac{h^2}{1 \cdot 2} + f'''(x) \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

De maneira natural, surge a pergunta: se as outras funções também poderiam ser desenvolvidas de maneira análoga. De fato, foi realizada a demonstração de que uma função finita e contínua $f(x)$ pode ser escrita desenvolvida conforme abaixo, sendo θ um valor entre 0 e 1:

$$f(x + h) = f(x) + f'(x) \frac{h}{1} + f''(x) \frac{h^2}{1 \cdot 2} + f'''(x) \frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

$$+ f^{(n)}(x + \theta h) \frac{h^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}$$

Notemos que, por hipótese, a função f deve ser contínua, mas em nenhum momento tal hipótese foi utilizada de maneira explícita na demonstração. Por outro

lado, lançou-se mão da propriedade do valor intermediário, sem que tal resultado tivesse sido demonstrado anteriormente ou sequer mencionado.

Zerner (1986) salienta a proximidade entre a noção de continuidade e a propriedade do valor intermediário em algumas obras da segunda geração, existindo casos em que elas são tomadas como equivalentes. *“Boucharlat e Lacroix não falam de funções contínuas, ao contrário das obras da segunda geração que se limitam à definição e a propriedade do valor intermediário (tomada como definição e “demonstrada” equivalente com a definição usual em Bertrand)¹²⁹”* (ZERNER, 1986, p.13, TRADUÇÃO NOSSA)

Em termos das séries de Taylor e de Maclaurin, tanto de funções de uma variável quanto de duas variáveis, são apresentados e demonstrados variados resultados, além do desenvolvimento nessas séries das funções $y = e^x, y = e^{-x}, y = \sin x, y = \cos x, \log(1 + x)$.

No entanto, a noção da convergência das séries é tratada complementarmente, constando apenas no apêndice, sinalizando de alguma forma a não centralidade do conceito na obra. Nesse contexto, uma *série* é definida como uma sequência indefinida de números, inteiros ou fracionários, positivos ou negativos que são regidos por uma determinada lei e é dita *convergente* quando a soma de seus termos tende para um limite finito e determinado. Salienta-se que, se uma série é convergente então seus termos devem ter um decrescimento indefinido a partir de um determinado termo. Ressalta-se ainda que essa condição de convergência é uma condição necessária, porém não suficiente, sendo apresentado como contra exemplo a clássica demonstração de que a série harmônica é divergente.

Sonnet estabeleceu critérios de reconhecimento acerca da convergência das séries, em particular sobre a proposição a qual afirma que, uma série será convergente se a razão entre um termo e o seu precedente for constantemente menor que um número, o qual é menor que a unidade.

Dessa forma, no que tange à noção de convergência, por um lado, entendemos que a concepção de Sonnet supera a visão predominante no século XVIII, de que a série seria convergente se seus termos (em valores absolutos) estivessem cada vez mais

¹²⁹ Boucharlat et Lacroix ne parlent pas de fonctions continues, contrairement aux ouvrages de la deuxième génération qui se bornent d'ailleurs à la définition et à la propriété des valeurs intermédiaires (prise comme définition et "démontrée" équivalente à la définition usuelle chez Bertrand)

próximos de zero, mas, por outro lado, devemos também ressaltar que, sua concepção não contempla todos os avanços estabelecidos por Cauchy. Nesse sentido, devemos reconhecer alguns aspectos semelhantes como, por exemplo, a definição de série e a apresentação de um teste de convergência.

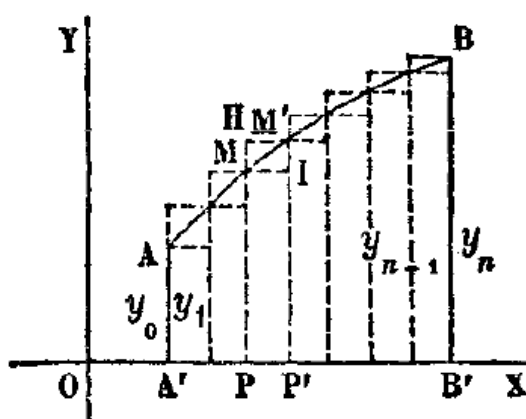
Em tempo, notemos que nem Sonnet, nem Cauchy trataram acerca de séries de funções, ambos restringiram sua abordagem às séries numéricas.

No tocante ao Cálculo Integral, logo de início, deixa-se claro a concepção de que o Cálculo Integral é o inverso do Cálculo Diferencial, enquanto as questões referentes ao último se destinam a encontrar a derivada de uma função, no Cálculo Integral as questões são referentes a encontrar uma função conhecendo sua derivada.

Sonnet explicita que as noções fundamentais do Cálculo Integral podem ser apresentadas de diversas maneiras, sendo a mais simples delas, aquelas que se apoiam em considerações geométricas. Inicia-se o desenvolvimento da teoria acerca do Cálculo Integral, a partir do problema de calcular a área sob uma curva dada.

Dada uma curva plana AB regida por $y = f(x)$, a estratégia inicial para o cálculo da área é a divisão em partes iguais do intervalo no eixo das abscissas e o estabelecimento de retângulos cuja soma das áreas poderão aproximar a área a ser calculada por falta e por excesso.

Figura 52: Problema da Área



Fonte: Sonnet (1884)

Assim, se U é a área a ser encontrada, $y_0, y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ as ordenadas sucessivas traçadas na figura e h o comprimento do intervalo PP' entre duas ordenadas consecutivas chegam-se à duas expressões que estimam por falta e por excesso o valor de U :

$$U > y_0h + y_1h + y_2h + \cdots + y_{n-1}h$$

$$U < y_1h + y_2h + y_3h + \cdots + y_nh$$

A diferença entre as expressões é dada por $y_nh - y_0h = (y_n - y_0)h$. A partir daí, considerando que o fator $(y_n - y_0)$ é constante e que h pode ser tomado tão pequeno quanto se queira, conclui-se que U é o limite comum para o qual tendem as duas somas, sendo tal fato representado por:

$$U = \lim. \Sigma yh$$

Notemos que, assim como comumente feito no século XVIII, Sonnet também aborda o problema da área sob uma curva, por meio de subdivisões iguais do eixo das abscissas, considerando a soma das áreas dos retângulos determinados pelas respectivas divisões e as ordenadas correspondentes.

Sonnet tece argumentações relativamente simples citando que, quando n é tomado infinitamente grande, alguns processos de transformação são automaticamente feitos. Assim, h passa a ser dx e Σ passa a ser expresso por $\int$.

Mais especificamente, argumenta-se que, quando passa-se ao limite tornando n infinitamente grande, alguns processos são estabelecidos, h torna-se infinitamente pequeno, sendo agora representado por dx , o símbolo Σ que representava uma soma de quantidades de maneira descontínua passa a ser expresso por $\int$, que agora está relacionado com uma soma de quantidades variando de maneira contínua, ou por graus infinitamente pequenos. Nessa linha de raciocínio a expressão anterior passa a ser representada por:

$$U = \int y dx$$

A integral anterior é denominada *integral indefinida*. De forma mais específica explicita-se que, se a área a ser calculada está localizada entre as abscissas a e x a integral abaixo, chamada de *integral definida*, expressará exatamente essa área:

$$U = \int_a^x y \, dx$$

A partir da caracterização da integral por meio da área sob uma curva, a teoria passa a desenvolver-se no intuito de mostrar que, sob algum prisma, a derivada e a integral são operações inversas.

Nesse intuito, argumenta-se que, ao ser fixada uma ordenada, a área sob a curva é uma função de x , visto que ela variará com a abscissa x . Tem-se então que:

$$U = F(x)$$

Por outro lado, o trapézio $MPP'M'$ é considerado como um acréscimo ΔU da área procurada. Contudo é lembrado que ele é maior que o retângulo $MPP'I$ e menor que o retângulo $HPP'M'$. Assim, considerando $PP' = \Delta x$ tem-se que:

$$y\Delta x < \Delta U < (y + \Delta y)\Delta x$$

Ao dividirmos a expressão por Δx chega-se em:

$$y < \frac{\Delta U}{\Delta x} < y + \Delta y$$

O argumento segue enfatizando que ao fazermos Δx tender para zero, Δy também tenderá para zero e a razão $\frac{\Delta U}{\Delta x}$ tenderá para $F'(x)$.

Assim, no limite tem-se $F'(x) = y$ ou $F'(x) = f(x)$ e finalmente conclui-se que:

$$U = \int F'(x) \, dx$$

Nesse ponto, Sonnet evidencia a relação entre a área sob a curva e sua equação salientando que “a função $f(x)$ que representa a ordenada é a derivada da função

$F(x)$ que representa a área da curva.¹³⁰ ” (SONNET, 1884, p.192, TRADUÇÃO NOSSA)

Observando que a derivada de uma constante é nula e que, por consequência, $U = \int F'(x) dx + C$, onde C é uma constante arbitrária, chega-se ao clássico resultado após algumas manipulações algébricas:

$$\int_a^b F'(x) = F(b) - F(a)$$

A partir daí, o texto passa a destacar que a teoria construída pode ser independente de considerações geométricas ressaltando-se que uma função derivada qualquer $F'(x)$ contínua, pode ser sempre a ordenada de uma curva, ou seja, $y = F'(x)$. Nessa linha, o chamado teorema fundamental do Cálculo Integral pode ser enunciado independente da caracterização geométrica da seguinte maneira:

Se $F'(x)$ é a derivada de uma função contínua, o limite para o qual a soma dos produtos $F'(x) \cdot dx$ tende quando fazemos x variar de maneira contínua de um valor a até um valor b é obtido através da procura da função a qual $F'(x)$ é a derivada, substituindo nessa função a variável x pelo limite superior b de x , depois pelo limite inferior a e subtraindo o segundo resultado do primeiro.¹³¹
(SONNET, 1884, p.194, TRADUÇÃO NOSSA)

Dessa forma, fica clara a tentativa de Sonnet de fundamentar a teoria de maneira independente de considerações geométricas.

O texto destaca ainda duas suposições que estavam implícitas na dedução dos resultados, a ordenada era crescente (similarmente decrescente) na demonstração acerca do limite de $\frac{\Delta U}{\Delta x}$ e que a função $f(x)$ ou $F(x)$ conservam um valor finito de a até b . “No raciocínio que fizemos para encontrar o limite de $\frac{\Delta U}{\Delta x}$, assumimos que a ordenada era crescente, se ela fosse decrescente, o raciocínio permaneceria ainda, pois não seria

¹³⁰ la fonction $f(x)$ qui représente l'ordonnée est la dérivée de la fonction $F(x)$, qui représente l'aire de la courbe

¹³¹ Si $F'(x)$ désigne la dérivée d'une fonction continue, la limite vers laquelle tend la somme des produits $F'(x)dx$, quand on y fait varier x d'une manière continue depuis une valeur a jusqu'à la valeur b , s'obtient en cherchant la fonction dont $F'(x)$ est la dérivée, remplaçant dans cette fonction la variable x par la limite supérieure b de x , puis par sa limite inférieure a , et retranchant le second résultat du premier.

*mudado mais do que a ordem das desigualdades.*¹³²” (SONNET, 1884, p.194, TRADUÇÃO NOSSA)

Em tempo, ressaltamos ainda que, embora Sonnet tenha explicitado posteriormente que a função derivada deveria ser contínua, em nenhum momento foi utilizada essa informação na demonstração de tal fato.

A partir desse ponto, a teoria se desenvolve em termos de propriedades da integral e das técnicas para calculá-las, são tecidas considerações a respeito do desenvolvimento de integrais em séries e de cálculo de integrais por aproximação.

São apresentadas diversas aplicações do Cálculo Integral, em especial com retificação de curvas e cálculo de volumes. As noções envolvendo integrais duplas e triplas também são desenvolvidas.

Por fim, a obra é encerrada com um capítulo dedicado às Equações Diferenciais.

6.2.1.2.1 Visão Geral da Obra

A obra é dividida em duas partes, a primeira dedicada ao desenvolvimento do Cálculo Diferencial e a segunda do Cálculo Integral.

Nos primeiros capítulos são expostos as noções fundamentais bem como os princípios relativos a diferenciação, alguns deles já comentados.

Os resultados acerca da diferenciação das funções compostas são expressas e demonstradas por meio de um argumentos simples.

A partir desse ponto o texto passa a tratar acerca da diferenciação das funções de mais de uma variável, em particular das funções de duas e três variáveis.

A seção posterior volta a tratar com as funções de uma variável aplicando os princípios de diferenciação a diversas funções, entre elas, funções circulares, exponenciais e logarítmicas.

Um novo capítulo se dedica a falar sobre a diferenciação sucessiva das funções. Cabe-nos observar que, como dissemos anteriormente, a noção de continuidade é apenas enunciada para o caso da função de uma variável. Assim, além de não ser mais

¹³² Dans le raisonnement que nous avons fait pour trouver la limite de $\frac{\Delta U}{\Delta x}$, nous avons supposé l'ordonnée croissante ; si elle était décroissante, ces raisonnements subsisteraient encore ; il n'y aurait de changé que le sens des inégalités.

utilizada no texto, ela é sequer mencionada para os casos das funções de duas ou três variáveis e muito menos levada em consideração na demonstração acima.

A seção seguinte da obra trata acerca da noção de verdadeiro valor (*vraie valeur*) das expressões que assumem a forma $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ e $0 \times \infty$.

Nesse sentido, o problema consiste em encontrar um valor, denominado verdadeiro valor de uma expressão $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ quando, por exemplo, existe um valor a tal que $\varphi(a) = \psi(a) = 0$.

O principal caso é exatamente do tipo $\frac{0}{0}$, uma vez que, os outros casos são tratados como aplicação deste.

A estratégia inicial é a da substituição de a por $a + h$ na respectiva expressão, onde h tenderá para 0 e logo em seguida obter a expansão pela fórmula de Taylor das expressões de $\varphi(a + h)$ e $\psi(a + h)$, obtendo assim:

$$\frac{\varphi(x+h)}{\psi(x+h)} = \frac{\varphi(a) + \varphi'(a)\frac{h}{1} + \varphi''(a)\frac{h^2}{1 \cdot 2} + \varphi'''(a)\frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots}{\psi(a) + \psi'(a)\frac{h}{1} + \psi''(a)\frac{h^2}{1 \cdot 2} + \psi'''(a)\frac{h^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots}$$

Suprimindo os valores de $\varphi(a) = \psi(a) = 0$ e dividindo os dois termos da expressão por h obtemos:

$$\frac{\varphi'(a) + \varphi''(a)\frac{h}{1 \cdot 2} + \varphi'''(a)\frac{h^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots}{\psi'(a) + \psi''(a)\frac{h}{1 \cdot 2} + \psi'''(a)\frac{h^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots}$$

Após isso, considerando que h tende para zero, chega-se em:

$$\frac{\varphi'(a)}{\psi'(a)}$$

Assim, conclui-se que, para encontrar o verdadeiro valor de uma expressão que se apresenta inicialmente da forma $\frac{0}{0}$ basta substituir cada um de seus termos pela sua derivada calculada em $x = a$.

O texto registra a hipótese de que as funções $\varphi(x)$ e $\psi(x)$ devem ser contínuas desde um valor $x = a$ até $x = a + h$. Notemos que, de alguma forma, Sonnet trabalha com a ideia de continuidade em um intervalo, ainda que a ideia de intervalo não estivesse bem elaborada à época.

A seguir é desenvolvida uma pequena teoria acerca dos valores máximos e mínimos de funções de uma e de duas variáveis.

A noção de função crescente ou decrescente é estabelecida em termos do sinal da derivada. Assim, por exemplo, uma função é crescente a partir de um determinado valor, se o sinal da sua derivada é positivo.

Após isso são tecidas considerações, proposições e exemplos de aplicações acerca dos valores máximos e mínimos das funções de uma e duas variáveis.

O último capítulo relativo ao Cálculo Diferencial é dedicado às aplicações geométricas.

A noção de tangente à uma curva em um de seus pontos é definida como “o limite das posições tomadas por uma secante conduzidas por esse ponto quando este é movimentado até que um segundo ponto de interseção venha se confundir com o primeiro.”¹³³ (SONNET, 1884, p.91-92, TRADUÇÃO NOSSA)

O texto explicita ainda que com relação a noção de tangente à uma curva por um ponto, diversos processos de limites são tomados simultaneamente.

Se movimentamos a tangente em torno do ponto x, y até que o segundo ponto $x + \Delta x, y + \Delta y$ venha a confundir-se com o primeiro, Δx e Δy tenderão simultaneamente para zero, e $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tenderá para a derivada $f'(x)$ ou y' da função dada $f(x)$. Ao mesmo tempo a secante tenderá para a posição a qual recebe o nome de tangente.¹³⁴
(SONNET, 1884, p.92, TRADUÇÃO NOSSA)

Em seguida, são apresentadas argumentações que explicitam a concepção de curva adotada e de suas relações com as quantidades infinitamente pequenas.

De início, deduz-se que a diferença entre as ordenadas da tangente e da curva com a mesma abscissa (com distância infinitamente pequena da abscissa do ponto de tangência) é uma quantidade infinitamente pequena de segunda ordem. E em seguida,

¹³³ la limite des positions que prend une sécante menée par ce point, lorsqu'on la fait tourner jusqu'à ce qu'un second point d'intersection vienne se confondre avec le premier.

¹³⁴ Si l'on fait tourner la sécante autour du point x, y jusqu'à ce que le second point $x + \Delta x, y + \Delta y$ vienne se confondre avec le premier, Δx e Δy tendront simultanément vers zéro, e $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ tendra vers la dérivée $f'(x)$ ou y' de la fonction donnée $f(x)$. En même temps la sécante tendra vers la position pour laquelle elle prend le nom de tangente.

deixa-se claro que, uma curva é concebida como um polígono que possui número infinito de lados infinitamente pequenos.

Considera-se frequentemente uma curva como um polígono infinitesimal, isto é como um polígono com um número infinito de lados infinitamente pequenos; qualquer um desses lados é o que chamamos de um elemento da curva. Se M e M' são dois vértices consecutivos desse polígono, consideramos o lado MM' , ou pelo menos o prolongamento de seu lado, como se confundindo com o tangente em M , dizemos nesse sentido que a tangente em M nada mais é que o elemento MM' prolongado.¹³⁵

(SONNET, 1884, p.92, TRADUÇÃO NOSSA)

O argumento segue enfatizando que essa concepção negligencia as quantidades infinitamente pequenas de segunda ordem, visto que a adoção dessa hipótese implica que o ponto M' infinitamente próximo de M estaria situado sobre a tangente em M .

O capítulo conduz ao desenvolvimento da teoria e aplicação dos conceitos do Cálculo Diferencial à curvas planas e superfícies.

6.2.1.2.2 Comparação entre a fonte referente ao caderno do aluno Adriano Goulin e a obra de Sonnet

Nessa tese tivemos a oportunidade de analisar uma fonte referente ao caderno de um ex-aluno da Escola Politécnica de São Paulo, de 1904, bem como o livro-texto adotado nas aulas de Cálculo, escrito por Hypolyte Sonnet, em 1884.

Dessa forma, cabe-nos destacar importantes pontos de convergência e/ou de diferenças presentes nas específicas obras, identificando potencialmente elementos de transmissão.

Em termos do conceito de função, vemos que a concepção expressa por Sonnet não caracteriza uma função de acordo com a sua expressão analítica, apresentando-se mais distante da concepção euleriana, predominante na segunda metade do século XVIII.

¹³⁵ On considère souvent une courbe comme un polygone infinitésimal, c'est-à-dire comme un polygone d'un nombre infini de côtés infiniment petits; l'un quelconque de ces côtés est alors ce que l'on appelle un élément de la courbe. Si M et M' sont deux sommets consécutifs de ce polygone, on regarde le côté MM' , ou du moins le prolongement de ce côté, comme se confondant avec la tangente en M , et l'on dit en ce sens que la tangente en M n'est autre chose que l'élément MM' prolongé.

No entanto, a noção de função expressa no caderno de Adriano Goulin não apresenta-se da mesma forma, visto que a definição de função é caracterizada pela sua expressão analítica, estando mais próximo da concepção de Euler.

Dessa forma, vemos que o conceito de função recepcionado é caracterizado segundo a noção Euleriana, mesmo que o conceito expresso no livro-texto de Sonnet apresentasse outra abordagem no tocante ao referido conceito.

O conceito de continuidade apresentado por Sonnet aproxima-se das formulações típicas do século XVIII. Já a noção expressa na referida fonte está associada com uma concepção de continuidade, exposta por Arbogast em 1791.

Dessa forma, em termos da noção de continuidade, vemos que ambos expressam concepções comuns do século XVIII.

Em termos do conceito de limite, vimos que a concepção explicitada no caderno de Goulin está próxima do entendimento predominante aceito, no século XVIII, de que uma grandeza poderia aproximar-se, tanto quanto se queira, da quantidade a qual é o limite.

Por outro lado, a noção de limite é aplicada na obra de Sonnet, sem ser definida em momento algum, ou seja, de alguma forma, admite-se um conhecimento tácito por parte do referido conceito.

A derivada é concebida por Sonnet, a partir da relação $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, tomando-se o limite quando Δx tende para zero.

Devemos notar que na fonte referente ao aluno Adriano Goulin, após a exposição dos chamados métodos de Newton, de Leibniz e de Lagrange, a diferenciação de funções também é apresentada como o limite da relação entre o acréscimo da função e o da variável, quando esse último tende para zero.

Por outro lado, embora devamos reconhecer esse elemento de transmissão no tocante ao conceito de derivada, cabe-nos ressaltar que, no trabalho com algumas proposições, a fonte ainda trabalha ainda com quantidades desprezíveis, no sentido difundido a partir da obra de L'Hospital. Fato esse que, sinaliza a sobrevivência, de alguma forma, de alguns elementos de transmissão advindo das ideias concebidas por Leibniz.

No tocante ao conceito de integral, a fonte apresenta basicamente a mesma construção tecida por Sonnet, que, por sua vez, expõe a teoria contendo alguns elementos presentes nos textos clássicos tecidos por Cauchy.

Dessa forma, podemos entender que a construção dos conceitos referentes a integrais definidas foram diretamente transmitidas do texto de Sonnet.

6.3 A Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo

Variados são os pontos de vistas os quais pode ser compreendida a criação da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras (FFCL) da Universidade de São Paulo (USP). No aspecto político, destaca-se a atuação de vários sujeitos ligados ao jornal *O Estado de São Paulo*, entre eles, Júlio de Mesquita Filho, Francisco Mesquita, Armando Salles de Oliveira e Fernando de Azevedo.

A motivação do grupo, segundo Silva (2015), é motivada pelo desejo de criação de uma nova elite no país.

Desde os anos de 1920, através dos editoriais do jornal, o grupo defendia a ideia de se fundar uma universidade no Estado de São Paulo, com o objetivo de formar uma nova *elite intelectual*, que deveria se ocupar da direção do país. Essa defesa surge de maneira explícita no texto *A Crise Nacional*, de Júlio de Mesquita Filho, publicado em 1925. (SILVA, 2015, p.33)

A USP foi fundada em 25 de janeiro de 1934, a partir da publicação do decreto nº 6.283. De acordo com o referido decreto a USP deveria ser composta pela Faculdade de Direito, Faculdade de Medicina, Faculdade de Farmácia e Odontologia, Escola Politécnica, Instituto de Educação, Escola de Medicina Veterinária, Escola Superior de Agricultura, Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras.

Dessa forma, passa-se a ter duas instituições ministrando cursos envolvendo matemática superior, a EPSP para a formação de engenheiros e a FFCL para a formação de matemáticos e de professores de matemática.

De acordo com a pesquisadora Irene Cardoso, o decreto carrega consigo a ideia original da universidade como espaço de formação de uma nova elite. “O Decreto reafirma a concepção de universidade que vem sendo defendida desde o primeiro momento: a presença da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras como núcleo fundamental do sistema universitário e a instituição de alta cultura” (CARDOSO, 1982, apud SILVA, 2015, p.37)

Dentro dessa linha de raciocínio, aconteceu a busca por professores na Europa, no intuito de buscar nova perspectiva dentro dos ideais concebidos pelos responsáveis

da recém criada FFCL. Nesse sentido, Silva (2015) nos apresenta um discurso proferido por Júlio de Mesquita Filho, proferido anos depois da criação da FFCL.

Se o objetivo que tínhamos em vista era uma reforma ampla e profunda do processo cultural vigente, não se concebia que lançássemos mãos de indivíduos cujos diplomas ostentavam a chancela da faculdade onde se ministrava um ensino por todos os títulos insuficiente.

(MESQUITA FILHO, 1969, apud SILVA, 2015, p.38)

Silva (2015) relata ainda que, segundo as memórias de Fernando de Azevedo, duas exceções deveriam ser feitas na busca pelos professores, Análise Matemática e Sociologia. A cadeira de Análise Matemática continuaria com Theodoro Ramos, já professor dessa disciplina na Escola Politécnica e a de Sociologia ficaria a cargo do próprio Fernando de Azevedo. No entanto, de acordo com o relato, nenhum dos dois teria aceito essa proposta, por entenderem que essas cadeiras também deveriam ser ocupadas por professores estrangeiros.

Iniciado o movimento para a contratação de professores estrangeiros, Silva (2015) relata certa dificuldade para a contratação dos professores franceses e, em menor escala, dos italianos, por conta da duração do contrato, que era de três anos. Nesses termos a França deveria arcar com os custos das viagens de ida e volta dos professores e oferecer um complemento de salário, de maneira que, os professores pudessem receber parte de seus proventos em moeda brasileira e a outra em francos.

Assim, concluídas as negociações foram contratados professores franceses, italianos e alemães. O processo de vinda e de estabelecimento desses professores foi chamado respectivamente de Missão Francesa, Missão Italiana e Missão Alemã na FFCL.

Em termos desse trabalho, interessa-nos entender melhor como foi estabelecida a Missão Italiana na FFCL, uma vez que, a cadeira de Análise Matemática foi ministrada pelo eminente matemático italiano Luigi Fantappiè.

Os laços entre Brasil e Itália acabaram por estreitar-se a partir da grande imigração de italianos em terras brasileiras, no final do século XIX, por ocasião da abolição da escravatura no Brasil, incentivando a criação de políticas públicas de forma a facilitar a vinda de trabalhadores imigrantes para o país.

Com a ascensão do fascismo italiano, a partir de 1919, a relação entre os dois países passou a tomar uma outra forma. Por um lado, existia um universo onde a

emigração para o Brasil havia decrescido substancialmente, de forma que, grande parte da colônia italiana no Brasil era formada por filhos e netos dos italianos e, por outro lado, a busca do governo fascista italiano em reaproximar-se politicamente do Brasil, com o claro objetivo de propagação do ideário fascista.

Entretanto, cabe-nos destacar, como citado por Silva (2015) que, embora o discurso fascista tenha encontrado aceitação tanto pela colônia italiana, quanto por parte dos brasileiros, existiram resistências mesmo entre adeptos brasileiros, por conta do nacionalismo italiano, que entrava em confronto com os ideias nacionalistas de Getúlio Vargas.

Nesse contexto, Theodoro Augusto Ramos (1895-1937), professor da Escola Politécnica, primeiro diretor da FFCL, foi enviado à Europa, para a contratação de professores e para conhecer mais das respectivas culturas e organização universitária.

Em termos dessa missão, o próprio Theodoro relata acerca de suas atividades na Itália e, em particular, de seu encontro com Benito Mussolini.

Na Itália, conferenciou com o ministro Parini, director dos Italianos no Estrangeiro, e com os professores Severi e Bertoni, da Universidade de Roma e da Acadamia de Itália e também com os professores Levi-Civita e Enriques, da Universidade de Roma e Academia dei Lincei. (...) Teve ainda, uma entrevista de meia hora com Mussolini, e que versou sobre assumptos diversos de ordem geral, além do que dizia a respeito à missão que o levara à Itália, visitou detalhadamente os institutos de Mineralogia, Geologia e Paleontologia, da Universidade de Roma.¹³⁶ (SILVA, 2015, p.59)

Silva (2015) salienta que não foi encontrada menção negativa no jornal *O Estado de São Paulo*, classificado como liberal antifascista¹³⁷, acerca do encontro entre Theodoro Ramos e Mussolini, mas, em contrapartida, foi publicada uma charge ironizando o encontro no impresso *Minervina*, órgão do Grêmio estudantil da Escola Politécnica, em nove de julho de 1934.

Na charge, Ramos estaria dando um livro intitulado *Vectores Fascistas* e recebido uma camisa, em referência aos exércitos fascistas.

¹³⁶ Entrevista ao jornal Folha da Manhã, São Paulo, 03, jun. 1934, capa.

¹³⁷ Classificação dada pela Embaixada Italiana, em 1937, conforme Silva(2015)

Figura 53: Charge publicada pela Minervina, satirizando o encontro entre Ramos e Mussolini



Fonte: Silva (2015)

Variadas são as possíveis interpretações para a charge. Silva (2015), explana a visão de Celeste Filho (2011) de que “a sátira produzida pelos alunos da Escola Politécnica contra a figura de um de seus professores catedráticos está relacionada a outros eventos que envolveram o professor, que teriam como centro as rivalidades entre a FFCL e a Politécnica” (SILVA, 2015, p.60)

Após a viagem de Theodoro Ramos, os dois primeiros professores a desembarcarem no Brasil foram Fantappiè e Piccolo, dando início a recepção da Missão Italiana. Essa chegada foi noticiada com destaque nos principais jornais de São Paulo e também do Rio de Janeiro.

Outra questão a se considerar sobre essa notícia é que o Diário da Noite, conforme pode-se observar nas informações editoriais trazidas no cabeçalho da edição, é um jornal produzido no Rio de Janeiro, o que revela que não só a imprensa paulista estava atenta às movimentações em torno da FFCL, mas também a carioca.

(SILVA, 2015, p.64)

O primeiro membro da Missão Italiana chegou em 1934 e o último membro a ser incorporado ao grupo chegou em 1940. Dessa forma começava a se consolidar a Missão Italiana em terras brasileiras, que tinha o objetivo de enviar cientistas italianos como

expoentes da *italianità*, no intento de estabelecer a propaganda fascista resultando em um caso de imperialismo cultural.

Segundo Silva (2015), os nomes que fizeram parte dela foram Luigi Fantappiè (1901-1956), para a cadeira de Análise Matemática e Geometria; Gleb Wataghin (1899-1986), para a de Física Geral e Instrumental; Francesco Piccolo (1892-1970); para a de Língua e Literatura Italiana; e Ettore Onorato (1899-1971), para a de Mineralogia e Geologia. Em 1936, chegaram os professores Giacomo Albanese (1890-1947), para a cadeira de Geometria Projetiva e Analítica e História das Matemáticas e Luigi Galvani, para a de Estatística. Posteriormente, chegaram ainda os professores Ottorino de Fiore di Cropani, Giuseppe Occhialini (1907-1993) e Vittorio de Falco (1898-1980)

A rivalidade entre a Escola Politécnica e a FFCL, relatada como possível interpretação à charge publicada no impresso *Minervina*, fica ainda mais explícita quando percebemos as manifestações acerca da nomeação de Fantappiè, como professor da cadeira de nº3 da Escola Politécnica.

Tenho a honra de comunicar a V.Ex. que achando-se vaga a cadeira de nº3 – Complementos de Geometria Analítica. Elementos de Nomografia. Cálculo diferencial e integral, e sendo permitido, de acordo com o art.110 dos Estatutos da Universidade de S. Paulo, que a mesma cadeira, ou parte dela, sob a regência do mesmo professor, seja comum a mais de um instituto universitário, convidei, nos termos do Regulamento da Escola Politécnica e dos Estatutos da Universidade o Professor Luigi Fantappiè, da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras para reger a referida cadeira.

Comunico outrossim a V.Ex. que o Conselho Universitário, na sua última sessão, tomou conhecimento desta providência, tendo nessa ocasião ficado esclarecido que o contrato do aludido professor com a Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, faculta tal medida sem onus para a Universidade.¹³⁸ (MARAFON, 2001, p.302)

Assim, conforme já colocado, sua nomeação foi bastante questionada pelos professores da Escola Politécnica.

A nomeação de Fantappiè foi um assunto amplamente debatido nas seções da Congregação da Escola Politécnica. Parte dos professores que compunham aquele colegiado se posicionava contrária a essa decisão, afirmando que o professor Fonseca Telles teria agido de maneira arbitrária, não respeitando a escola como um todo e, principalmente, a sua Congregação. (SILVA, 2015, p.69)

¹³⁸ Documento expedido pelo Diretor da Escola Politécnica, Francisco Emygidio da Silva Telles, ao Secretário da Educação. In: USP, Escola Politécnica, Cop. de Expediente n.135, fls.104, Arquivo Morto da Escola Politécnica

Por outro lado, devemos registrar uma das principais fontes de tensão entre as instituições, se não a principal, a disputa entre os professores José Octávio Monteiro Camargo e Omar Catunda.

A cadeira de Complementos de Geometria Analítica, Nomografia e Cálculo Integral estava sendo ocupada interinamente, desde 1932, pelo professor José Octavio Monteiro de Camargo, após a aposentadoria do Professor Catedrático Rodolpho de S. Thiago, que ministrava essa disciplina desde 1901. No ano de 1933, ocorreu um concurso para provimento da cadeira em questão, sendo a banca constituída, segundo Marafon (2001), pelos professores Theodoro Ramos, diretor da Escola Politécnica, Lúcio Martins Rodrigues, Lélío Gama, Cristovam da Silva Colombo e Miguel Maurício da Rocha, os dois últimos professores da Escola de Minas de Ouro Preto. Dois candidatos foram aprovados, José Octávio Monteiro Camargo, aprovado em primeiro lugar e, em segundo lugar, Omar Catunda.

Entretanto, tal certame tornou-se um objeto de destaque por longos anos na história das referidas instituições, uma vez que, logo a seguir, Omar Catunda apresentou um requerimento junto à Secretaria de Educação e Saúde Pública, impedindo que Monteiro Camargo assumisse a cátedra.

Marafon (2001), apresenta uma entrevista com Alexandre Martins Rodrigues, graduado em matemática pela FFCL em 1952 e Doutor pela Universidade de Chicago, em 1957, neto de Lúcio Martins Rodrigues, um dos membros da banca, trazendo a tona aspectos desconhecidos e evidenciando a amplitude da tensão provocada, a partir do resultado do certame. Nesse ponto, explicita-se que a desenvoltura na explanação da aula foi um fator preponderante para a aprovação de Monteiro Camargo.

... eu tenho uma memória disso, de família, porque meu avô participou de desse concurso ... a memória que eu tenho é a seguinte, o Catunda era muito jovem, mais jovem que o Camargo, ele era considerado um ótimo matemático, ele foi um estudante brilhante da Escola Politécnica .. ah... só que ele era um homem tímido, depois ele mudou muito, mas quando jovem ele era muito tímido, falava baixo, ... e a aula que ele deu no concurso, ele deu virado para o quadro negro, ele não se virou para a audiência, e falava baixo, mal se ouvia a voz do Catunda, enquanto que o Camargo já era um professor tarimbado, ele já dava aulas na Escola Politécnica, há algum tempo, além disso tinha outra experiência diferente do Catunda, era mais velho no sentido exuberante, tinha presença social, coisas desse tipo, então ele deu uma aula estrondosa lá,
(...) Parece que havia um consenso de que, como matemático, o Catunda era melhor do que o Camargo e eu acredito que devia ser mesmo... (risos)... sem dúvida, compreende? Mas pesou o fato de que a

aula do Catunda foi uma aula apagada, uma aula virada para o quadro-negro, como eu já disse, e que numa escola de engenharia, a didática seria uma coisa que deveria ter um peso muito grande, porque, afinal de contas, a finalidade era ensinar Cálculo para os alunos, e, no momento da decisão, na Ata, designou-se que seria o Camargo o professor. (MARAFON, 2001, p.72)

Alexandre relata ainda um certo arrependimento por parte da decisão tomada pelo Theodoro Ramos.

(...) mas acontece o seguinte: o Theodoro Ramos volta para casa e se arrepende de ter concordado que fosse o Camargo o titular, e ele telefona para o Lélío Gama, fala com o Lélío Gama, e diz: *“Olha, Lélío Gama, nós cometemos um erro, devia ser o Catunda, o Catunda vai aprender a dar aula, ele é inexperiente, mas ele é moço, no futuro o Catunda pode ser muito diferente e ele é melhor que o Camargo, e eu quero voltar atrás, eu quero designar o Catunda como professor e não o Camargo”* parece que o Lélío Gama concordou em voltar atrás, mas daí o Theodoro Ramos procurou o meu avô, os dois eram muito amigos, se davam muito bem, mas o meu avô se recusou com a seguinte argumentação: *“Não, é impossível, nós fizemos uma Ata, não tem jeito, quer dizer, mesmo que você me convença de que o certo de que o certo seria o Catunda, não dá mais, porque não vejo jeito para que nós possamos mudar uma Ata da Escola Politécnica, com isso eu não concordo”*, e meu avô, diante dessa argumentação, não concordou mesmo, não foi possível mudar a Ata, e ficou o Camargo. (MARAFON, 2001, p.72)

No entanto, devemos ressaltar que o próprio estudo realizado por Marafon (2001), chega a conclusão, após a análise das atas que, a posição de Theodoro Ramos foi no sentido de não aprovação de ambos os candidatos.

As provas a que os candidatos Camargo e Catunda tiveram que se submeter não tiveram dificuldades maiores do que Theodoro assumiu como critério de rigor. Isto posto, na posição de examinador, entendeu que deveria desclassificar os dois candidatos. Essa foi a posição de Theodoro Ramos e a de Lélío Gama. (MARAFON, 2001, p.144)

A controvérsia gerada em torno no concurso de 1933, além de marcar uma forte tensão entre a Escola Politécnica e a FFCL, gerou também memórias distintas. Ao contrário do que foi relatado por Alexandre Rodrigues, por ocasião de sua entrevista, o professor emérito da USP, Milton Vargas, relata uma visão de que, o concurso foi cancelado por conta da vinda do Fantappiè, fato esse que, segundo a documentação analisada por Marafon (2001), não condiz com a análise documental.

(...) Monteiro Camargo, que tinha ganho o concurso para matemática na Politécnica e que anularam para a vinda do Fantappiè (...) Camargo fez um grande erro na vida, de brigar com o Fantappiè; se ele não tivesse brigado com Fantappiè, se ele tivesse aceito aquela coisa toda, talvez ele fosse um dos grandes matemáticos brasileiros. Em vez dele, quem foi assistente do Fantappiè foi o Catunda, que era muito inferior ao Camargo... Mas essa briga do Camargo com o Fantappiè, para mim foi uma perda, um drama para a matemática brasileira. Camargo, em primeiro lugar, o Camargo era muito mais inteligente do que o Catunda. (TABOAS, 2005,p.49-50)

A fala do professor Vargas nos indica que o professor Monteiro Camargo engrossou o coro daqueles que se posicionavam contrariamente à contratação de Fantappiè. Fato esse, bastante compreensível, uma vez que o italiano ocupou a cadeira que Camargo vinha ministrando inteirinamente. Monteiro Camargo viria a assumir definitivamente a cadeira somente em 1938.

Por sua vez, Omar Catunda, juntamente com Cândido Lima da Silva Dias, foi contratado como assistente de Fantappiè, tendo seu vínculo acadêmico estreitado mesmo após a volta de Fantappiè para a Itália. Segundo Silva(2006), Catunda foi assistente de Fantappiè, de 1934 a 1939, e substituto na cadeira de Análise Matemática, na FFCL, entre 1939 e 1944, quando, por meio de um concurso, assumiu a cátedra de Análise Matemática até o ano de 1963, ano de sua aposentadoria e ida para Salvador para dirigir o Instituto de Matemática e Física da Universidade da Bahia.

Silva (2006) relata que, Monteiro Camargo, Engenheiro Mecânico-Eletricista pela Escola Politécnica de São Paulo, atingiu a posição de 1º lugar em sua turma, obtendo uma Bolsa de Estudos no exterior. Trabalhou como Engenheiro na França, Bélgica, Alemanha e Itália, tendo ainda frequentado cursos livres na Sorbonne, na França e na Technische Hochschule, em Charlottenburg, Berlim.

Em seu retorno ao Brasil, após trabalhar na Secretaria de Viação e Obras Públicas em São Paulo, iniciou sua carreira docente, em 1928, como professor substituto da seção de Matemática na Escola Politécnica de São Paulo. Em 1933, conforme já explicitado, assume inteirinamente a cadeira de Complementos de Geometria Analítica, Elementos de Nomografia, Calculo Diferencial e Integral, exercendo tal função até 15 de julho de 1934.

Segundo Silva (2006), Monteiro Camargo ministrou interinamente a referida cadeira na EPSP por alguns períodos, até ser finalmente nomeado professor catedrático da cadeira de Geometria Analítica, Elementos de Nomografia, Calculo Diferencial e Integral, em 22 de junho de 1938.

Em 26 de fevereiro de 1935, o professor Monteiro de Camargo, foi designado pela Congregação para a regência interina da referida cadeira n°2, designação renovada em 26 de fevereiro de 1936, assumindo a regência em 23 de julho de 1936. E assim continuou interinamente, por designações sucessivas da Congregação feitas em 23 de fevereiro de 1937 e 25 de fevereiro de 1938, até 21 de junho de 1938, quando em um decreto assinado pelo então governador Sr. Adhemar de Barros, datado de 18 de junho de 1938, foi nomeado professor catedrático da cadeira de *Complementos de Geometria Analítica; Elementos de Nomografia; Cálculo Diferencial e Integral*, em cumprimento do resultado do concurso do final de 1933.

(SILVA, 2006,p.13-14)

A memória relativa à missão que Fantappiè viria a desempenhar em terras brasileiras faz referência direta ao protagonismo de seu trabalho, visto algumas vezes como um marco na história da produção matemática no Brasil. Em particular, o seu curso de Análise Matemática é considerado, em algumas falas, como elemento primordial na modernização do ensino de Cálculo no Brasil. “*Logo ao chegar ao Brasil, Fantappiè teve a missão de organizar os estudos de matemática em São Paulo e sua primeira preocupação foi modernizar os cursos de Cálculo Diferencial e Integral, transformando-os efetivamente num curso de Análise Matemática*” (DAMBROSIO, 2008, p.74)

Táboas (2005) também destaca a modernidade dos conceitos matemáticos abordados no curso de Análise Matemática, ministrado por Fantappiè.

E certamente fez uso de tais credenciais em São Paulo, pois Fantappiè modernizou a matemática no Brasil, mudou o ensino do Cálculo, trocou uma orientação ainda um tanto calcada na intuição pelo rigor formal dos épsilons e deltas, apresentou a Análise Matemática aos jovens universitários de São Paulo, estudantes de Engenharia na Escola Politécnica e dos então novos cursos de Física e Matemática na Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras. (TABOAS, 2005, p.53-54)

Por outro lado, devemos destacar que a atuação de Fantappiè na FFCL esteve longe de ser restrita apenas em seu trabalho na cadeira de análise matemática, tendo também a preocupação em propiciar diversos momentos e/ou ambientes que pudessem favorecer o desenvolvimento e a capacidade matemática dos estudantes, em especial, a criação do seminário matemático e a ministração de diversas palestras e conferências, conforme veremos no próximo tópico.

No tocante à atuação de Fantappiè em sala de aula, encontram-se variadas falas elogiosas acerca das aulas ministradas por Fantappiè. Oliveira (2004), por exemplo,

ressalta cita o relato de Vargas (2004), não somente com respeito a Fantappiè, mas também com relação a outros professores pertencentes à Missão Italiana. “O sucesso desses dois cursos básicos: o de Matemática, dado pelos italianos Luigi Fantappiè e Giacomo Albanese, e o de Física, pelo ítalo-russo Gleb Wataghin, é explicado pela superior capacidade didática desses excelentes professores ...” (OLIVEIRA, 2004, p.26)

Nesse sentido, Táboas (2005) nos traz a fala do Professor Milton Vargas acerca de suas belas memórias de suas aulas com Fantappiè e Wataghin, dadas em italiano:

[...] E eram tão bons professores que a gente entendia melhor as aulas em italiano do que as aulas em português dos outros brasileiros.
[...] a gente pegou uma mania de falar italiano, entre nós, não é? [risos] A gente, por causa da perfeição que eram aquelas aulas, a gente não estava acostumado com aulas tão boas ... Até hoje eu tenho ideia de que essas aulas de física e de matemática para engenheiros têm que ser dadas por grandes físicos e grandes matemáticos, não por assistentes. Porque são esses mais motivantes, sabem perfeitamente despertar o interesse, não é!? Para o engenheiro, se você mete um assistente para dar aula, ele não tem interesse nenhum.

(TABOAS, 2005, p.57)

Em termos da produção científica e da influência da atuação de Fantappiè, Táboas (2005), segundo suas próprias palavras, destaca três momentos para comprovação inequívoca da influência direta do trabalho desenvolvido por Fantappiè à frente dos cursos de Análise Matemática e de seminários e grupos de estudos sobre os Funcionais Analíticos na FFCL: o curso de Análise Matemática do Professor Omar Catunda, a tese de doutoramento do Professor Cândido Lima da Silva Dias e o artigo do Professor Milton Vargas (Teoria dos Drenos Artificiais de Areia)

De fato, a proximidade estabelecida entre Fantappiè e seus assistentes no curso de Análise Matemática na FFCL parece não ter se dissipado após seu retorno para a Itália. Silva (2015) relata que, em 1938, Fantappiè intercedeu junto ao governo italiano para a concessão de duas bolsas para seus assistentes, Omar Catunda e Cândido Dias. Contudo, por motivos pessoais, Dias não pode viajar e, somente Catunda realizou um intercâmbio de quatro meses em Roma, tendo apresentado uma memória junto à *Reale Accademia Nazionale dei Lincei*, iniciando também a preparação de uma nova nota, que foi publicada posteriormente. Além disso, segundo Silva (2015), Catunda apresentou ainda três conferências junto ao Seminário Matemático da Universidade de Roma.

A proximidade relatada torna-se mais evidente quando notamos que a tese de Doutorado de Catunda foi acompanhada de perto por Fantappiè.

Fantappiè chegou a acompanhar o início do desenvolvimento de algumas teses, como a de Omar Catunda, que deveria ser apresentada para o concurso da cátedra de Análise Matemática da FFCL. Nessa tese, constariam alguns resultados obtidos por Catunda durante seu intercâmbio na Itália, em 1938. (SILVA, 2015, p.192-193)

Silva (2015) salienta ainda a posição de Fantappiè ao atestar a relevância da pesquisa realizada por Catunda.

De acordo com Fantappiè, o tema escolhido por Catunda, teoria das formas diferenciais alternantes, era de grande importância naquele momento, pois serviria de base para o estudo dos funcionais harmônicos de Volterra e para pesquisas de Hodge e Severi, o que colocaria em diálogo com esses nomes. Fantappiè ainda ressaltava que a pesquisa de Catunda se iniciou durante o seu intercâmbio em Roma e destacava que aquilo não era um trabalho de compilação, mas uma pesquisa com diversos pontos originais. (SILVA, 2015, p.193)

O posicionamento pessoal do Professor Milton Vargas vem corroborar com argumentos que apontam influências diretas dos cursos e seminários ministrados por Fantappiè. *“O Professor Milton Vargas forneceu seu testemunho da força transformadora das ideias matemáticas de Fantappiè, veiculadas através de seus cursos de Análise Matemática e dos seminários efetuados na USP e que redundaram, no seu caso particular, no artigo anteriormente citado”* (TABOAS, 2005, p.58)

O professor Vargas relata ainda que a escrita de seu artigo de 1947, *“foi fruto, foi baseado no curso de Fantappiè e daquele círculo”*. Segundo seu relato, as conclusões analíticas foram comprovadas na prática, por meio da comparação com artigo rival de mesmo teor, escrito de forma totalmente independente por um pesquisador americano, mas estruturado a partir de procedimentos empíricos. Nessa linha de pensamento, teríamos premissas diferentes levando ao mesmo fim, completando-se, portanto, e fortalecendo a teoria. (TABOAS, 2005, p.58)

Em termos de sua produção científica, Fantappiè chega ao Brasil tendo trabalhado proximamente com matemáticos como Vito Volterra (1860-1940) e Francesco Severi. Em particular, trabalhou intensamente no desenvolvimento do conceito dos chamados Funcionais Analíticos, baseado na Teoria dos Funcionais, que teve no próprio Volterra como um dos pioneiros.

Taboas (2005) nota que, ao serem observadas as obras de Fantappiè, vê-se claramente uma lacuna temporal que coincide com o período de sua estada no Brasil. No entanto, a partir da análise de uma fonte contendo notas de aula de um curso sobre os Funcionais Analíticos, ministrado pelo próprio Fantappiè, nota-se seu esforço no intuito de melhorar a própria compreensão da matéria. Dessa forma, Taboas (2005) ressalta que *“sua análise revela a profundidade em que Fantappiè mergulhara no estudo e revela mais, revela a alta qualidade das pesquisas matemáticas debatidas em solo brasileiro”* (TABOAS, 2005,p.59)

Por outro lado, após a análise da *Memória de Fantappiè*¹³⁹, Táboas (2005) afirma que se tem, mais uma vez, uma garantia de que Fantappiè deixara marcas profundas na matemática brasileira, desdobrando-se de maneira significativa por meio da carreira dos docentes Omar Catunda e Cândido Lima da Silva Dias, como atestam as referências de Franco Pelegrino¹⁴⁰, em 1949/1951, a trabalhos científicos elaborados por eles sobre funcionais analíticos.

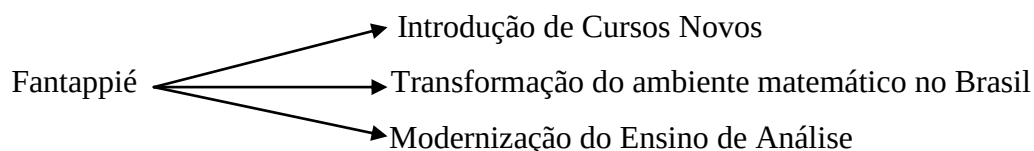
Nesse sentido, a análise da Memória documenta, de alguma forma, aspectos importantes da influência de Fantappiè no desenvolvimento da Matemática no Brasil.

Dessa forma, a historiografia acerca da influência de Fantappiè no desenvolvimento da matemática brasileira tem apontado em pelo menos três direções: na introdução de cursos novos no Brasil, como, por exemplo, teoria dos grupos, grupos contínuos, teoria dos números, formas diferenciais aplicadas à análise e análise tensorial (SILVA, 2006, p.20), na percepção de que seu trabalho foi primordial para a transformação da matemática brasileira, no sentido de também produzir conhecimento no cenário global, *“... a criação da USP e a atuação de Fantappiè na FFCL praticamente determinaram o ponto de inflexão na sorte da matemática brasileira, transformando-a de simples consumidora a também produtora no cenário global após a década de 30”* (TÁBOAS, 2005, p.105-106) e, na modernização do ensino de Análise.

Diante disso, podemos montar uma pequena representação acerca da influência da atuação de Fantappiè no desenvolvimento da matemática no Brasil.

¹³⁹ Texto intitulado *“Funcionais de funções de Várias Variáveis – Memórias de Luigi Fantappiè”*, compilado por Cândido Lima da Silva Dias

¹⁴⁰ Comentários apresentados sobre a bibliografia dos trabalhos de Fantappiè, por Francisco Pelegrino ao final do livro *“Problèmes Concrets D’Analyse Fonctionnelle”*, de Paul Lévy.



6.3.1 Seminário Matemático e Físico na FFCL

A vinda da escola italiana para a USP e, particularmente, na FFCL, não somente impactou as paradigmas e as abordagens relativas ao ensino de matemática superior, mas também buscou a implementação de práticas modernas, no sentido de criar um ambiente de pesquisa que pudesse propiciar o desenvolvimento dos estudantes com relação ao conhecimento de matemática.

Em especial, devemos destacar a criação do Seminário Matemático e Físico, em 1935, por Fantappiè e Wataghin, promovendo reuniões semanais com os alunos, no intuito de tratarem temas que porventura não pudessem ser trabalhados durante as aulas, conforme nos relata Silva (2015, p.75).

Nesse contexto, Silva (2015) nos aponta ainda que Fantappiè costumava incentivar os alunos a estudarem por meio de obras originais, acreditando que, desta forma, poderiam aprender mais e assim estariam cada vez mais habituados com o meio científico.

Dessa maneira, segundo Silva (2015), no início as reuniões do Seminário eram anunciadas pelos jornais “*afim de dar a maior divulgação possível a esta atividade da Faculdade, e pô-la em contato mais íntimo com o ambiente da capital*”¹⁴¹ (SILVA, 2015, p.74-75)

Nesse mesmo relatório Fantappiè aponta que os assuntos tratados foram aprofundando-se com o passar do tempo, com público cada vez mais restrito ao pessoal da FFCL e, por isso, sendo dividido em Seminário Matemático e Seminário Físico.

Em termos do desenvolvimento do seminário, Lima (2012) lembra acerca da participação ativa da escola italiana na FFCL em diversas esferas, como a organização estrutural da FFCL e de sua biblioteca, a participação ativa na reforma do ensino brasileiro desde o ensino secundário, perpassando pelo ensino profissional, chegando até o ensino superior e, ainda, com a realização de conferências.

¹⁴¹ Relatório apresentado por Fantappiè ao diretor da FFCL, de 25/10/1939

No tocante ao Seminário Matemático e Físico, Lima (2012) vem corroborar a importância e o intuito de seu estabelecimento na USP, salientando também o intuito de criação de um ambiente de desenvolvimento dos estudantes, de forma a serem capazes de produzir as suas próprias pesquisas.

Particularmente, este Seminário, criado em 1935, teve como uma de suas funções propiciar aos jovens estudantes e assistentes do curso de matemática e física não apenas o mero contato com as pesquisas que estavam sendo construídas tanto na matemática como na física, mas também a real possibilidade de desenvolverem pesquisas inéditas, por intermédio dos seus professores. (LIMA, 2012, p.236)

Por outro lado, destaquemos, nesse ponto, a importância da implantação dos seminários, uma vez que constituíam uma prática moderna de desenvolvimento da matemática em alguns países europeus. De fato, podemos salientar que os seminários (“Seminare”) desempenharam um papel primordial nas reformas universitárias na Prússia, no início do século XIX, associando de maneira exitosa pesquisa e ensino, tendo o entendimento do papel da aprendizagem por meio da pesquisa.

Nesse sentido, cabe-nos salientar as relevantes considerações trazidas por Schubring (2000) relatando um seminal estudo de Wilhelm Lorey no campo da História Social da Matemática, que analisa a matemática nas universidades alemãs do século XIX investigando sua história como um processo de profissionalização. Nesse sentido são desveladas dimensões extremamente relevantes no processo de profissionalização das disciplinas científicas, entre as quais devemos destacar;

- Emergência de uma nova clientela para novos profissionais (especialização de estudantes em matemática),
- Crescente especialização em pesquisa,
- Estabelecimento de formas especiais para intensificação dos estudos (Os “seminários”)
- Publicação de livros-textos
- Criação de jornais especializados

Dessa forma, as práticas de seminários estabelecidas na FFCL consistiam em práticas que já bem sucedidas no processo de profissionalização da matemática e na consolidação de comunidades matemáticas em países europeus.

Assim, parecem não restarem dúvidas de que as práticas estabelecidas na FFCL, especialmente a criação dos seminários matemáticos, podem ser classificadas como práticas vanguardistas que desempenharam um papel de protagonismo no estabelecimento da comunidade matemática brasileira, em particular, no contexto da Universidade de São Paulo.

6.3.2 A USP após Fantappiè

A atuação política de Fantappiè como fascista e, mais especificamente, como membro do partido fascista e responsável pelas reuniões do grupo fascista no Brasil teve relação direta com o seu retorno à Itália. Embora, segundo o relato de Omar Catunda, Fantappiè tivesse se decepcionado em alguns momentos com a política fascista, permaneceu firme em sua fidelidade ao regime.

Havia tomado parte na Juventude Fascista e continuou acompanhando com entusiasmo as realizações do governo de Mussolini. Sua primeira decepção deu-se por ocasião do pacto da Itália com a Alemanha – o eixo Roma-Berlim – e a consequente adesão da Itália à política anti-semita, que atingiu muitos dos seus mais queridos amigos e colegas. Mas a respeito da sua repulsa e da impopularidade dessa política no seio da nação italiana, a sua fidelidade ao regime persistiu, colocando-o na incômoda posição de defensor de um sistema que ainda lhe despertava entusiasmo e admiração, embora profundamente ferido nos seus mais íntimos sentimentos e convicções.

(CATUNDA, p.28, apud LIMA, 2012, p.209-210)

Após atuar no Brasil desde 1934, Fantappiè retorna à Itália, em 1939, após uma conclamação por repatriação, feita por Mussolini, aos italianos que viviam no estrangeiro, no momento da aliança entre a Itália e a Alemanha. Silva (2015) ressalta que o contrato de Fantappiè foi interrompido, visto que deveria permanecer no Brasil até dezembro de 1939, mas foi requisitado pelo governo italiano alguns meses antes.

Nesse contexto, em conformidade com a hipótese levantada por Silva (2015), entendemos que, dada a expulsão de muitos italianos de origem judaica, após a promulgação das leis racistas italianas, iniciando o período antissemita do Regime Fascista, diversos cientistas, em particular matemáticos, perderam seus postos e foram substituídos por matemáticos considerados arianos. Assim, matemáticos “arianos” que estivessem vivendo no exterior foram chamados para a ocupação de postos disponíveis.

A reorganização dos postos foi uma das responsabilidades de Francesco Severi, antigo orientador de Fantappiè, chefe da matemática fascista e um dos responsáveis pela indicação de Fantappiè para FFCL.

Assim, Fantappiè assume a cátedra de matemática junto ao Instituto Nacional de Alta Matemática, em Roma, após a destituição de um professor de origem judaica da mesma.

Em paralelo, com a mudança das relações diplomáticas entre Brasil e Itália, a partir da segunda metade da década de 30, a permanência dos matemáticos italianos se tornou desfavorável. Em 1938, insatisfeito com as campanhas nacionalistas, particularmente da Itália, o governo de Getúlio Vargas aprovou o Decreto nº 383 de 18 de abril de 1938, proibindo a prática de atividades políticas de estrangeiros que estivessem em território nacional.

Em 1942, com o rompimento das relações diplomáticas do Brasil com a Itália, Alemanha e Japão, a situação dos professores italianos na USP, de fato, tornou-se insustentável, visto que, no período de guerra todo italiano que estivesse em solo brasileiro passaria a ser visto como um inimigo em potencial. Nesse panorama entra em vigor o Decreto nº 4.166 de 11 de março de 1942, estabelecendo, segundo o relato contido em Lima (2012) que:

[...] os bens pertencentes a italianos, alemães e japoneses (pessoas físicas e jurídicas) poderiam ser confiscados e empregados pelo governo brasileiro para compensar os prejuízos resultantes de atos de agressão praticados pelos países em guerra contra o Brasil.
(LIMA, 2012, p.204)

Assim, de fato, não havia nenhuma condição para que o último expoente italiano, no caso da matemática, permanecesse em solo brasileiro. Dessa forma, Giacomino Albanese, retorna à Itália, em 1942. Dessa maneira, a partir da década de 40, a Missão Italiana na USP era dissolvida.

No entanto, são inegáveis as influências deixadas pela Missão Italiana na USP e, em particular, no ensino e pesquisa da matemática brasileira. Sob alguma perspectiva, pode-se inferir acerca da manutenção do “espírito” italiano, nas cadeiras de matemática, uma vez que, os próprios professores assistentes assumiram as cadeiras anteriormente pertencentes aos italianos.

Benedito Castrucci¹⁴² assumiu a cadeira de Geometria, a qual foi desmembrada em duas após a saída de Albanese, sendo uma de Geometria Analítica, Projetiva e Descritiva, assumida por Castrucci e a outra denominada por Complementos de Geometria e Geometria Superior. Com relação à essa última cadeira, particularmente nesse ano, o curso de Complementos de Geometria, ministrado para os alunos do segundo ano, foi assumida por Catunda e a parte de Geometria Superior ficou sob a responsabilidade de Cândido Lima. Omar Catunda assumiu a cadeira de Análise com a saída de Fantappiè. Nessa situação, com a cadeira de Análise sendo assumida por Catunda, o professor substituto passou a ser Edilson Farah. A partir de 1943, a cadeira de Complementos de Geometria e Geometria Superior foi assumida por Cândido Lima Dias. Notemos ainda que, Cândido Lima, Castrucci e Catunda, assumiram suas respectivas cadeiras como professores interinos, tendo tornado-se posteriormente professores catedráticos, no caso de Lima e Castrucci, a partir de 1951.

Dessa forma, conforme salienta Lima (2012), mesmo com a saída dos professores italianos, começa a formar-se um corpo acadêmico e científico na USP.

Assim, com a estratégia da vinda de alguns dos principais pesquisadores estrangeiros, já notadamente reconhecidos pelo desenvolvimentos de suas pesquisas no cenário internacional pelos seus pares, o projeto de 1934, ou seja, de construir uma ambiente acadêmico de cientistas e professores brasileiros, em particular em matemática, enfim começou a ganhar corpo na USP.

(LIMA, 2012, p.204-205)

Após a era da escola italiana na USP, a matemática na FFCL passou a ser fortemente influenciada por outra escola, a escola bourbakista.

O Grupo Bourbaki, formado em torno de um personagem fictício chamado Nicolas Bourbaki, foi fundado por alunos da *École Normale Supérieure* de Paris que tinham a intenção de formar uma nova comunidade científica francesa, após a destruição ocorrida por ocasião da I Guerra Mundial.

Assim, o grupo formado por matemáticos como Henry Paul Cartan (1904-2008), Jean Frédéric Alguiste Delsarte (1903-1968), André Weil (1906-1998) e Jean Dieudonné (1906-1992) pretendia elaborar um tratado de análise que pudesse influenciar tanto os estudantes, quanto matemáticos, físicos e engenheiros. Entretanto, conforme relata Schubring (2003), a matemática desenvolvida pelos bourbakistas tiveram um grande

¹⁴² Salientemos que apesar do nome eminentemente italiano, Benedito Castrucci era paulistano.

alcance global. “O projeto desenvolveu-se de uma maneira que serviu não apenas para constituir livros didáticos para a França mas para modernizar a matemática com uma influência global na pesquisa e mesmo no ensino em todos os seus níveis.” (SCHUBRING, 2003, p.161)

Dessa forma, a partir do retorno dos italianos e a posterior vinda de matemáticos bourbakistas para a USP, os estudantes passaram a ter contato com uma forma de conceber a matemática diferente da que estavam acostumados, conforme reforça Lima (2012):

Em linhas gerais, é esta forma de produzir matemática que passou a influenciar o Curso de Matemática da FFCL depois da saída dos italianos, através da vinda, nas décadas de 1940 e 1950, dos próprios integrantes do Grupo Bourbaki para ministrar cursos na subsecção das ciências matemáticas da FFCL. Eles foram Jean Dieudonné, André Weil, Jean Delsarte, Laurent Schwartz, Charles Ehresmann, Jean-Louis Koszul, o polonês Samuel Eilenberg e o alemão Alexander Grothendieck¹⁴³, bem como de Oscar Zariski, que nesse período já compartilhava com as ideias matemáticas do grupo.

(LIMA, 2012, p.154)

O primeiro bourbakista a chegar no Brasil foi o matemático André Weil. O convite foi feito por André Dreyfus (1897-1952), então diretor da FFCL, intermediado por Claude Levi-Strauss (1908-2009), que havia lecionado na FFCL entre 1935 e 1938. Ness sentido, conforme sugere Lima (2012), Dreyfus não estava excursionando aos Estados Unidos e Canadá apenas para contratar professores para a FFCL, mas também buscando profissionais com a mesma relevância dos matemáticos italianos, que fossem capazes dar prosseguimento ao trabalho e ao ambiente já estabelecidos.

Mas, ao que tudo indica, não se tratava apenas de fazer contratações para preencher o quadro de professores da FFCL, em particular da subsecção das ciências matemáticas, havia interesse de que os matemáticos estivessem em níveis comparáveis de relevância aos dos matemáticos italianos, para que pudessem dar continuidade ao ambiente de ensino e pesquisa que já havia sido institucionalizado por esses matemáticos, ainda que fosse sob uma perspectiva diferente.

(LIMA, 2012, p.154)

Andre Weil, matemático francês de origem judaica, deixou a França em 1939. Segundo nos relata Lima (2012), Weil foi preso logo em seguida na Finlândia, após

¹⁴³ Em verdade, devido as difíceis circunstâncias presentes na vida de Grothendieck não se pode afirmar ao certo qual seria a sua nacionalidade, mas ele atuou como matemático francês.

visitar o matemático Nevanlinna, tendo sido acusado de espionagem, retornando à França como prisioneiro, em 1940. Assim, após pedir para retornar para o exército francês afim de evitar passar cinco anos na prisão, Weil teve o pedido aceito. No ano seguinte, em 1941, Weil parte para os Estados Unidos.

No entanto, o período que Weil passou em solo americano também foi cercado por dificuldades. A ida de Weil para os Estados Unidos fez parte de um programa da Fundação Rockefeller no intuito de salvar cientistas franceses das garras do nazismo. Assim que chegou aos Estados Unidos, Weil descobriu que as suas funções na *New School* eram fictícias, servindo apenas para viabilizar o seu visto de entrada. O salário prometido de 2500 dólares quem pagaria na verdade seria a própria fundação, por meio de um contrato com duração de dois anos.

Após isso, Weil foi constrangido a aceitar uma oferta do *Haverford College* sob a argumentação de que para obter experiência no sistema de ensino americano, deveria ministrar aulas, gratuitamente, em seu Departamento de Matemática, uma vez que, já era remunerado pela Fundação.

No início de 1942, Weil aceita um convite da Universidade de Lehigh, na Pensilvânia, assumindo a função de professor assistente com elevada carga horária de aulas distribuída em muitos cursos.

Nesse contexto, o convite para lecionar no Brasil foi muito bem aceito por Weil, vislumbrando, ao mesmo tempo, um novo ambiente e condições propícias para o desenvolvimento de suas pesquisas.

Em janeiro de 1945, André Weil chega ao Brasil, tendo ficado encantado com sua nova realidade, em particular, com a própria biblioteca do Departamento de Matemática, montada por Albanese, a qual Weil considerou como respeitável, sobretudo no campo da Geometria Algébrica, o seu próprio campo de atuação.

A partir de março de 1945, sob o título de professor contratado, ou seja, nomeado por um contrato provisório, Weil começa a ministrar aulas, na disciplina de Análise Superior, começando sua jornada nessa nova etapa de sua carreira, junto à FFCL, ministrando, no primeiro ano, as aulas em francês e, já no segundo ano, conseguindo ministrar as aulas em português.

Lima (2012) relata que, em 1945, Weil abordou acerca das Formas Diferenciais e Espaços de Hilbert nas aulas de Análise Superior, diferentemente do que vinha sendo feito por Omar Catunda, que ministrava Equações Diferenciais, segundo a tradição italiana de matemática. No segundo semestre de 1945, Edilson Farah, assistente de

Weil, ministrou Séries de Fourier. Em 1946, nessa mesma disciplina, André Weil deu um curso de Topologia Geral e Grupos Topológicos e, em 1947, tratou das Integrais Abelianas.

Notemos que, a partir desse momento, inevitavelmente, todo o ambiente matemático estaria sujeito à total influência de duas escolas, ou da junção dessas, a saber, a escola italiana e a bourbakista.

De fato, a abordagem de Weil na disciplina de Análise Superior evidencia o seu direcionamento para os princípios do Grupo Bourbaki, por uma abordagem estruturalista da matemática lançando mão da Teoria dos Conjuntos.

A partir desse momento, segundo Elza Furtado Gomide, a formação dos matemáticos da USP também passou a ser fortemente influenciada pela forma de fazer e praticar matemática defendida pelo Grupo Bourbaki. Sem dúvida era o início da inserção sistemática de novas teorias por meio de uma abordagem que seguia unicamente os parâmetros algébricos inaugurados por David Hilbert e van der Waerden. Nesse sentido, por exemplo, podemos citar o Teorema de Zorn que ele abordou em suas aulas referentes à disciplina de análise superior. (DIAS, 2012, p.165-166)

Nesse mesmo relato, deixa-se claro a preocupação de Weil em inserir novas discussões teóricas, procurando enfatizar a linguagem que deveria ser usada nas suas discussões, inclusive para as discussões que já eram conhecidas pelos alunos. “*Parece que foi seguindo essa postura que buscou detalhar o que para ele era “uma aplicação f de E em F ” que, em suma, nada mais era que uma função*” (LIMA, 2012, p.165-166)

Nesse ponto, percebe-se novamente uma diferenciação entre as escolas, visto que, segundo Lima (2012), a definição de função a qual era costumeiramente abordada nas aulas na FFCL seguia, em linhas gerais, a formulação dada por Fantappiè.

Consideremos um conjunto linear C de números x . Se a cada número x de C corresponde, de modo bem determinado, um ou mais valores de uma outra quantidade y , dizemos que y é função de x ao campo C , que se chama campo de definição, e indicamos essa correspondência com a notação $y = f(x)$ ou por outro símbolo semelhante em que a letra f seja substituída por outra qualquer. Usa-se frequentemente, por exemplo, a notação $y = y(x)$. (São Paulo: FFCL/USP, [19--]. 1v, p.6, GRIFO NO ORIGINAL)

Cabe notarmos que de acordo com a definição concebida por Fantappiè, conforme ressaltado por Lima (2012), existe certa identificação da noção de número

com a noção de quantidade, assim como há a possibilidade de uma associação plurívoca entre x e y , de forma que, possivelmente, Weil sentiu a necessidade de expor uma definição de função que possibilitasse, de melhor maneira, o avanço de suas teorizações matemáticas, nesse caso específico, o Teorema de Zorn.

A influência da visão bourbakista na matemática se tornaria mais forte com a chegada de Oscar Zariski na USP. Apesar de ter permanecido no Brasil apenas durante o ano de 1945, pode-se dizer que Zariski desenvolveu um relevante trabalho em terras brasileiras.

Durante o ano em que trabalhou no Brasil, Zariski ministrou aulas em cursos de extensão na subseção das ciências matemáticas, ministrando palestras sobre álgebra moderna e introdução à geometria algébrica, tendo como foco, como nos relata Lima (2012), o estudo da teoria dos anéis e dos corpos; da teoria dos ideais e da teoria dos valores.

No tocante à geometria algébrica, área de atuação de Zariski, a escola italiana já era considerada uma escola clássica, ou mesmo, para alguns, uma abordagem que carecia de rigor. Contudo, Zariski trabalhava com a visão de que a geometria algébrica estava passando por profundas mudanças por meio da inserção de ideias e procedimentos da álgebra moderna. Em termos de suas próprias palavras: “*O que aconteceu é que este velho e venerável setor da geometria pura sofreu (e ainda está sofrendo) um processo de aritmetização*” (ZARISKI, 1950, apud LIMA, 2012, p.122)

Por outro lado salientemos a visão expressa por Lima (2012) de que, embora Zariski reconhecesse a importância da dita imaginação geométrica para criação de novos teoremas na geometria algébrica, também reconhecia que somente a imaginação geométrica era insuficiente para a produção de demonstrações que não fossem apenas altamente plausíveis. Nesse contexto, Zariski parece buscar um paralelo entre as contribuições dos geometras italianos e o empreendimento da aritmetização.

O rico ambiente acadêmico e de pesquisa estabelecido na FFCL, parece ter sido fator preponderante, pra vinda de um ilustre matemático que, de certa forma, daria continuidade ao trabalho tecido por Zariski, Jean Dieudonné.

Durante o tempo que permaneceu em São Paulo, entre maio de 1946 e novembro de 1947, Dieudonné ministrou os cursos de álgebra moderna, com ênfase em grupos de Galois, e de topologia plana, tendo, em ambos os cursos, o mesmo auxiliar de ensino que Zariski, Luiz Henrique Jacy Monteiro (1918-1975), o qual transcreveu suas notas de aula, transformado posteriormente em uma publicação em três volumes, intitulado

Teoria dos Corpos Comutativos. Tal obra, segundo as palavras de Ubiratan D’Ambrósio¹⁴⁴, tornou-se um livro básico para os cursos na Universidade de São Paulo.

Leopoldo Nachbin se posiciona de maneira elogiosa, com referência à redação das notas de aula do curso de Álgebra Moderna e Grupo de Galois ministrado por Dieudonné.

[...] uma primeira versão do livro de Bourbaki – naquela época, o pessoal do grupo de Bourbaki ainda estava redigindo de forma preliminar o livro. [...] Na minha opinião, o curso de Dieudonné, também publicado por Jacy Monteiro, chega a ser melhor que o livro de Bourbaki. O curso de Dieudonné é cheio de exemplos, foi feito de modo acessível. Já o livro de Bourbaki expõe a matemática de cima para baixo, partindo do mais complexo para chegar aos exemplos.

(ABREU et al, 1991, p.23)

Temos um indício, dessa forma, por meio desses dois depoimentos, de que a referida obra pode ser considerada como um importante documento de recepção de conceitos da álgebra moderna no Brasil.

Assim como seus antecessores, Dieudonné procurou direcionar sua abordagem na direção de um fazer matemático por meio do método algébrico num modelo estruturalista. O conceito de função, por exemplo, foi apresentado como uma aplicação, facilitando dessa forma o estabelecimento da noção de grupo, também baseado em termos de aplicação.

[...] uma aplicação de um conjunto E em um conjunto F é uma operação que, a cada elemento x de E , faz corresponder um elemento e só um y de F , se f designa uma aplicação de E em F , indica-se com $f(x)$ ou f_x (notação indicial) [que é] o elemento de F que corresponde à x pela aplicação f , e que se chama a imagem de x por f , ou o valor de f para o elemento x . A aplicação f se escreve também $x \rightarrow f(x)$.

(LIMA, 2012, p.176, GRIFO NO ORIGINAL)

Lima (2012) argumenta que o conceito de função, definido em termos de linguagem da teoria dos conjuntos, era considerado um ponto central para que o Grupo Bourbaki conseguisse estabelecer o seu estilo estruturalista de organizar e elaborar as teorias da matemática.

A contratação de Jean Delsarte deu continuidade à inserção da escola bourbakista na subsecção de ciências matemáticas na FFCL, após a saída de Weil e Dieudonné.

¹⁴⁴ D’Ambrosio, Ubiratan. *História da Matemática no Brasil: uma visão panorâmica até 1950*.

Delsarte iniciou sua atuação na FFCL, em 1948, ministrando um curso sobre teoria das distribuições. Lima (2012) esclarece que, nesse primeiro ano, Delsarte veio formalmente como professor contratado para assumir a cadeira de análise superior. Entretanto devido a impossibilidade de permanecer regularmente à frente dessa cadeira, suas atividades foram exercidas como um professor visitante.

De fato, Delsarte atuou nos três anos subsequentes como professor visitante, ministrando os cursos sobre espaços vetoriais topológicos e teoria da integração, além de um curso sobre hipergrupos e álgebras de Lie.

A participação bourbakista na FFCL tem continuidade durante toda a década de 50. Lima (2012) relata conferências e cursos ministrados por matemáticos como Laurent Schwartz, o qual também ministrou cursos sobre teoria da distribuição e funções médio-periódicas, como Dieudonné, que retornou para ministrar um curso sobre grupos clássicos e acerca da matemática na antiga Grécia.

Nos anos de 1953 e 1954 atuou na FFCL, Alexander Grothendieck, classificado como pertencente a terceira geração de bourbakistas na USP. Durante sua estada na USP, Grothendieck ministrou um curso sobre espaços topológicos vetoriais, tendo suas notas publicadas, em 1954, em uma ação conjunta do Departamento de Matemática da FFCL e do IMPA.

Lima (2012) destaca que a obra de Grothendieck no tocante à geometria algébrica situa-se num patamar em que não pode ser inserida na concepção bourbakista e muito menos na escola italiana de geometria algébrica, consituindo, em verdade, um novo paradigma de geometria algébrica.

Nesse período, segundo Lima (2012), em torno da década de 50, começaram a ser inseridas, de forma sistemática, as ideias matemáticas do grupo Bourbaki nos conteúdos das cadeiras do curso de Matemática da FFCL.

Por outro lado, conforme ressaltado por Lima (2012), não é considerado verdade que o período da presença da escola italiana significou uma ausência da álgebra moderna até a década de 40. Nesse sentido, chama-se a atenção para alguns fatos.

O próprio Fantappiè, durante seu trabalho na FFCL, levantou discussões acerca da álgebra dita moderna, como a teoria dos grupos de substituições e das equações algébricas.

Salienta-se ainda que segundo a fala de Benedito Castrucci, ex-aluno de Fantappiè, o próprio Fantappiè usou livros de referência da chamada álgebra moderna.

[...] este professor tratou, nesse seu curso, dentre outras teorias das estruturas algébricas. Fez isto utilizando como referência o livro do Van der Waerden intitulado *Modern Algebra*, mesmo autor adotado por Fernando Furquim de Almeida, em 1951, que, conforme apontamento de Ubiratan D’Ambrósio, era professor do primeiro ano de matemática do curso de matemática da FFCL.

(LIMA, 2012, p.195)

Por fim, Lima (2012) salienta aspectos da álgebra moderna presentes nas teses desenvolvidas por Omar Catunda e Cândido Dias.

Dessa forma, visualizamos pela primeira vez um aspecto que pareceu estar presente na gênese na formação das primeiras gerações de matemáticos na USP, uma espécie de simbiose, de junção das características advindas dessas duas importantes escolas, os italianos e os bourbakistas.

6.3.2.1 O Conflito entre duas vertentes de modernização da matemática – a USP como lugar de encontro

O período em que Weil e Zariski atuaram juntos na USP lecionando matemática moderna, no sentido do grupo Bourbaki, e orientando jovens matemáticos brasileiros, não foi somente de alta importância para o desenvolvimento da matemática no Brasil, mas também com fortes impactos internacionalmente. Foi em São Paulo que Weil e Zariski foram confrontados mais diretamente com a escola italiana de geometria algébrica, lidada por Francesco Severi (1879-1961).

Embora os matemáticos italianos sempre sentiram-se orgulhosos a respeito sua escola de geometria algébrica, Zariski, estudando e convivendo nesta comunidade matemática foi um dos primeiros de criticar a falta de rigor nas pesquisas desta escola.

Por um lado, o processo de aritmetização da geometria representou para Zariski um importante avanço. “[...] a aritmetização da geometria algébrica representa um avanço substancial da álgebra em si. Ao ajudar a geometria, a álgebra moderna está ajudando a si mesma acima de tudo” (ZARISKI, 1950, apud LIMA, 2012, p.123).

Por outro lado, Norbert Schappacher relatou como Zariski se tornou sempre mais crítico das abordagens da escola italiana, a qual acompanhou de perto, numa palestra sobre como aconteceram “re-escritas” de matemática tradicional por abordagens modernizadoras:

Oscar Zariski, nascido em 1899, como Ascher Zaritski na pequena cidade de Kobrin, depois Rússia, a partir de 1921 Polônia, hoje Bielorrússia—conseguiu ir à Itália para estudar em 1921 e foi treinado em Roma, o então centro mundial para Geometria Algébrica. Lefschetz esteve lá antes da chegada de Zariski; Severi transferiu-se para Roma em 1922. Zariski obteve seu doutorado com Castelnuovo em 1924 e trabalhou também para o filosoficamente inclinado Enriques, [...] Zariski publicou em 1928 o artigo “Em um teorema de Severi” [93] onde criticou a prova que Severi deu em 1913, e propôs uma abordagem topológica como alternativa. Ele tomou a medida de seus antigos mestres em uma escala muito maior em seu volume *Ergebnisse* em Superfícies Algébricas em 1935 [...] onde os comentários típicos encontrados são do seguinte tipo p. 18: “É importante, entretanto, ter em mente que, na teoria das singularidades os detalhes das provas adquirem especial importância e fazem toda a diferença entre os teoremas que são rigorosamente provados e aqueles os quais são apenas altamente plausíveis.” p. 19: “No tocante às singularidades “acidentais” introduzidas pelas transformações quadráticas e monoidais e em relação à maneira pela qual elas deveriam ser eliminadas pelas transformações biracionais, a prova de Levi não é suficientemente explícita.” p. 20/21: “...O que importa, no entanto, é essencial para a aplicação a qual Severi faz desse lema é que . . . Portanto, a fórmula acima não está correta.”¹⁴⁵

(SCHAPPACHER, 2010, pp. 3282-3283)

Confrontados ambos, Zariski e Weil, na USP com a escola italiana de geometria algébrica, foram incentivados para explicitar mais a crítica do falta do rigor.

No entanto, devemos registrar a existência de posturas críticas com respeito à escola italiana de geometria algébrica. As críticas direcionavam-se, sobretudo, de que a escola italiana adotava uma abordagem que carecia de rigor. Nesse ponto, devemos notar que André Weil não exitou em direcionar críticas nesse sentido ao matemático com maior destaque na escola italiana, Francesco Severi.

¹⁴⁵ Oscar Zariski—born in 1899 as Ascher Zaritski in the small town of Kobrin, then Russia, as of 1921 Poland, today Belarus—managed to go to Italy to study in 1921 and was trained in Rome, then the world center for Algebraic Geometry. Lefschetz had been visiting there before Zariski’s arrival; Severi transferred to Rome in 1922. Zariski got his doctorate with Castelnuovo in 1924 and worked also for the philosophically enclined Enriques, [...] Zariski published in 1928 a paper “On a theorem of Severi” [93] where he criticized a proof that Severi had given in 1913, and proposed a topological approach instead. He took the measure of his former masters on a much bigger scale in his 1935 *Ergebnisse* volume on Algebraic Surfaces [...] where the typical comments one finds are of the following sort. p. 18: “It is important, however, to bear in mind that in the theory of singularities the details of the proofs acquire a special importance and make all the difference between theorems which are rigorously proved and those which are only rendered highly plausible.” p. 19: “In regard to the “accidental” singularities introduced by the quadratic and the monoidal transformations and in regard to the manner in which they should be eliminated by birational transformations, Levi’s proof is not sufficiently explicit.” p. 20/21: “...What matters, however, and is essential for the application which Severi makes of this lemma is that . . . Hence the above formula is not correct.

Por um lado, podemos constatar críticas explícitas de Weil à escola italiana. Em seu texto, publicado em uma coleção francesa muito importante, Weil aponta uma falta de rigor da escola italiana.

Não é mais necessário derivar nosso conhecimento por meio de raios de intuição de alguns mortais privilegiados. A teoria das superfícies, explorada brilhantemente e também muito rapidamente pela escola italiana deve dar lugar agora a uma teoria geral das variedades algébricas, livre das hipóteses restritivas sobre a natureza dos corpos de base e a ausência de singularidades.¹⁴⁶

(WEIL, 1948, TRADUÇÃO NOSSA)

Goodstein (2009) registra as críticas feitas, inclusive por Zariski, além de explicitar o confronto entre Severi e Weil, em 1954.

Em particular, havia a preocupação sobre a precisão matemática de alguns importantes teoremas. Este foi especialmente o caso de membros da escola franco-americana de geometria algébrica, começando por um aluno de Castelnuovo, em meados da década de 1930, Oscar Zariski, logo após ter escrito seu bem conhecido livro sobre superfícies algébricas. Posteriormente, ele se juntou proeminentemente à Andre Weil, Claude Chevalley, e Pierre Samuel. A escola italiana esteve muito sensível a essas críticas. Francesco Severi, especialmente, tentou, sem sucesso, endereçá-las.¹⁴⁷

(GOODSTEIN, 2009, p. 8, TRADUÇÃO NOSSA)

O ápice das críticas foi um confronto pessoal de tamanho nunca antes acontecido. Os autores o mencionam desta maneira:

Houve também um confronto bem conhecido entre Severi e Weil sobre o rigor da teoria de Severi a respeito da intersecção de sub-variedades de variedade projetiva e equivalência racional, no Congresso Internacional de Matemáticos em Amsterdã, em 1954.¹⁴⁸

(ibid., p. 9)

¹⁴⁶ Il ne nous est plus nécessaire de faire dériver nos connaissances des éclairs d'intuition de quelques mortels privilégiés. La théorie des surfaces, brillamment mais trop rapidement explorée par l'école italienne doit faire place à présent à une théorie générale des variétés algébriques, affranchie d'hypothèses restrictives sur la nature du corps de base et sur l'absence de singularités.

¹⁴⁷ In particular, there was concern about the mathematical precision of some of the important theorems. This was especially the case among members of the Franco-American school of algebraic geometry, beginning with Castelnuovo's student Oscar Zariski in the mid-1930s, soon after he had written his well-known book on algebraic surfaces. He was later joined, most prominently, by Andre Weil, Claude Chevalley, and Pierre Samuel. The Italian school was very sensitive to these criticisms. Francesco Severi, especially, tried unsuccessfully to address them.

¹⁴⁸ There was also a well-known confrontation between Severi and Weil at the 1954 International Congress of Mathematicians at Amsterdam over the rigor of Severi's theory of the intersection of subvarieties on a projective variety and rational equivalence.

Como parte do Congresso ICM, um simpósio sobre Geometria Algébrica foi organizado. Severi, convidado dar uma palestra – apesar da sua íntima relação com o fascismo ele foi nomeado presidente honorário do congresso – contudo foi interrompido, no meio de sua palestra, por Weil, apontando falta de rigor (ver Schappacher 2010, 3283). Severi tentou justificar-se numa carta ao Weil em 1956. (Bolondi, 2004).

O próprio Zariski, apesar de alguns momentos em que reconhece o mérito, não deixa de expressar sua visão em termos da ausência de rigor na escola italiana.

[...] a falta de rigor na geometria algébrica criou um estado de eventos que não podia ser tolerado indefinidamente. Efetivos controles sobre o vôo livre da imaginação geométrica foram insuficientemente precisado, e uma completa revisão e aritmetização dos fundamentos da geometria algébrica era a única solução possível. Essa tarefa preliminar fundamental da geometria algébrica moderna pode agora ser considerada como realizada em toda a sua essência.

(ZARISKI, p.77, apud LIMA, 2012, p.123)

Dentro dessa visão, Zariski aponta o motivo da não existência de vínculos entre a escola italiana e a matemática moderna: *“Deve-se assinalar que a Geometria Algébrica desenvolvida pela escola italiana tinha um grande defeito: a falta de rigor. Por esse motivo – por faltarem métodos rigorosos - a escola italiana declinou e a Geometria Algébrica ficou isolada da Matemática Moderna.”* (LIMA, 2012, p.170)

As críticas em termos da falta de rigor da escola italiana eram movidas em favor da crescente aplicação da álgebra moderna no campo da geometria algébrica.

Nessa linha de raciocínio, Lima (2012) aponta acerca do intento de Zariski de instituir no contexto da subsecção das ciências matemáticas da FFCL, teorias que muito provavelmente não fossem centrais, ou mesmo abordadas, pelos matemáticos italianos no estudo da geometria algébrica pelo método geométrico. Como, por exemplo, a definição de anel, ministrada em consonância aos princípios da estrutura matemática por Zariski, em seu curso intitulado Introdução à teoria dos ideais, realizado no primeiro semestre de 1945.

6.3.3 Análise da obra Curso de Análise Matemática de Luigi Fantappiè

O curso de análise de Fantappiè consiste em notas das aulas ministradas por Fantappiè na disciplina de análise matemática na USP, redigidas pelo seu assistente Omar Catunda e exposta em forma de apostila.

Por outro lado, ressaltamos que o curso ministrado por Fantappiè foi baseado na obra *Lezioni di Analisi* de Francesco Severi, publicado em 1933. Assim, a presente análise compreende também a comparação com a obra de Severi.

A análise foi realizada por meio do exemplar que está localizado na Biblioteca do IME/USP.¹⁴⁹ A apostila encontra-se em bom estado de conservação sendo dividida em quatro grandes lições, a saber:

- Teoria dos Números Reais – 24 páginas
- Conjuntos Lineares. Funções e Limites no Campo Real – 36 páginas
- Derivadas e Diferenciais das Funções de Uma Variável – 34 páginas
- Integrais das Funções de uma variável – 50 páginas

A teoria dos números reais é iniciada considerando os números naturais e racionais, sendo apresentados vários campos de números, tais como, naturais ou inteiros absolutos; inteiros relativos; racionais absolutos e racionais relativos e definidas operações sobre os referidos campos.

Os números irracionais são abordados inicialmente por meio de uma concepção alternativa acerca do desenvolvimento da matemática por Fantappiè. Nessa linha é realizada uma incursão histórica, remontando aos gregos, para justificar a sua origem dos números irracionais. Nessa visão: “*a introdução dos números irracionais se impôs [sic] desde o tempo dos gregos pelas necessidades da medida de grandezas em geometria*” (São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.2)

Após isso é explicado que existem segmentos retilíneos que não são comensuráveis com a unidade adotada e, logo a seguir, explicita-se a prova da incomensurabilidade da diagonal do quadrado com relação ao seu lado.

Daí, argumenta-se que Euclides estendeu a definição de proporcionalidade entre dois pares de grandezas no intuito de ampliar o campo dos números, concebendo a definição de número irracional por abstração como “*medida de grandeza incomensurável com a unidade*”.

Nesse sentido, a partir de dois pares de grandezas incomensuráveis, A e B por um lado, C e D por outro, dada uma fração $\frac{m}{n}$ pode-se construir a grandeza $\frac{m}{n}B$, que por hipótese, não pode ser igual a A , tendo pois, forçosamente, um dos dois casos:

¹⁴⁹ Não é conhecida a data de concepção do manuscrito.

$$\frac{m}{n}B < A \quad \text{ou} \quad \frac{m}{n}B > A$$

Sendo chamado o primeiro caso de medida “por falta” de A em relação a B e, no segundo caso, uma medida “por excesso”.

Nessa linha de raciocínio, as quatro medidas formarão uma proporção, se todas as medidas por falta de A em relação a B forem também medidas por falta de C em relação a D e, se todas as medidas por excesso de A em relação a B forem também medidas por excesso de C em relação a D .

Dessa forma, nos termos de Fantappiè, “*decorre, por abstração, o conceito de número irracional, como o que há de comum com os pares de grandezas (A, B) e (C, D) e todos os outros pares de grandezas proporcionais a A, B .*” (São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.3)

A partir dessas considerações define-se então um número irracional em termos das duas classes distintas de números racionais, as classes por falta e as classes por excesso.

Ora, podemos dar uma definição nominal de número irracional: os dois pares de grandezas considerados, A, B e C, D têm em comum duas classes bem definidas de números racionais: a classe H das medidas por falta e a classe H' das medidas por excesso, da primeira grandeza em relação à segunda, em cada par. Esse par de classes de números racionais, chamamos número irracional, que diremos definido pelas duas classes H e H' . Este número irracional será a razão $A:B$ ou $C:D$, ou a medida de A em relação a B ou de C em relação a D .

(São Paulo: FFCL/USP, [19--], GRIFO NO ORIGINAL)

Devemos notar, todavia, que Fantappiè faz uma primeira construção de número irracional baseado no conceito geométrico de grandeza e nas relações de proporcionalidade entre os pares de grandezas.

Severi, no terceiro capítulo de sua “*Lezioni di Analisi*” constrói o conceito de número por meio da utilização do princípio da permanência de Hankel.

Assim, devemos destacar que a construção do conceito de número irracional feito por Severi é similar à construção apresentada por Fantappiè. Severi também apresenta a definição de comensurabilidade entre duas grandezas homogêneas e constrói o conceito de número irracional levando em consideração duas classes de números racionais.

Dessa forma, podemos inferir que, nesse ponto, a construção apresentada por Fantappiè é similar à construção tecida por Severi, que também efetuou a construção baseado no conceito geométrico de grandeza.

Pensar sobre a relação entre duas quantidades homogêneas equivale, portanto, a pensar ao mesmo tempo em duas classes de seus valores, por falta e por excesso.

A razão entre duas grandezas é logicamente definido como a abstração de duas classes de números (valores por falta e por excesso), sujeitas a certas restrições, conforme veremos.

Diremos, entretanto, que a razão definida por estas duas classes de números racionais, é um número irracional, quando as duas grandezas A,B são incomensuráveis. E chamaremos globalmente de números reais, os números racionais e irracionais.¹⁵⁰

(SEVERI, 1938, p.70, TRADUÇÃO NOSSA)

Por outro lado, logo a seguir, Fantappiè efetua novas considerações, dessa vez, não mais apoiando a fundamentação dos números irracionais em bases geométricas. Fantappiè argumenta inicialmente que, a definição por abstração dada por Euclides ao número irracional foi aceita até meados do século XIX, quando Dedekind e Cantor procuraram estabelecer as bases da aritmética de maneira completamente independente da geometria. “A definição dada por Dedekind é análoga á que demos no fim do numero precedente, mas sem a consideração prévia de medidas de grandezas” (São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.3, GRIFO NOSSO)

Dessa forma, Fantappiè reformula sua definição anterior, fundamentada em conceitos geométricos, tecendo uma nova definição análoga à anterior, dessa vez baseada na definição concebida por Dedekind.

- 1) Todo número racional absoluto pertence a uma ou á outra classe.
- 2) Se $\underline{a}$ é um número da classe H , todo número menor que $\underline{a}$ é da classe H ; se $\underline{a'}$ é um número da classe H' , todo número maior que $\underline{a'}$ é da classe H' .
- 3) A classe H não tem máximo e a classe H' não tem mínimo.

¹⁵⁰ Pensare al rapporto di due grandezze omogenee equivale dunque a pensare nelle stesso tempo alle due classi dei suoi valori per difetto e per eccesso.

Il rapporto di due grandezze si definisce insomma logicamente, come l'astratto di due classi di numero razionali (i valore per difetto e per eccesso) sottoposte a certi vincoli, che ora vedremo.

Diremo intanto che il rapporto definito da queste due classi di numeri razionali, è un numero irrazionale, quando le due grandezze A,B sono incommensurabili. E chiameremo complessivamente numeri reali i numeri razionali e gl'irrazionali.

O conjunto das duas classes nestas condições forma uma secção própria ou corte no campo racional ou numero irracional, que se dirá definido pela secção. A primeira classe chama-se classe majorante, a segunda, classe minorante do número irracional.

(São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.3)

Logo a seguir, talvez para fins didáticos e para melhor entendimento, Fantappiè toma um exemplo considerando duas classes, uma delas consistindo em todos os números racionais cujo quadrado é menor que 2 e a outra em todos os números racionais cujo quadrado é maior que 2. Assim, fazendo uso de desigualdades e dos “epsilons” prova-se que as três condições anteriores são satisfeitas, concluindo-se que a secção construída é um número irracional, nesse caso, denotado por $\sqrt{2}$.

Dessa maneira, tendo já consolidada a noção de número irracional, Fantappiè, no intuito de estabelecer a noção de número real absoluto, define o conceito de número racional absoluto, fazendo uso das secções ou das classes de números racionais definidos anteriormente. Assim, os números racionais também estão sendo concebidos por meio das secções.

- 1) Todo número racional, com excepção de r , está numa ou noutra classe.
- 2) Sendo a é um número da classe A, todo número racional menor do que a é da classe A; sendo a' um número de classe A', todo número racional maior que a' é da classe A'.
- 3) A primeira classe não tem máximo e a segunda classe não tem mínimo.

(São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.4)

A noção de número real é fundamentada apoiando-se nas noções estabelecidas de números racionais e irracionais.

Essas três propriedades, que só diferem das do numero anterior pela única excepção na primeira, definem o que chamaremos de secção imprópria que identificaremos com o número racional r . Desta maneira todos os numeros racionais ou irracionais são definidos por secções impróprias ou proprias no campo racional. Por essa razão, podemos dar a todos esses números racionais ou irracionais a mesma denominação de numeros reais (absolutos), sendo assim cada numero real [é] definido por uma secção do campo de números racionais absolutos.

(São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.4)

Após a construção do conceito de número real foram concebidas diversas definições e reflexões acerca da igualdade e desigualdade, operações e propriedades dos números reais, além de vários teoremas no sentido de solidificar todos os aspectos do campo real. De fato, chamamos a atenção para a consistência da referida construção, feita em riqueza de detalhes, de maneira muito próxima à construção aceitas nos tempos atuais.

Não obstante, Fantappi  apresenta outros modos de determinação de um número real, de outras três formas diferentes, por meio de partições, classes majorantes ou minorantes e por classes contíguas.

Em termos de partições, um número real é definido considerando duas classes K e K' não vazias de números reais relativos os quais devem obedecer às seguintes condições:

- 1) Todo número real pertence a uma e a só uma das duas classes.
- 2) Se um número α está na classe K , todo número menor que α está na classe K .

No tocante a construção por classes majorantes e minorantes, Fantappi  define que uma classe K não vazia de números reais relativos será uma classe majorante se:

- 1) Não contém todos os números reais
- 2) Se um número α está na classe K , todo número maior que α também estará na classe K .

Nessa visão, demonstra-se que toda classe majorante define um único número real que, ou é o mínimo da classe K , ou é o máximo dos números que estão fora de K .

As classes contíguas são definidas como as classes que satisfazem as seguintes condições, dadas duas classes de números reais H e H' :

- 1) Todo número de H   menor que qualquer número de H'
- 2) Dado qualquer número real positivo ε , há sempre um número h de H e um número h' de H' que satisfazem   condição $h' - h < \varepsilon$.

É verificado então que duas classes contíguas definem um único número real.

Destaquemos ainda a teoria exposta acerca da representação decimal de um número real qualquer, motivado pelo problema de representá-lo de maneira adaptável ao cálculo numérico.

Dessa forma, a despeito de todas as definições possíveis de número real, Fantappiè justifica sua predileção pela definição adotada em seu texto.

Podemos definir os entes – partições, classe minorante, classe majorante, par de classes contíguas – da mesma maneira que fizemos no campo real, considerando porém, somente os números racionais. Os entes assim obtidos podem servir de outras tantas maneiras os números reais. Preferimos, porém, a definição por secções pelas seguintes razões; quanto às partições que definem um número racional, segundo temos este na classe minorante ou na classe majorante temos duas partições diferentes que dão o mesmo número racional. Análogo inconveniente existe na definição pela classe minorante ou pela classe majorante, em que o número racional definido póde pertencer ou não á classe; acresce aqui o inconveniente da falta de simetria, não havendo nenhuma razão para preferir ou só as classes minorantes ou só as classes majorantes. Enfim, para as classes contíguas o inconveniente torna-se ainda maior, pois há infinitas classes contíguas que definem um mesmo número real.

Há, portanto, em todos os casos a impossibilidade de associar cada número real a um único ente que o define; se secções no campo racional dão definições nominais para os números reais.

(São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.21, GRIFO NO ORIGINAL)

A seguir são definidas as noções de conjuntos ordenados, densos e contínuos pontuando-se que o campo dos números reais é ordenado, denso e contínuo.

Por fim, Fantappiè trata da representação dos números reais na reta, salientando o postulado da continuidade de Dedekind, o postulado de Arquimedes e mostrando a correspondência biunívoca entre os números reais relativos, ordenados segundo o critério do valor algébrico e os pontos de uma reta orientada.

Assim, após a verificação da referida correspondência defininida a noção de intervalo.

Dessa forma, chamamos a atenção para a extensa e relevante teoria acerca dos números reais apresentada por Fantappiè, já carregadas da abordagem tecida a partir de Dedekind.

A segunda lição de conjuntos lineares, funções e limites do campo real é iniciada com a noção de conjunto linear sendo definida como todo conjunto de números reais relativos ou dos seus pontos representativos.

A partir daí são tecidas diversas definições e teoremas acerca das propriedades dos números reais na reta. As primeiras noções importantes são as de extremo superior e extremo inferior de um conjunto, definidos da seguinte maneira.

Chama-se extremo superior de um conjunto C , um número L tal que:

- 1) nenhum número do conjunto supera L ;
- 2) ha sempre um número do conjunto maior que qualquer numero L' que seja menor que L .

[...]Chama-se extremo inferior de um conjunto C , um número l tal que:

- 1) nenhum número do conjunto é menor que l ;
- 2) dado um número qualquer $l' > l$, ha sempre um número do conjunto menor que l' .

(São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.1, GRIFO NO ORIGINAL)

A seguir é provado o chamado teorema fundamental, ou seja, o teorema de existência e unicidade do extremo superior ou inferior, a saber, todo conjunto limitado superiormente (inferiormente) tem um extremo superior (inferior) e apenas um.

A próxima noção importante a ser definida é a de ponto de acumulação. O ponto de acumulação de um conjunto foi definido como os pontos P tais que, em qualquer entorno do mesmo, possam ser encontrados pontos de C distintos de P .

A partir do estabelecimento do conceito de ponto de acumulação alguns teoremas e outras noções surgem nele baseadas. Logo em seguida, prova-se o Teorema de Bolzano, a saber, todo conjunto linear C , com um número infinito de elementos, e limitado, tem ao menos um ponto de acumulação.

Assim, são enunciadas ainda outras noções e proposições acerca das propriedades dos números reais na reta, como, conjuntos derivados, fechados e perfeitos, sendo provado, por fim, o teorema de Borel-Lesbegue.

A partir desse ponto são desenvolvidos tópicos relativos ao conceito de função. Notemos que o conceito de função tecido por Fantappiè também é apresentado levando em consideração conceitos modernos, do ponto de vista da formação de matemáticos nas Universidades .

Consideremos um conjunto linear C de números x . Se a cada número x de C corresponde, de modo bem determinado, um ou mais valores de uma outra quantidade y , dizemos que y é função de x ao campo C , que se chama campo de definição, e indicamos essa correspondência com a notação $y = f(x)$ ou por outro símbolo semelhante em que a letra f seja substituída por outra qualquer. Usa-se frequentemente, por exemplo, a notação $y = y(x)$.

(São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.6, GRIFO NO ORIGINAL)

Deixa-se explicitado que para cada número x de C existe um ou mais valores de outra quantidade y correspondente. Dessa forma, com relação a esse aspecto, Fantappié classifica as funções em monódromas ou unicamente determinadas, para as funções que tomam somente um valor para cada valor de x e polídroma para as outras funções.

É especificado ainda, em termos da noção de variável, que x pode tomar qualquer valor no conjunto C , sendo definido que x é a variável independente e y a variável dependente.

Fantappié chama a atenção para o fato de que, comumente, o campo de definição qual a função está atrelado, consiste em um intervalo, ou então, o próprio campo real a menos de pontos de um conjunto discreto, sendo esse o caso das funções racionais e das funções tgx , $cotgx$, $secx$ e $cossecx$.

Em termos das funções monódromas são desenvolvidos os conceitos de funções de funções e funções inversas.

Contudo, nesse ponto, Fantappié procura evidenciar que a sua concepção de função não está restrita às funções comumente conhecidas na matemática, fazendo questão de explicitar variados exemplos, como:

1) Função altura de um número racional.

Definido para cada número racional $x = \pm \frac{m}{n}$, com m inteiro não negativo e n inteiro e positivo, com m e n primos entre si, de forma que $\alpha(x) = m + n$.

2) Função máximo inteiro $y = [x]$. Segundo Fantappié a função está definida em todo o campo real, que em cada intervalo cujos extremos sejam dois números inteiros consecutivos, da forma $n \vdash n + 1$, tem-se o valor constante $y = n$.

3) Um terceiro exemplo é apresentado utilizando-se dos dois primeiros.

$y = \alpha(x)$, se x é racional

$y = [x]$, se x é irracional

4) Função indicadora de Gauss

Para cada número inteiro positivo n , a função deverá indicar o número de inteiros positivos primos com n e menores que n , sendo $\varphi(n)$ o chamado indicador de Gauss.

Entretanto, devemos relatar que, na visão de Fantappiè, os exemplos apresentados não estão restritos às funções monódromas, uma vez que, também são apresentados alguns exemplos envolvendo as funções polídromas, como a função $y = \sqrt{x}$, a qual, para cada valor inteiro positivo x , assume dois valores opostos, ou ainda, funções definidas por meio de desigualdades, como $|y| < x$, que a cada x desse campo faz corresponder todos os valores reais do intervalo $-x \vdash \vdash x$

Por fim, em termos do conceito de função, são citados ainda exemplos nos quais a função pode configurar-se como um instrumento de aplicação em situações práticas.

“Assim, a temperatura e a pressão do ar em certo local são funções do tempo; a resistência e outras grandezas características de um corpo são funções da temperatura” (São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.8)

Devemos notar que, embora a concepção do conceito de função apresentada considere que um valor de x não determine necessariamente um único valor de y , entendemos que a definição tecida traz consigo elementos próximos aos já estabelecidos a partir de Dirichlet, além de já englobar outros exemplos de funções.

A partir desse ponto, Fantappiè define conceitos, por exemplo, o conceito de oscilação, além de demonstrar alguns resultados, no intuito de enunciar e demonstrar o Teorema de Weierstrass, que é enunciada como: “Dada um função $f(x)$ definida num campo C , sendo L o seu extremo superior, existe apenas um ponto ε_0 (finito ou infinito) tal que nos pontos de C internos a um entorno arbitrário de ε_0 o extremo superior de $f(x)$ é ainda L ”

Podemos perceber em vários pontos do texto, um detalhamento na abordagem de determinados conceitos, possivelmente no intuito de torná-los mais claros para os estudantes, algo que parece ser uma certa preocupação de Fantappiè. Algumas vezes são apresentadas, até mesmo, mais de uma definição para o mesmo conceito, sendo, em geral, uma definição de caracter mais didático, sem que necessariamente seja não rigorosa, e logo após, outra definindo formalmente o conceito.

No caso do conceito de limite, por exemplo, Fantappiè explicita uma definição de limite baseada na noção de entorno de um ponto, definido como qualquer intervalo aberto que contenha o referido ponto.

Seja $y = f(x)$ uma função definida num campo $\mathcal{C}$ e seja a um ponto de acumulação desse campo. Dizemos que y tem por limite o número real b para x tendendo a a , escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow a} y = b$$

quando a cada entorno β de $\underline{b}$ pôde-se fazer corresponder um entorno conveniente α de a , tal que para todo ponto $\underline{x}$ de $\underline{C}$ diferente de $\underline{a}$ contido em α , o valor $y = f(x)$ correspondente pertença ao entorno β . (São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.11, GRIFO NO ORIGINAL)

A seguir, não antes de haverem outras explicações acerca de aspectos que estarão considerados na definição formal, Fantappiè apresenta uma nova definição para o conceito de limite.

Podemos dar uma outra forma a essa definição, pois a condição acima é evidentemente satisfeita se nos limitarmos aos entornos simétricos de $\underline{b}$ e de $\underline{a}$ pois dentro de qualquer entorno há sempre um entorno simétrico e o elemento que estiver nesse entorno simétrico estará dentro do entorno primitivo. Ora, $\underline{x}$ estará no entorno simétrico (ε) de $\underline{a}$, se tivermos

$$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$$

donde se tira

$$a - x < \varepsilon \text{ e } x - a < \varepsilon$$

ou

$$|x - a| < \varepsilon$$

Podemos dizer, portanto que $\underline{y}$ tende a $\underline{b}$ para $\underline{x}$ tendendo para $\underline{a}$, quando, dado o número $\varepsilon > 0$ arbitrário, pôde-se determinar em correspondência um número positivo δ , tal que para todo ponto $\underline{x}$ diferente de $\underline{a}$ satisfazendo a condição

$$|x - a| < \delta$$

teremos, para o valor (ou valores) de $y = f(x)$ correspondente

$$|y - b| < \varepsilon$$

(São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.11, GRIFO NO ORIGINAL)

Fantappiè deixa claro seu entendimento de que a condição de que $x \neq a$ é fundamental, visto que há muitos casos nos quais, embora a pertença ao campo C , tem-se que:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$$

Dessa forma, Fantappiè continua a explicação argumentando que considerando o campo real e a função $f(x) = 1$ para $x \neq 0$ e $f(0) = 0$, tem-se que 0 é ponto de acumulação e, daí para qualquer que seja $\varepsilon > 0$, temos, para $x \neq 0$:

$$|f(x) - 1| = 0 < \varepsilon$$

E, portanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

Ao passo que pela definição $f(0) = 0$.

Em uma nota, logo a seguir, Fantappi  define, em termos de limite, que uma função será convergente num ponto a quando ela tem um limite finito para $x \rightarrow a$, divergente, quando esse limite existe e   infinito e indeterminada, quando não há limite.

Em seguida são discutidas questões acerca do limite no infinito e são definidas as no es de limites sobre conjuntos parciais e limites laterais, além de serem enunciados e demonstrados diversos teoremas sobre os limites. Nas demonstra es dos teoremas, podemos notar que a argumentação continua a basear-se na abordagem algebrizada já estabelecida, como, por exemplo, podemos perceber na demonstração do teorema “Se duas funções y_1 e y_2 de x , definidas no mesmo campo C , de que a é ponto de acumulação, têm limites finitos para $x \rightarrow a$ temos também $\lim_{x \rightarrow a} (y_1 + y_2) = \lim_{x \rightarrow a} y_1 + \lim_{x \rightarrow a} y_2$ ” (São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.15, GRIFO NO ORIGINAL).

Com efeito, seja $\lim_{x \rightarrow a} y_1 = b_1$ e $\lim_{x \rightarrow a} y_2 = b_2$. Para demonstrar a igualdade (1), basta verificar que dado um número $\varepsilon > 0$ arbitrário, pode-se determinar um entorno α de a tal que para todo $x \neq a$ dentro dele, se tenha

$$(3) |(y_1 + y_2) - (b_1 + b_2)| < \varepsilon.$$

Mas para isto, basta determinar, o que   possível pela existência dos limites de y_1 e y_2 : um entorno α_1 de a para o qual se tenha $|y_1 - b_1| < \frac{\varepsilon}{2}$, e um entorno α_2 de a para o qual seja $|y_2 - b_2| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Tendo em conta estas desigualdades, segue a condição (3) para todo ponto $x \neq a$ interno a um qualquer entorno α de a , contido em α_1 e α_2 . (São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.15, GRIFO NO ORIGINAL)

Logo a seguir são realizadas algumas reflexões acerca das funções monótonas e estudados limites de algumas funções específicas, como funções trigonométricas, a função $y = \frac{\sin x}{x}$, função exponencial e função logarítmica. A partir desse contexto estuda-se a convergência de algumas funções.

Assim, mostra-se inicialmente que a sucessão cujo termo geral é dada por $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ será convergente para $n \rightarrow \infty$, cujo limite será designado pelo número e .

A seguir, considerando agora a função definida no campo real externo ao intervalo $-1 \vdash 0$ dada por $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, demonstra-se que $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

A noção de convergência é aprofundada com o teorema acerca do critério de convergência de Cauchy, sendo também definidas as noções de limite máximo e limite mínimo.

A condição necessária e suficiente para que uma função $f(x)$ tenha um limite finito em um ponto de acumulação $\underline{a}$ do seu campo de definição, é que dado um número $\varepsilon > 0$ se possa achar em correspondência um entorno α de $\underline{a}$ tal que para dois valores quaisquer x' e x'' de $\underline{x}$ dentro dele, e distintos de $\underline{a}$, se tenha, para o valor (ou valores) correspondentes da função

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$$

(São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.28, GRIFO NO ORIGINAL)

O conceito de continuidade é definido logo em seguida, primeiramente, sendo definido a noção de função contínua em um ponto, da seguinte forma: “Seja C um conjunto de números x , e x_0 um ponto de acumulação de C pertencente a C . Se $y = f(x)$ é uma função definida em C e se é

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Diz-se que f é contínua no ponto x_0 .” (São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.31)

Argumenta-se, após isso que, não sendo admitido o infinito como valor de uma função em um ponto, segue que $f(x_0)$ é finito e, portanto, se uma função é contínua em um ponto x_0 haverá um entorno desse ponto o qual ela é limitada.

A seguir, o conceito de continuidade é expandido para um campo C . “Se C é um conjunto denso em si e se $f(x)$ é contínua em todos os pontos de C diz-se que essa função é contínua no campo C .” (São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.31, GRIFO NO ORIGINAL)

Além de ser definido o conceito de continuidade lateral, várias reflexões são feitas a partir das definições apresentadas, acerca das propriedades relativas às funções contínuas, bem como são explicitadas diversas funções contínuas em determinados intervalos ou em todo o campo real.

Em particular, cabe-nos destacar os teoremas importantes envolvendo a continuidade, valores assumidos pela respectiva função e valores extremos de uma função, a saber:

Teorema 1. Se uma função $f(x)$ definida e contínua num intervalo fechado $a \rightarrow b$ tem nos extremos $\underline{a}$ e $\underline{b}$ valores de sinal contrário,

essa função $f(x)$ se anula ao menos em um ponto interno desse intervalo.

[...] Teorema 2. Se $f(x)$ é uma função monódroma definida em um conjunto fechado C e contínua em todos os pontos de acumulação de C , ela é limitada e alcança em C os seus extremos superior e inferior (que serão máximo e mínimo respectivamente)

[...] Teorema 3. Toda função $f(x)$ contínua em um intervalo fechado $a \rightarrow b$, assume nesse intervalo todos os valores compreendidos entre o seu máximo L e o seu mínimo l (o máximo e o mínimo existem pois o intervalo $a \rightarrow b$ é um conjunto fechado).

(São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.32-33, GRIFO NO ORIGINAL)

A noção de continuidade uniforme é definida logo que os teoremas são demonstrados.

Diz-se que uma função monódroma $f(x)$ definida num intervalo qualquer é uniformemente contínua nesse intervalo quando a cada número $\varepsilon > 0$ arbitrário se pode fazer corresponder um número positivo δ tal que em qualquer intervalo de amplitude δ contido no intervalo dado a oscilação da função seja menor que ε .

(São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.34)

Daí, a partir de algumas reflexões, a referida noção é redefinida em termos das desigualdades.

Póde-se pois redefinir a continuidade uniforme de outra maneira:

Diz-se que uma função $f(x)$ é uniformemente contínua num intervalo quando dado ε arbitrário se póde achar um número $\delta > 0$ tal que de (1) segue (2), desde que x' e x'' sejam pontos desse intervalo.¹⁵¹

(São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.35)

Finalizando a seção é destacado que a função $f(x) = \frac{1}{x}$ é contínua, mas não é uniformemente contínua, sendo imediatamente enunciado e demonstrado o teorema de Heine, que toda função contínua em um intervalo fechado é uniformemente contínua nesse intervalo.

Assim, devemos destacar que os conceitos de limite trazidos por Fantappiè, assim como no caso dos conceitos de número real e de função, trazem uma abordagem baseada na Teoria dos Conjuntos e, especialmente, uma versão já completamente algebrizada com a utilização dos épsilons e deltas.

As noções de continuidade e de convergência também já são apresentadas por meio destas abordagens.

¹⁵¹ A identificação (1) está associada com $|x' - x''| < \delta$ e a (2) com $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$

A seção seguinte é dedicada ao desenvolvimento do conceito de derivada e diferenciais de funções de uma variável. A definição de derivada é apresentada inteiramente baseada no conceito de limite.

Seja $y = f(x)$ uma função definida num campo C de números reais x , e seja x_0 , e seja x_0 um ponto de acumulação de C que pertence a C . Sendo x outro ponto qualquer de C , a diferença $f(x) - f(x_0)$ chama-se acrécimo ou incremento de $f(x)$ no ponto x_0 , relativo ao acréscimo $x - x_0$ da variável independente.

Em todos os pontos $x \neq x_0$ de C está definida a função $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, que se chama razão incremental de $f(x)$, relativa ao ponto x_0 . Quando esta razão tem, para $x \rightarrow x_0$ um limite finito, chama-se este limite derivada da função $f(x)$ no ponto x_0 , e se indica com a notação

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Diz-se neste caso que a função $f(x)$ é derivável no ponto x_0 .

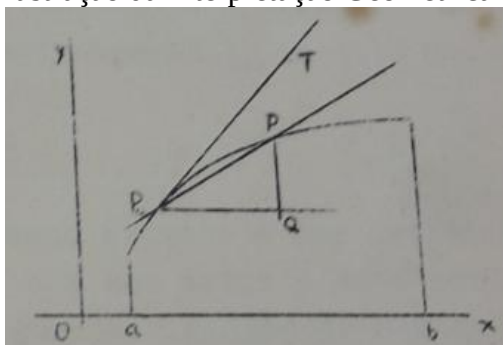
(São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.1, GRIFO NO ORIGINAL)

Notemos que, assim como a continuidade, o conceito de derivada foi definido de forma pontual, ou seja, foi definido em um ponto. Assim, o primeiro resultado a ser demonstrado é que toda função derivável em um determinado ponto é contínua nesse mesmo ponto.

Após a demonstração, Fantappiè traz duas interpretações ou releituras acerca do conceito de derivada, uma interpretação geométrica e uma interpretação mecânica.

A interpretação geométrica consiste em considerar uma função $f(x)$ definida em um intervalo $a \leq x \leq b$. Assim, fixando-se um ponto P_0 do gráfico de $y = f(x)$, de coordenadas, $(x_0, f(x_0))$, a derivada $f'(x_0)$ poderá ser interpretada como o coeficiente angular da reta que será a posição limite para o qual tende a reta secante que contém os pontos (x, y) e P_0 , a medida que x tende à x_0 .

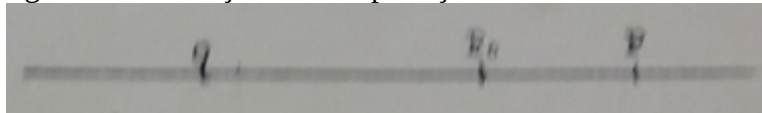
Figura 54: Ilustração da Interpretação Geométrica da Derivada



Fonte: (São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.2)

A interpretação mecânica da derivada, considera um ponto móvel P que se desloca sobre uma reta, com o seu movimento podendo ser descrito dando-se o valor da abscissa x de P (referida a uma certa origem O e a uma unidade de medida) correspondente a cada instante t . Supõe-se assim que, seja dado o espaço x em função do tempo t por meio da relação $x(t)$, a qual dá a lei do movimento.

Figura 55: Ilustração da Interpretação Mecânica da Derivada



Fonte: (São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.2)

Assim, sendo P_0 a posição no tempo t_0 e P , a posição no tempo t , segue que a velocidade média do ponto entre os instantes t_0 e t será dada por:

$$\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}$$

Dessa forma, define-se o limite desse quociente para $t \rightarrow t_0$ (quando existe) como a velocidade do ponto P no instante t_0 , sendo denotado por $x'(t)$, ou pela notação de Newton, $\dot{x}(t)$, comumente usada em mecânica racional, segundo Fantappiè.

A teoria continua a desenrolar-se, por meio da definição das derivadas laterais e a explicitação de exemplos de funções que possuem derivadas laterais diferentes no mesmo ponto.

A partir daí são estabelecidas as técnicas de derivação envolvendo diversos resultados, inclusive envolvendo funções de funções e funções inversas. São também deduzidas as técnicas acerca das derivadas das funções elementares, como as funções logarítmicas, polinomiais, exponenciais e trigonométricas.

Em seguida, Fantappiè dedica um parágrafo para o desenvolvimento das noções relativas aos infinitésimos. Uma função $y = f(x)$ é definida como infinitésima, ou que é um infinitésimo no ponto a , quando tem limite zero para x tendendo à a . Considera-se implicitamente que a seja ponto de acumulação do campo de definição de $f(x)$.

A comparação entre ordens dos infinitésimos é caracterizado pelo limite do quociente entre esses. Dessa forma, sendo y_1 e y_2 dois infinitésimos define-se que, se o limite de $\frac{y_1}{y_2}$ para $x \rightarrow a$ for finito e não nulo, será dito que eles têm a mesma ordem.

Se o limite for nulo então y_1 é de ordem maior que y_2 . Se o limite for infinito, será dito que y_1 é de ordem menor que y_2 .

Daí, procura-se estabelecer uma “*aritmética análoga aos números*” com as ordens infinitesimais. Nesse intento, são estabelecidas relações entre as ordens infinitesimais que gozam das propriedades simétrica, reflexiva e transitiva, sendo concluído portanto que, as ordens infinitesimais formam um conjunto ordenado.

Em seguida, a partir do estabelecimento de operações envolvendo as ordens infinitesimais, conclui-se que “*com essas operações fica assim construída uma espécie de Aritmética análoga à dos números, mas com um diferença essencial, que verificaremos mais adiante: nesta nova Aritmética não é válido o Teorema de Arquimedes*” (São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.14)

Fantappié continua a desenvolver sua construção dos conceitos infinitesimais, estabelecendo as noções de infinitésimo principal, infinitésimos equivalentes e a introdução de ordens infinitesimais negativas, concluindo sua construção da teoria acerca dos infinitésimos.

O conceito de diferencial é discutido no parágrafo posterior, sendo definido por meio dos infinitésimos. Dessa forma, argumenta-se que a diferença $\frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = \varepsilon$ é um infinitésimo para $\Delta x \rightarrow 0$. Daí, fazendo $\varepsilon \Delta x = \alpha$, chega-se à equação que dará suporte à definição.

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha$$

Dessa maneira, a diferencial da função $f(x)$ no ponto x_0 será definido como o produto da derivada $f'(x_0)$ pelo acréscimo Δx da variável independente, sendo a diferencial indicada por meio da notação:

$$dy = df(x) = f'(x)dx$$

Logo a seguir, Fantappié enfatiza a relevância da caracterização do conceito de diferencial por meio dos infinitésimos. “*A propriedade mais importante da diferencial é a seguinte: a diferença entre o acréscimo da função e a sua diferencial correspondentes ao mesmo incremento dx da variável independente é sempre um infinitésimo de ordem maior que a de dx .*” (São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.17, GRIFO NO ORIGINAL)

Nesse ponto, após ter sido apresentada a interpretação geométrica da diferencial, cabe-nos destacar a concepção de Fantappié acerca da gênese do cálculo infinitesimal.

A construção do Cálculo Infinitesimal, como é universalmente aceita atualmente, baseia-se no método de Newton, que introduziu a derivada de uma função como limite da relação entre o acréscimo da função e o da variável independente, quando este último tende a zero. A concepção de Leibniz, que hoje está inteiramente abandonada, baseia-se na sua teoria filosófica – a Monadologia, Segundo essa teoria, toda curva é formada de uma quantidade infinitamente grande de segmentos retilíneos, cujas projeções sobre os eixos se designam com dx e dy sendo o coeficiente angular $\frac{dy}{dx}$ de cada um dos tais segmentos a derivada da função $y = f(x)$ que representa a curva. Do método de Leibniz se conservou o algortimo, por ser de manejo mais fácil, mas as quantidades dx e dy correspondem a conceitos inteiramente diferentes: dx é o acréscimo arbitrário da variável independente, e dy é o produto desse acréscimo pela derivada y' . (São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.18)

Após isso são enunciados e demonstrados teoremas gerais sobre as derivadas, envolvendo aspectos como continuidade, crescimento e decrescimento de funções, pontos onde a derivada se anula, valores extremos da função, entre outros. Em particular, demonstra-se o teorema de Rolle e o teorema de Cauchy ou dos acréscimos finitos.

O parágrafo seguinte trata acerca das chamadas regras de L'Hospital. De forma geral, as demonstrações das regras de L'Hospital são fortemente baseados no teorema de Cauchy ou dos acréscimos finitos, supondo que as funções $f(x)$ e $\varphi(x)$, relacionadas com o quociente $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, sejam deriváveis em um intervalo aberto contendo um determinado ponto a e que $\varphi'(x) \neq 0$ em todo o intervalo.

Já ao final da seção acerca das derivadas, Fantappié desenvolve um parágrafo refletindo acerca dos contatos entre curvas planas. O contato entre as curvas é caracterizado levando-se em consideração a ordem infinitesimal da diferença entre ordenadas e, a partir daí, estabelecem-se condições necessárias e suficientes para que seja exista um contato com determinada ordem.

O último tópico da seção sobre as derivadas versa sobre a Fórmula de Taylor. O problema é colocado de forma clara. A partir de uma função $f(x)$ definida num entorno de um ponto x_0 , procura-se um polinômio $\varphi(x)$ tal que a diferença $f(x) - \varphi(x)$ seja a menor possível nas vizinhanças de x_0 . Assim, demonstra-se que se $f(x)$ tem derivadas até a ordem n no entorno de x_0 , então será possível determinar um polinômio $\varphi(x)$ de

grau $n - 1$ tal que a diferença $f(x) - \varphi(x)$ seja um infinitésimo de grau maior ou igual que n , para $x \rightarrow x_0$.

Dessa forma, realiza-se a demonstração utilizando a teoria do contato de curvas e o teorema de Cauchy ou dos acréscimos finitos.

A última seção da fonte é dedicada a noção de integral. Desde o início, Fantappié evidencia sua intenção de fazer uma abordagem fazendo uso das inovações trazidas por Cauchy, Riemann e Peano.

Mas o conceito de integral, segundo os creadores desse calculo, era muito restricto e cedo depararam os matemáticos com problemas que necessitavam uma revisão completa da definição adotada. Essa revisão foi iniciada por Cauchy, sendo que a definição adotada na maioria dos compêndios é a de Riemann, com as modificações introduzidas por Peano. É esta também a que vamos expôr.

(São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.1)

A definição de integral parte de uma função $f(x)$ monódroma definida e limitada em um intervalo $a \vdash \dashv b$, sendo l e L os seus extremos inferior e superior nesse intervalo, sendo verdade portanto que:

$$l \leq f(x) \leq L$$

Daí, o intervalo é dividido de um modo qualquer em n intervalos parciais, sendo $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$. Dessa forma em cada um dos intervalos $x_{r-1} \vdash \dashv x_r$ a amplitude $h_r = x_r - x_{r-1}$ será um número positivo. Nesses intervalos a função admitirá extremos superior e inferior L_r e l_r e, assim, tem-se que:

$$l \leq l_r \leq L_r \leq L$$

A partir disso são definidas as somas superior e inferior da função relativas à divisão adotada.

$$S = \sum L_r h_r \quad \text{e} \quad s = \sum l_r h_r$$

Assim, partindo dessas definições e desigualdades chega-se a:

$$l \sum h_r \leq \sum l_r h_r \leq \sum L_r h_r \leq L \sum h_r$$

Considerando que $\sum h_r = b - a$, segue que:

$$l(b - a) \leq s \leq S \leq L(b - a)$$

Dessa última desigualdade conclui-se que tanto o conjunto de todas as somas superiores quanto o conjunto das somas inferiores são limitados superiormente e inferiormente. Portanto, esses conjuntos possuem extremos inferior e superior finitos, s_0 e S_0 . Daí, define-se s_0 como a integral inferior de $f(x)$ no intervalo $a \vdash \dashv b$, denotado por:

$$s_0 = \int_a^{\overline{b}} f(x) dx$$

De forma análoga, define-se a integral superior de $f(x)$ no intervalo $a \vdash \dashv b$, como S_0 e denotado por:

$$S_0 = \int_{\underline{a}}^b f(x) dx$$

Por fim, se a integral superior for igual a integral inferior então o seu valor comum será definido como a integral $f(x)$ entendida ao intervalo $a \vdash \dashv b$, sendo indicada por:

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

As reflexões continuam a serem feitas no sentido de serem estabelecidos novas caracterizações da integral e também de critérios de integrabilidade. O conceito de intervalo de máxima amplitude assume um papel importante nesse intento.

Nesse sentido, a argumentação segue considerando que, a partir de uma função $f(x)$ monódroma, limitada no intervalo $a \vdash \dashv b$, existe, ao menos, um intervalo de máxima amplitude μ . Dessa maneira, dado um número positivo $\mu < b - a$, existe uma infinidade de divisões em que a amplitude máxima será dada por μ . Existe, assim, uma soma inferior e uma soma superior, em cada uma das divisões, as quais podem ser

consideradas como funções políndromas de μ . Daí, enuncia-se e prova-se o chamado teorema de Darboux, o qual, de alguma forma, fornece um nova caracterização para o conceito de integral. “A integral superior S_0 é o limite da soma superior $S(\mu)$ quando a máxima amplitude μ tende a zero. Nas mesmas condições, a integral s_0 é limite da soma inferior” (São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.5, GRIFO NO ORIGINAL)

A caracterização é imediatamente reescrita em termos mais algébricos, como:

Em outras palavras, dado $\varepsilon > 0$ arbitrário, póde-se determinar em correspondência um número positivo σ tal que a qualquer divisão cuja amplitude máxima μ seja menor que σ corresponde uma soma superior S tal que

$$S_0 \leq S \leq S_0 + \varepsilon$$

E uma soma inferior s tal que

$$s_0 - \varepsilon < s \leq s_0$$

(São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.5)

A partir desse teorema, chega-se ao chamado critério de integrabilidade de Riemann.

A condição necessária e suficiente para que uma função limitada e definida num intervalo fechado $a \dashv\vdash b$ seja integrável nesse intervalo é que a soma $\sum \Omega_r h_r$ dos produtos das amplitudes dos intervalos parciais pelas oscilações correspondentes da função tenha limite 0, quando a máxima amplitude dos intervalos parciais tende a 0.

(São Paulo: FFCL/USP, [19--], p.6, GRIFO NO ORIGINAL)

O desenvolvimento da teoria acerca do conceito de integral segue por meio da demonstração de teoremas gerais sobre as integrais e também dos resultados envolvendo a integrabilidade de funções contínuas e monótonas. As diversas técnicas de integração são também bastante abordadas no texto.

A noção de convergência pode ser novamente percebida no texto no tópico que disserta acerca das integrais impróprias. Dessa forma, parte-se de uma função $f(x)$ definida e não limitada em um intervalo aberto $a \text{---} b$ e supõe-se que em todo intervalo $a \dashv\vdash x$, com $x < b$ a função seja limitada e integrável. Assim, sendo b ponto de acumulação pela esquerda, a função $F(x) = \int_a^b f(x)dx$ pode ter limite finito para x tendendo a b pela esquerda, que será chamado de integral imprópria da função $f(x)$ entre a e b , sendo indicado por:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(x)dx$$

Desta forma, quando o limite existe, diz-se também que a integral é convergente para $x \rightarrow b$.

Por fim são discutidos alguns parágrafos acerca das integrais abelianas, elípticas, binomiais e ainda sobre a integração das funções trigonométricas, antes de serem estudadas no apêndice da obra aspectos relacionados às funções hiperbólicas.

6.4 Algumas Conclusões

Indubitavelmente, o cenário constituído na subsecção das ciências matemáticas da FFCL após duas décadas de sua criação, passa diretamente pela atuação e influência de duas grandes escolas, a escola italiana e os bourbakistas.

A escola italiana, representada nesse contexto por meio das atuações de Fantappiè e Albanese, destacou-se não somente como a primeira grande influência, mas também pela inauguração de práticas de fortalecimento da pesquisa, como a realização dos seminários matemáticos, o trabalho contínuo com temas relevantes de pesquisa matemática e, em termos de ensino, uma abordagem atual dos conceitos básicos do cálculo, diferentemente daquela costumeiramente utilizada nos cursos da Escola Politécnica de São Paulo.

Fantappiè, após sua chegada ao Brasil, não assumiu somente a cadeira de Análise Matemática, mas também a cadeira de Geometria, a qual foi ocupada por Albanese, logo que chegou à USP, em 1936.

A cadeira de análise matemática foi ocupada por Fantappiè entre os anos de 1934 e 1939, tendo inicialmente como assistente Omar Catunda e, posteriormente Cândido Lima trabalhando juntamente com Omar Catunda na função de professor assistente.

Notemos que Catunda, assumindo a função de assistente logo a partir da chegada de Fantappiè, foi professor do próprio Cândido Lima, o qual também tornou-se assistente a partir de 1937 e, ainda de Edilson Farah e Jacy Monteiro, licenciados respectivamente, em 1941 e 1943.

Após o retorno de Fantappiè para a Itália, em 1939, a cadeira de análise matemática foi ocupada por Omar Catunda, durante um longo período, até 1963, tendo Cândido Lima como assistente no período de 1940 à 1942 e, no período posterior, o professor Edilson Farah.

Lima (2012) ressalta que, a tradição estabelecida por meio da atuação de Catunda à frente da cadeira de análise matemática, expressa uma forte tradição implementada tanto pela escola italiana, quanto pela escola de Bourbaki, a consistente vinculação entre as atividades de ensino e pesquisa.

O início da regência de Omar Catunda na cadeira de análise matemática, ainda como professor inteirino, delineou outra peculiaridade. Tal regência marcou o início da transição e a formação de uma nova comunidade de matemáticos brasileiros, a qual exerceria suas atividades de ensino imbricadas com as da pesquisa, em conformidade com o que era preconizado tanto pela escola italiana como pela escola bourbakista, que nesse ponto convergiam muito fortemente. (LIMA, 2012,p.202-203)

Quadro 17: Professores da disciplina de Análise Matemática da FFCL entre 1934 e 1963

Cadeira de Análise Matemática da FFCL		
Professor da Cátedra	Período	Professor Auxiliar
Luigi Fantappiè	1934-1939	Omar Catunda e Cândido Lima
Omar Catunda	1940-1942	Cândido Lima
Omar Catunda	1942-1963	Edilson Farah ¹⁵²

A disciplina de Análise Superior aparece como uma cadeira criada para o terceiro ano e com esse nome específico apenas em 1942, sendo assumida nesse ano por Cândido Lima. Em verdade, dentro do que foi levantado por Lima (2012) é conjecturado que tal disciplina estava subjacente nos estudos da análise matemática (3ª parte), presente na grade curricular da subsecção das ciências matemáticas desde 1934 para ser ministrada no 3º ano. Segundo registros estudados por Lima (2012), nos anos

¹⁵² Não sabemos ao certo até que ano Edilson Farah permaneceu como assistente da referida cátedra.

de 1943 e 1944 a disciplina esteve sob responsabilidade de Omar Catunda, tendo como assistente Edilson Farah.

Andre Weil ocupou inteiramente a referida cátedra entre os anos de 1945 e 1947, também tendo como assistente Edilson Farah. Após a partida de Weil, Farah foi contratado para assumir a cátedra, até que em 1954 prestou concurso para a mesma cadeira, apresentando a tese intitulada *Algumas proposições equivalentes ao axioma da escolha*.

Quadro 18 - Professores da disciplina de Análise Superior da FFCL

Cátedra de Análise Superior da FFCL		
Professor da Cátedra	Período	Professor Assistente
Cândido Lima	1942	
Omar Catunda	1943-1944	Edilson Farah
André Weil	1945-1947	Edilson Farah
Edilson Farah	1948-1954 ¹⁵³	

No tocante à cadeira de Geometria, tanto Fantappiè quanto Albanese foram seus responsáveis, durante determinado período. Até a chegada de Albanese, em 1936, o qual já possuía sólida carreira profissional dedicada aos estudos da geometria, Fantappiè acumulou as cátedras de geometria e de análise matemática.

Quadro 19: Professores da disciplina de Geometria da FFCL

Cátedra de Geometria da FFCL		
Professor da Cátedra	Período	Professor Assistente
Luigi Fantappiè	1934-1936	
Giacomo Albanese	1936-1942	Benedito Castrucci

Conforme já explicitado, com a saída de Albanese, em 1942, a cadeira de geometria foi dividida em duas outras, a primeira intitulada como Complementos de Geometria e Geometria Superior e a segunda como Geometria Projetiva e Descritiva, imediatamente assumida por Benedito Castrucci.

¹⁵³ Não sabemos ao certo até quando Edilson Farah permaneceu como professor da cátedra. O ano de 1954 é marcado pelo momento em que Farah presta concurso para a referida cátedra002E

Quadro 20: Professores da disciplina de Complementos de Geometria e Geometria Superior da FFCL

Cátedra de Complementos de Geometria e Geometria Superior da FFCL		
Professor da Cátedra	Período	Professor Assistente
Omar Catunda	1942	
Cândido Lima	1943-1958	Jacy Monteiro

Nesse ponto, em termos da influência exercida por meio do trabalho da escola italiana na FFCL, cabe-nos salientar que os bourbakistas, ao chegarem no Brasil a partir de 1945, encontraram um ambiente que já possuía um grupo permanente de professores, por um lado, influenciados pelo trabalho desenvolvido pelos italianos e, por outro lado, já com um perfil de pesquisadores.

Temos assim, nesse momento, uma interação dos matemáticos bourbakistas, em sua maioria franceses, com um grupo permanente de professores formados pela escola italiana.

Por outro lado, devemos registrar que além da atuação dos bourbakistas em cursos regulares da FFCL, como André Weil, vários outros bourbakistas tiveram atuação ativa por meio da ministração de palestras, conferências e cursos de extensão sobre variados assuntos, conforme podemos visualizar no quadro abaixo.

Quadro 21: Professores bourbakistas que atuaram em cursos na FFCL.

Professor Responsável	Período	Cursos	Professores Assistentes
Oscar Zariski	1945	Álgebra Moderna Introdução à Geometria Algébrica	Jacy Monteiro
Jean Dieudonné	1946-1947	Álgebra Moderna	Jacy Monteiro
Jean Delsarte	1948-1951	Espaços Vetoriais Topológicos Teoria da Integração Hipergrupos e Álgebras de Lie	
Alexandre Grothendieck	1953-1954	Espaços Topológicos Vetoriais	

Notemos ainda que, conforme salienta Lima (2012), dentre a equipe de professores permanentes existiram aqueles que tiveram a sua formação matemática em

completo contato com a tradição italiana, construindo também suas respectivas carreiras dentro dos princípios dessa escola, como por exemplo, Omar Catunda e Benedito Castrucci, já outros, como Cândido Lima, voltaram suas pesquisas mais direcionados aos princípios da escola bourbakista. E, ainda outros, como Edilson Farah e Jacy Monteiro que trabalharam diretamente como assistentes dos bourbakistas, o primeiro com Andre Weil e o segundo com Zariski e Jean Dieudonné, desenvolvendo suas atividades matemáticas dentro dos parâmetros tecidos pela escola bourbakista.

Em termos da formação matemática dos professores assistentes da subsecção de ciências matemáticas da FFCL, cabe-nos destacar que, além de praticamente todos eles terem realizado intercâmbios em países europeus e nos Estados Unidos, receberam títulos de doutores em ciências, após terem feito defesas públicas das respectivas teses. O caso de Omar Catunda configura-se como exceção, uma vez que, não defendeu uma tese de doutoramento para a obtenção do título, mas obteve o título de doutor e de livre-docência após ter sido aprovado no concurso de análise matemática, em 1944, defendendo uma tese intitulada “*Sobre os fundamentos da teoria dos funcionais analíticos*”.

Cândido Lima doutorou-se em novembro de 1942, defendendo a tese “*Sobre a regularidade dos funcionais definidos no campo das funções localmente analíticas*”. Benedito Castrucci, no ano seguinte, também obteve seu título após a defesa da tese “*Sobre uma nova definição de cúbica plana*”. Em dezembro de 1950, Edilson Farah defendeu sua tese intitulada “*Sobre a medida de Lebesgue*”. E, no ano seguinte, Jacy Monteiro defendeu a tese “*Sobre as potências simbólicas de um ideal primo de um anel de polinômios*”

Em tempo percebamos que, assim como aconteceu com os italianos, os professores assistentes que trabalharam de perto com os bourbakistas permaneceram como professores na FFCL, influenciando gerações de alunos, tanto nas aulas ministradas, quanto em obras escritas que tornaram-se referência posteriormente.

Dessa forma, cabe-nos notar que tanto a tradição italiana, quanto a tradição bourbakista continuaram com professores permanentes que continuaram a trabalhar dentro dos princípios estabelecidos pelas respectivas tradições, ou ainda, como temos chamado à atenção, com uma simbiose entre as mesmas, com forte vinculação entre ensino e pesquisa.

7. Considerações Finais

“ (...) *tinha uma pedra no meio do caminho.*”
Carlos Drumond de Andrade

A partir das reflexões tecidas nos capítulos anteriores, empreendemos um esforço na construção de um espectro que nos permita visualizar como se deu a dinâmica da consolidação de uma comunidade matemática, que outrora somente atuava como receptora.

Dessa forma, apresentamos nesse último capítulo o fruto desse empreendimento, além de um forte traço de recepção encontrado no processo de transmissão dos conceitos básicos da análise.

7.1 Um caso de recepção: a trindade

Conforme já explicitado, durante um extenso período não se sabe ao certo quais foram os livros-textos de cálculo usados na Academia, tornando ainda mais relevantes os vestígios obtidos por meio da análise das teses de doutorado apresentadas à Escola Militar a partir de 1847.

Dessa maneira, cabe-nos destacar importantes elementos obtidos após a análise da dissertação “*O Methodo dos Limites e dos Infinitamente Pequenos*” defendida por João Ernesto Viriato de Medeiros.

Medeiros expressa sua concepção acerca da existência de uma dualidade, tendo como extremos os conceitos desenvolvidos por Newton e Leibniz. Nessa linha de raciocínio, os autores dos livros-textos passaram a posicionarem-se em um dos dois extremos da dualidade Newton/Leibniz, gerando ainda outra oposição acerca dos métodos vinculados a cada um dos polos.

Dentro desse quadro, o cálculo fluxional de Newton teria gerado o chamado método dos limites e o cálculo leibniziano originado o método dos infinitamente pequenos.

Diante disso, temos um indício de um elemento de recepção, a saber, o entendimento relativo à forte oposição e contraposição dos métodos do cálculo diferencial. Nesse sentido, a dissertação de Medeiros, apresentada em 1850, constituiu-se como um primeiro registro histórico acerca desse elemento.

O ponto de vista expresso por Manoel Maria Pinto Peixoto através da apresentação de sua dissertação “*Estudo dos Princípios do Cálculo Diferencial*”, em 1853, também apresenta um novo olhar acerca dos métodos.

Peixoto direciona seu trabalho tecendo comentários não somente ao método dos limites e ao método infinitesimal, mas também ao chamado método de Lagrange. “*Por três diferentes methods se pode introduzir as differenciaes na formação de expressões mathematicas que dão a solução dos problemas, e são: methodo dos limites, o infinitesimal, e das funcções derivadas de Lagrange*” (PEIXOTO, 1853, p.29)

Entretanto, diferentemente de Medeiros, não optou-se por fazer uma direta contraposição entre os métodos, mas, ao contrário, a concepção apresentada era a de que os três métodos constituíam-se essencialmente em um só. “*Estes diferentes methods não são propriamente fallando senão um só e mesmo methodo considerado debaixo de diferentes pontos de vista.*” (PEIXOTO, 1853, p.45)

Assim, cabe-nos notar que, nas duas dissertações temos uma grande ênfase na apresentação, discussão e contraposição dos métodos utilizados no cálculo diferencial, salientando, de alguma maneira, a possível importância relativa ao trabalho com os métodos dentro do ambiente da Escola Militar.

Nessa linha, a partir da concepção de Peixoto, devemos destacar a visão apresentada por Boucharlat, que entendia os três métodos como sendo fundamentalmente o mesmo método.

Podemos então considerar esses três métodos como sendo somente um. Além disso, comparando-os, reconhecemos que os princípios que emanam deles são comuns, e que devemos, para entendimento de todos, ajuntar poucas coisas para os limites.¹⁵⁴
(BOUCHARLAT, 1858, viij, TRADUÇÃO NOSSA)

Em tempo, ressaltamos que, por um lado, a obra de Boucharlat constituiu um dos pontos de acumulação, nos parâmetros adotados nesta tese e, por outro lado, seu nome é citado explicitamente na dissertação de Medeiros. Dessa forma, lembrando ainda que, sua concepção acerca dos métodos é próxima das concepções apresentadas

¹⁵⁴ On peut donc considérer ces trois méthodes comme n'en formant pour ainsi dire qu'une seule; aussi, en les comparant, reconnait-on que les principes qui en découlent leur sont communs, et qu'il ne faut, pour les entendre toutes, qu'ajouter très peu de chose à celle des limites.

nas dissertações, acreditamos ter elementos para entender que a obra de Boucharlat teve significativa importância no processo de transmissão para o Brasil.

Dentro desse contexto, devemos destacar a visão de que os três métodos são diferentes faces de um único método, constituindo, dessa forma, uma “trindade”.

Nesse sentido, lembremos que a trindade no sentido exposto por Boucharlat possui também um caráter de complementariedade.

Dessa forma, entendemos que a visão expressa por Peixoto pode ser considerada como um primeiro registro de recepção da trindade, todavia, nessa linha de raciocínio, já recepcionado com uma mudança na gênese, uma vez que, a trindade expressa por Peixoto não possui o caráter de complementariedade de Boucharlat.

A contraposição entre os métodos do cálculo diferencial parece também ter sido uma prática constante no desdobramento da Escola Militar. No próprio discurso de inauguração da Escola Central deixa-se claro que a comparação entre os métodos atribuídos à Leibniz e à Newton seria objeto de estudo nas aulas de cálculo diferencial e integral.

Comparareis o *Calculo de Leibniz*, que tem por objeto a differença das grandezas infinitamente pequenas com o METHODO DAS FLUXÕES de *Newton* e tomarei ainda hoje parte nessa grande questão que dividio o mundo scientifico e estimulou o amor proprio da Inglaterra e de Allemanha.

(MOREIRA, 2014, p.241-242, GRIFO NO ORIGINAL)

As teses de doutorado apresentadas na Escola Central também apresentaram concepções acerca da trindade. A tese apresentada por Fellippe Aché, em 1862, expressa o entendimento de que os métodos diferem apenas por uma questão de linguagem.

Sem querer arrogar-nos o merito de invenção, não podemos deixar de completar esta exposição, apresentando o pensamento de que como Freycinet, nos parece que a **diferença essencial entre methodos não é realmente senão uma questão de linguagem**, seria mais racional adoptar um methodo que abrangesse os três, partiindo das ideias de Leibniz como primordiaes, abrangendo as lições do methodo de Newton sem desprezar o rigor do de Lagrange.

(ACHE, 1862, p.8, GRIFO NOSSO)

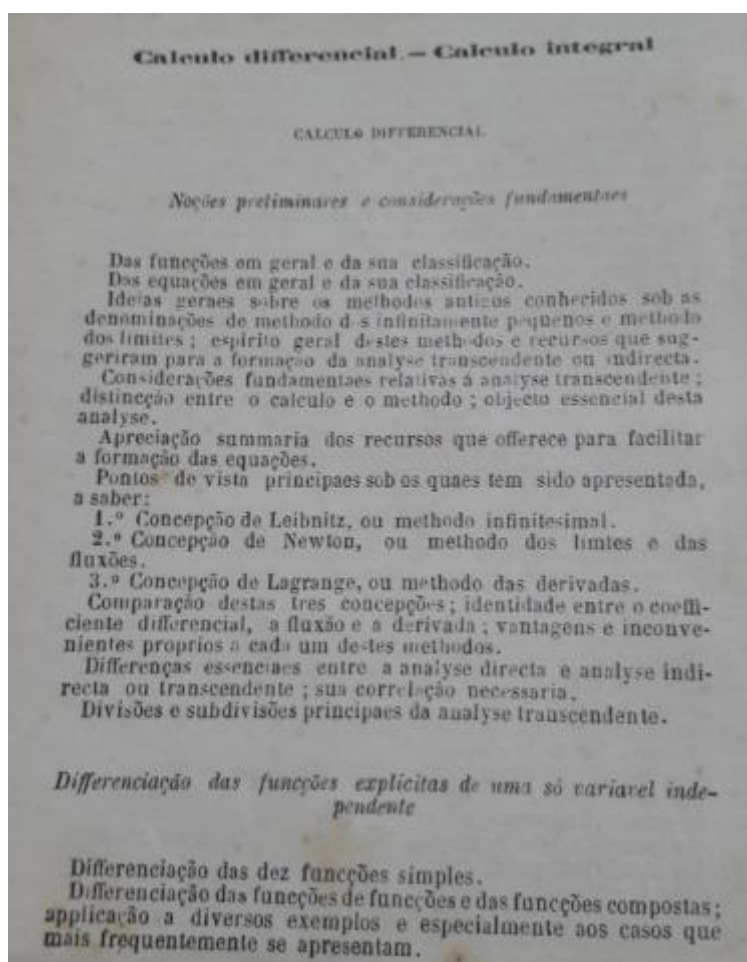
Assim, temos visto vários momentos em que a concepção acerca da trindade, se torna manifesta por meio de diferentes registros.

Por outro lado, devemos lembrar que, embora os positivistas tenham tecido críticas acerca dos métodos do Cálculo Diferencial, eles consideravam os diferentes métodos como métodos equivalentes.

Dessa forma, devemos considerar a hipótese de que a materialização da trindade no processo de recepção, pode estar relacionado também com o processo de recepção dos conceitos transmitidos acerca da filosofia positivista.

Nesse sentido, o programa de ensino referente à disciplina de Cálculo Diferencial e Integral da Escola Politécnica do Rio de Janeiro, em 1886, constitui um primeiro registro da institucionalização do trabalho com os métodos de Newton, Leibniz e Lagrange dentro das disciplinas ministradas nas Escolas de Engenharia.

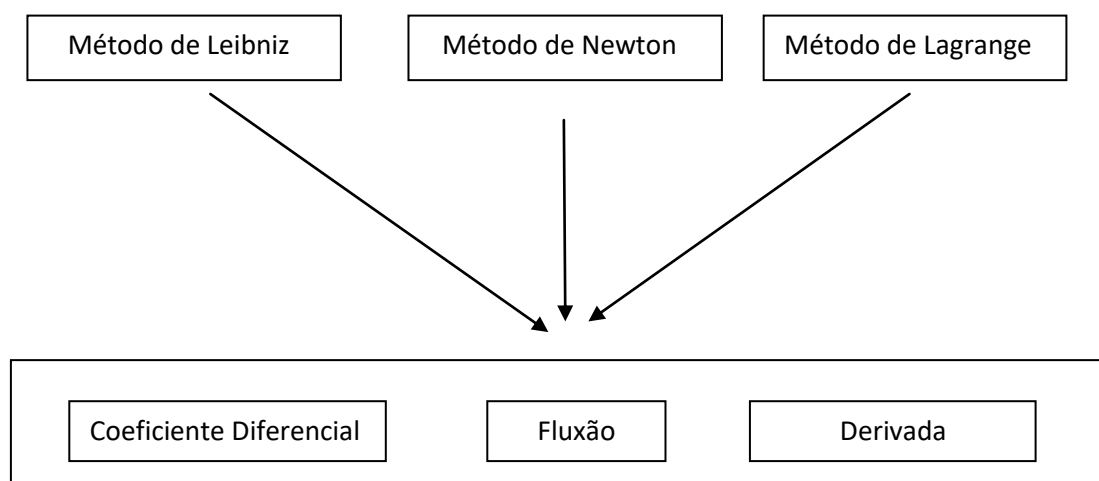
Figura 56: Programa de Cálculo Diferencial e Integral da EPRJ – 1886 [BOR 1]



Notemos que, o próprio programa deixa claro que os métodos devem ser comparados, no intento de buscar identificar vantagens e desvantagens relativas à cada um deles.

Em particular, percebamos que o programa não deixa a unidade entre os métodos evidente, senão por meio da identidade entre os conceitos de coeficiente diferencial, fluxão e derivada.

Podemos entender que, a trindade implementada no programa da EPRJ reveste-se inicialmente de um caráter de comparação entre os métodos, assumindo posteriormente uma identidade entre os conceitos advindos de cada um desses, a saber, coeficiente diferencial, fluxão e derivada, conforme esquema a seguir.



O trabalho institucionalizado com os métodos não se restringiu somente à Escola Politécnica do Rio de Janeiro, mas, ao contrário, também foi uma prática implementada desde os primeiros programas relativos ao ensino do Cálculo na Escola Politécnica de São Paulo.

O primeiro professor da cadeira referente ao ensino de Cálculo Diferencial e Integral na Escola Politécnica de São Paulo foi Urbano de Vasconcellos, engenheiro formado pela Escola Politécnica do Rio de Janeiro, fato esse que, talvez, possa explicar a migração da prática estabelecida no Rio de Janeiro para a recém-inaugurada Escola Politécnica de São Paulo, prática, a qual, perdurou por aproximadamente quatro décadas.

A partir de 1901, no programa da Escola Politécnica de São Paulo, o método da exaustão foi adicionado aos tradicionais métodos já existentes. Na visão exposta nas

anotações de Goulin, o método da exaustão constitui a base do cálculo diferencial, “como elles tinham estudado as formas planas tornaram-nas como auxiliares para o estudo das formas curvas. Elles constituíram, portanto, a base do Cálculo differencial porque introduziram os polygonos para estudar uma circunferência de círculo” (GOULIN, 1904, p.6)

A análise do manuscrito concebido pelo aluno Adriano Goulin, em 1904, evidencia o efetivo trabalho com os métodos nas aulas de cálculo diferencial ministradas na EPSP.

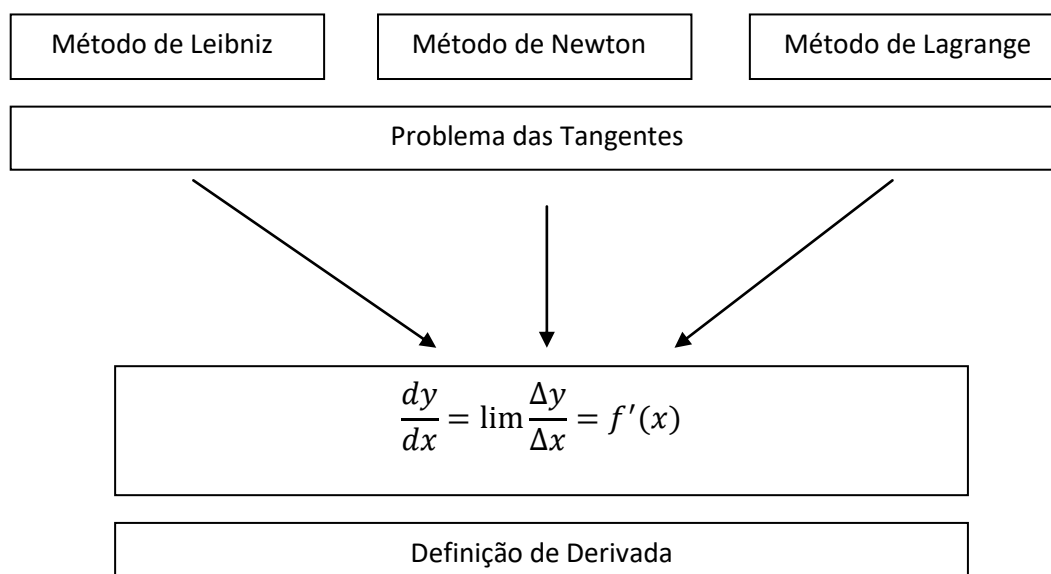
Na concepção evidenciada na referida fonte, os três métodos conduziram ao mesmo resultado, a definição de derivada.

O fim dos três methods é facilitar o estabelecimento das equações, porém, todos elles conduzirão ao mesmo resultado? Conduzem e é o que nos indica o problema das tangentes. Vamos mostrar analyticamente e por meio da última fórmula que esses methods são idênticos. (GOULIN, 1904, p.12)

Dessa maneira, expressa-se o entendimento de que os três métodos conduzem ao mesmo resultado e que possuem a mesma identidade, sendo, nessa visão, equivalentes. Nesse contexto, a identidade entre os métodos é expressa por meio da relação:

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Assim, temos um diagrama representando o entedimento da trindade estabelecido como prática na EPSP.



A partir do entendimento estabelecido por Boucharlat acerca da trindade, temos notado, em variados registros, a presença dessa concepção.

Os registros iniciais encontrados nas teses de doutorado apresentadas à Escola Militar já apontam nessa direção, ora enfatizando a explícita contraposição entre os métodos, ora concebendo-os como partes de um mesmo método.

Considerando isso, conforme já explicitado nesse próprio capítulo, temos fortes elementos que apontam para a transformação da visão trazida pelos receptores no Brasil, acerca da trindade, e mesmo estendendo a transformação, por meio da adição de um quarto método.

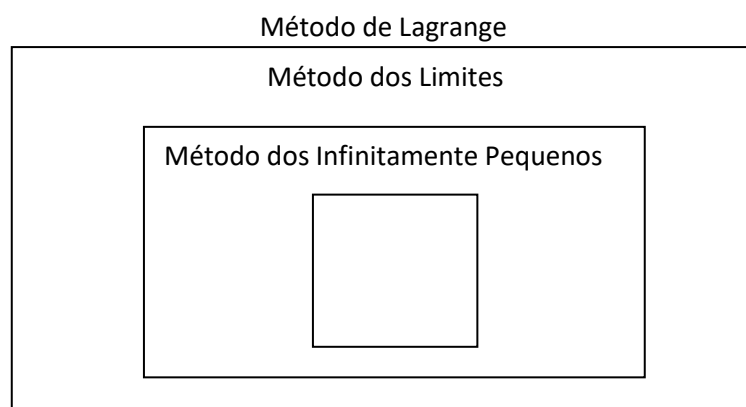
Dessa forma, tal concepção recepcionada no Brasil, passa a ser estabelecida como prática, pelo menos, desde 1886, quando foi institucionalizada no programa da Escola Politécnica do Rio de Janeiro e, posteriormente, na Escola Politécnica de São Paulo.

No entanto, devemos salientar nosso entendimento de que, no processo de recepção, a prática consolidada nos currículos brasileiros sofreu transformações na comparação com o conceito original transmitido por meio da obra de Boucharlat.

Diante disso, devemos pontuar que na visão exposta por Boucharlat, por um lado, os três métodos eram fundamentalmente um mesmo método e, por outro lado, eles se complementaram, ou mesmo, em um certo sentido, se completavam, uma vez que, *“se o método dos limites completa o dos infinitamente pequenos, corrigindo o que pode ser defeituoso, o método de Lagrange completa o dos limites e o ciclo, relacionando os coeficientes diferenciais com a Álgebra pura”*¹⁵⁵ (BOUCHARLAT, 1858, vij, TRADUÇÃO NOSSA)

Nessa visão original, podemos conceber o seguinte diagrama no tocante à visão original estabelecida por Boucharlat.

¹⁵⁵ Si la méthode des limites complète celle des infiniment petites, en rectifiant de qu'il peut y avoir de défectueux dans cette dernière, la méthode des Lagrange complète à son tour celle des limites, en rattachant les coefficients différentiels à la pure Algèbre.



Por outro lado, poderíamos tentar refletir acerca dos motivos que teriam levado a unificar métodos, os quais, a priori, constituem-se em diferentes concepções. Nesse exercício de raciocínio, não devemos deixar de ter em mente de que a formação matemática superior oferecida se destinava integralmente à formação de engenheiros.

Assim, por um lado, imaginamos que a unificação dos métodos do cálculo diferencial, buscava adotar uma concepção não problemática no que tange aos fundamentos e, por outro lado, ser útil na costumeira prática de aplicação dos conceitos matemáticos na formação de engenheiros.

Dessa forma, lembremos que poderiam ser adotadas várias estruturas dos livros-textos franceses, mas escolheu-se justamente aquele que optava por uma unificação dos métodos.

Nesse sentido, a recepção da trindade não contribuiu relevantemente para o estabelecimento das próprias produções, uma vez que, a concepção principal convergiu para o que já estava estabelecido em livros-textos franceses.

Isto posto, temos entendido que a concepção da trindade de Boucharlat foi transmitida para a realidade brasileira, por um lado, sendo estabelecida como prática durante mais de quatro décadas e, por outro lado, tendo experimentado transformações no processo de recepção, quando comparado com o conceito original. No intento de percebermos isso, basta observarmos os diferentes diagramas que representam um entendimento acerca da concepção original e das concepções implementadas no ensino de cálculo no Brasil.

7.2 Da recepção à própria produção

A vinda da família real portuguesa, em 1808, indubitavelmente foi um episódio singular na história do Brasil. Em termos do progresso científico, a chegada da família imperial trouxe uma nova oxigenação, uma vez que, por um lado, as atividades científicas na colônia eram tolhidas pela coroa portuguesa e, por outro lado, dentro dessa nova realidade, várias demandas advindas da necessidade de estabelecimento da corte estabeleceram uma dinâmica no sentido de uma maior movimentação na cultura científica brasileira.

Esta tese tem conseguido realizar uma pesquisa sobre o desenvolvimento da análise nas instituições do ensino superior em todo o Brasil e assim conseguido estabelecer a primeira vez uma identificação completa destes desenvolvimentos. Um dos resultados notáveis consiste na identificação da Escola de Minas de Ouro Preto como uma de tais instituições. A nossa investigação mostrou a longa permanência da formação de engenheiros como função deste ensino da matemática superior. Como exposto no capítulo 1, no Brasil no século XIX nunca foram estabelecidas instituições análogas por exemplo às *Facultés des Sciences* na França e em particular nenhuma instituição para a formação de professores para os colégios. Tal formação foi deixada à iniciativa própria. Instituições para a formação de professores foram em países europeus a base para um ensino da matemática pura e assim um incentivo para iniciar a pesquisa. Tal função de formar professores foi institucionalizado no Brasil desde e dentro das universidades - quer dizer à partir dos anos 1920/30. À seguir vamos dar uma sistematização dos desenvolvimentos em etapas.

Nesse contexto, com a fundação da Academia Real Militar, vários livros-textos clássicos de matemática foram traduzidos por meio dos lentes da Academia. Dessa forma, podemos indicar tais traduções, além de alguns artigos escritos em jornais e periódicos brasileiros como as primeiras atividades matemáticas no Brasil, a partir de 1810.

Dentro desse quadro, entendemos que a análise do manuscrito compilada pelo aluno Manoel José de Oliveira (1788-1838) nos fornece importantes indícios acerca das primeiras aulas de cálculo diferencial e integral em solo brasileiro.

Dessa forma, apesar das aulas basearem-se no livro-texto de Lacroix pudemos identificar elementos que distoavam da prática comum estabelecida nessa obra, como o “cálculo com zeros” e a simbolização dos logaritmos por meio da notação “ $\mathcal{L}$ ”.

Assim, nesse primeiro momento de implantação da Academia, vemos sinais de permanência de uma tradição já anteriormente estabelecida, possivelmente tendo alguma influência dos trabalhos de Euler, concomitantemente com o estabelecimento de uma nova realidade, por meio do ensino baseado no “*Tratado Elementar*” de Lacroix.

Por outro lado, cabe-nos destacar a obra escrita por José Saturnino da Costa Pereira, em 1842, baseada na tradução do “*Tratado Elementar*” de Lacroix, consistindo a primeira produção própria, referente ao Cálculo, no Brasil.

Nesse sentido, cabe-nos identificar alguns indícios de elementos de recepção na análise do texto de Saturnino, destacando, em especial, as abordagens tecidas por meio do conceito de função.

Dessa forma, nos três primeiros quartos no século XIX as atividades matemáticas estiveram em torno da única escola de engenharia existente no país. Na segunda metade do século XIX, devemos perceber uma maior movimentação nas atividades acadêmicas, por conta da instauração do doutorado em Ciências Matemáticas.

De fato, várias dissertações foram apresentadas acerca de variados temas, dinamizando um pouco mais o ambiente acadêmico, sendo algumas dessas sobre assuntos relacionados à matemática, conforme já devidamente disposto.

No entanto, a partir desse contexto e com a efetiva influência da filosofia positivista na Escola Politécnica do Rio de Janeiro, devemos pontuar, por um lado, que não notamos movimentos relevantes que impulsionassem profundamente as atividades matemáticas durante os três primeiros quartos do século XIX, e, por outro lado, que os relatos acerca da situação da EPRJ por ocasião da influência positivista, davam conta de que o ambiente acadêmico na EPRJ era infrutífero, constituindo um verdadeiro obstáculo ao desenvolvimento da matemática, sob o olhar de cientistas como Lélío Gama, por exemplo.

Sentiamo-nos, assim, inteiramente privados de qualquer orientação. Otto de Alencar, espírito matemático mais evoluído, que conseguira desvencilhar-se da bússola positivista, falecia no mesmo ano de nosso ingresso na Escola. E foi assim que tivemos que enfrentar, de corpo e alma, as angústias do autodidatismo. (GAMA, 1965, p.26)

Nesse ponto, cabe-nos destacar a influência positivista na Escola Politécnica do Rio de Janeiro como um marco, no intento de estabelecermos uma demarcação das

etapas definidas ao longo do processo de transmissão culminando com o momento da consolidação da própria comunidade matemática.

Nessa linha de raciocínio, temos entendido que uma primeira etapa foi constituída desde a fundação da Academia Real Militar, em 1810, até a consolidação da influência da filosofia positivista, no contexto da Escola Politécnica do Rio de Janeiro, no último quarto do século XIX.

Dessa maneira, temos percebido uma certa linearidade em termos da produção matemática no referido período, dinamizado apenas por meio do ensino para os futuros engenheiros e, por meio da institucionalização do Doutorado em Ciências Matemáticas na Escola Militar e, posteriormente na Escola Central.

Assim, a segunda etapa do processo consistiu exatamente nas atividades desenvolvidas durante o período de influência do positivismo na EPRJ. Entretanto, devemos expressar nosso entendimento, de que a influência da filosofia comtiana poderia ter se consolidado como uma etapa decisiva para o estabelecimento da própria produção. Contudo, tal fato acabou não se concretizando, apesar de terem sido produzidas algumas obras com orientação positivista, conforme já analisado nessa tese.

A forte reação ao positivismo inaugurou uma terceira etapa do processo de transmissão constituindo-se como um novo marco no que tange ao desenvolvimento da matemática no Brasil.

Nesse contexto, Otto de Alencar Silva, protagonista do processo de superação da filosofia positivista, já mantinha contatos com renomados matemáticos europeus como Francisco Gomes Teixeira, Darboux e Poincaré, fato esse, importante para uma comunidade que almejava produzir as próprias pesquisas.

A luta de Otto de Alencar Silva para o estabelecimento de uma nova prática não se deu apenas pelo esforço de estabelecer contatos além-mar, mas pelo esforço em adquirir livros e revistas especializadas dos Estados Unidos e dos países europeus, procurando consolidar, dessa maneira, um suporte adequado para consolidação das próprias pesquisas.

Dessa forma, a partir do novo horizonte traçado, uma nova geração de matemáticos como Amoroso Costa, Theodoro Ramos e Lélío Gama, ainda trabalhando praticamente como auto-didatas, destacaram-se por continuarem a desbravar o novo caminho que levaria à consolidação das próprias produções.

Diante disso, destaquemos a atuação desses atores no sentido de conseguirem estabelecer um pequeno núcleo dentro de uma estrutura totalmente voltada para a formação de engenheiros.

Nesse sentido, essa terceira etapa pode ser caracterizada por meio da formação e consolidação de um núcleo. Ademais, devemos destacar que, não obstante ser um contexto de formação de engenheiros estabelecendo uma própria maneira de alcançar o desenvolvimento científico, por meio da busca de literatura apropriada, por um lado, e por meio das comunicações tecidas com renomados matemáticos, por outro lado, a formação do referido núcleo foi permeada por um caráter de autodidatismo.

Desse jeito, a contar da instauração de novas práticas, conflitantes com as anteriores, esse novo núcleo, estabelecido dentro de uma estrutura desfavorável, tornou-se um elemento chave para o estabelecimento de uma nova estrutura, a partir da fundação das universidades.

A partir daí, entendemos que a pavimentação desse novo contexto foi delineando-se continuamente, principalmente, por meio do árduo trabalho dessa geração de matemáticos outrora citada.

Cabe-nos salientar ainda que, os caminhos tecidos no caso brasileiro parecem ser revestidos de um certo ineditismo, uma vez que, temos uma estrutura permitindo um rumo completamente diferente daquele que seria tecido pelo desenvolvimento normal da engenharia tradicional.

A quarta e decisiva fase do processo de transmissão tem como marco a fundação das universidades no Brasil.

Nessa linha, a fundação da FFCL na USP trouxe uma enorme contribuição para o estabelecimento de uma nova realidade científica no Brasil, por meio da atuação da Missão Italiana em São Paulo e, posteriormente, no Rio de Janeiro.

Devemos ressaltar que, fica notável que os responsáveis pela criação das primeiras Universidades não acharam adaptado chamar matemáticos destes núcleos, mas acharam necessário contratar professores estrangeiros para incentivar o “take-off” e finalmente consolidar um núcleo que pudesse conceber as próprias produções.

Ademais, além do efetivo trabalho implementado, do oferecimento de ricas oportunidades de intercâmbio e da implantação de uma nova dinâmica acadêmica, principalmente por meio dos seminários matemáticos, a Missão Italiana também efetivou-se como um instrumento da política fascista de expansão, contribuindo para a

consolidação de um projeto político imperialista, no sentido da noção de imperialismo cultural.

Por outro lado, devemos destacar que, os núcleos estabelecidos na etapa anterior consolidaram-se definitivamente como um núcleo nas universidades, especialmente na FNF_i, dentro da nova estrutura estabelecida, a qual finalmente foi consubstanciada como terreno fértil para a produção das próprias produções e consolidação da comunidade matemática local.

Por fim, entendemos que as etapas apresentadas e estudadas na presente tese apresentam-se como uma razoável explicação para a longa dinâmica de formação de uma própria comunidade matemática.

Isto posto, a partir da escolha de nosso percurso, não viemos à apresentar, o caminho, mas um caminho, caminho não linear, caminho traçado por incontáveis tramas.

Enfim, eis o nosso caminho.

Referências Bibliográficas

Fontes

ARQUIVO NACIONAL

Série Educação – Códice IG³5 – Academia Real Militar [ANRJ 1]

Série Educação – Códice IG³265 – Ofícios Escola de Minas 1876 a 1878. [ANRJ 2]

Série Educação - Códice IE³132 – Concursos Escola de Minas 1886 a 1888 [ANRJ 3]

Série Educação – Códice IE²78 – Programas da Escola Central – 1858 [ANRJ 4]

ARQUIVO PERMANENTE DA ESCOLA DE MINAS

Alunos – Classificação: AlunosProvasMatemática - 1893(caixa-arquivo)Caderneta de Professor - Cálculo Infinitesimal. Classificação: CPCalcInfinitesimal-1893/1894 [APEM 1]

Caderneta de Professor - Matemática. Classificação: CPMatematica-1887/1889 [APEM 2]

Caderneta de Professor - Cálculo Infinitesimal. Classificação: CPCalcInfinitesimal-1902/1909 [APEM 3]

ARQUIVO DA EIDGENÖSSISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE, ZÜRICH (SUIÇA) [AETH]

EZ_Rek_1/1/387 Matrikel lautend auf den Studenten Paul de Souza, Ant. Francisco von Itu Prov. St Paulo (Brasilien), Eintritt notiert mit: 10.1861 (Abteilung: II), Austritt notiert mit: 2.4.1863 [AETH I]

ARQUIVO DA TECHNISCHE UNIVERSITÄT KARLSRUHE (ALEMANHA) [AKIT].

10001, 1644: Technische Hochschule Karlsruhe, "Einschreibebücher der Studierenden", Band 2: Studienjahre 1860/61 bis 1865/66. Jahresbericht für das Studienjahr 1866/67. [AKIT I]

21003, 2; Heft 2: Einschreibebuch der Schüler, Studienjahr 1864/65, Neuimmatrikulierte. [AKIT II]

21003, 2; Heft 1: Einschreibebuch der Schüler, Studienjahr 1865/66, Rückmelder. [AKIT III]

BIBLIOTECA DE OBRAS RARAS DA UFRJ

Programmas da Escola Polytechnica do Rio de Janeiro 1896 – 1898 [BOR1]

BIBLIOTECA NACIONAL DO RIO DE JANEIRO. SEÇÃO DE MANUSCRITOS.

Mathematicas puras: anotações. Código I-47,6,6. [BNRJ 1]

Caderno de Geometria, Álgebra e Cálculo Integral, escrito por Lúcio Correa e Castro. Código 06,2,008. [BNRJ 2]

ESCOLA POLITÉCNICA DA USP

Annuário da Escola Polytechnica de São Paulo para o ano de 1903. [EPUSP 1]

Annuário da Escola Polytechnica de São Paulo para o ano de 1932. [EPUSP 2]

Annuário da Escola Polytechnica de São Paulo para o ano de 1934. [EPUSP 3]

Annuário da Escola Polytechnica de São Paulo para o ano de 1935. [EPUSP 4]

Antônio Francisco de Paula Souza 1843 – 1917. Coletânea de Documentos. [EPUSP 5]

Escola Polytechnica – Programma – 1896-1898. [EPUSP 6]

Escola Polytechnica – Programma – 1897. [EPUSP 7]

Escola Polytechnica – Programma – 1898-1899. [EPUSP 8]

Catálogos da Biblioteca da Escola Polytechnica de São Paulo, 1897. [EPUSP 9]

Catálogo Methodico da Biblioteca da Escola Polytechnica de São Paulo, 1913. [EPUSP 10]

Curso de Cálculo – Organizado e Litografado por Adriano Goulin. São Paulo, 1904. [EPUSP 11]

Mathematik. Manuscrito escrito por Antônio Francisco de Paula Souza. [EPUSP 12]

FUNDAÇÃO GETÚLIO VARGAS – CPDOC

Documentos sobre a Faculdade Nacional de Filosofia destacando os seguintes assuntos: projetos de organização da faculdade, seleção do corpo docente, contratação de professores. Classificação: GC g 1936.01.18. Microfilmagem: rolo 39 fot 1 a 720. [FGV 1]

INSTITUTO DE MATEMÁTICA E ESTATÍSTICA DA USP

FANTAPPIÉ, Luigi. Curso de Análise Matemática. [São Paulo: FFCL/USP], [19--]. 1v

Publicações

ABREU, Alzira et al. **Entrevista com Leopoldo Nachbin**. Canal Ciência. Portal de Divulgação Científica e Tecnológica, 1991. Disponível em:

< http://www.canalciencia.ibict.br/notaveis/livros/leopoldo_nachbin_59.html >. Acesso em 29 jul. 2017.

ABDELHAY, José. Curso de Análise Matemática. Vol 1. Segunda Edição. Rio de Janeiro, 1953.

ACHE, Felipe Hippolito. **Demonstrar quæes os principios da analyse, reduzindo-os ao menos possivel.** Tese apresentada à Escola Central. Rio de Janeiro, 1863.

AGUILLON, Louis-Charles-Marie. **L'Ecole des mines de Paris: notice historique.** Paris, 1889.

ANNAES DA ESCOLA DE MINAS, nº33, 1960.

BABBITT, Donald & GOODSTEIN, Judith (2009). **Guido Castelnuovo and Francesco Severi: Two Personalities, Two Letters.** Notices of the AMS, vol. 56, no. 7, 2-10.

BARON, Margaret & BOS, Henk. **Curso de História da Matemática: origens e desenvolvimento do cálculo.** Unidade 4. Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Mayer e Maria José M.M Mendes. Editora Universidade de Brasília, 1985, c1974.

BARROS, Antônio Paes. [Carta] 27 de agosto de 1855, Itú [para] BARROS, Antônio Paes de. Carta do Capitão Antônio Paes de Barros e de sua esposa Gertrudes Eufrosina Paes de Barros dirigida aos seus filhos Antônio Paes de Barros e Diogo Antônio de Barros.

BARROS, Américo Monteiro de. **Notas sobre o Emprego do Infinito.** Rio de Janeiro, 1863.

BELHOSTE, Bruno. **Pour une réévaluation du role de l'enseignement dans l'histoire des mathematiques.** Revue d'histoire des mathematiques, p289-304, 1998.

BLOCH, Marc. **Apologia da História ou o Ofício de Historiador;** tradução André Telles – Rio de Janeiro: Jorge Zahar. Ed., 2001.

BOLONDI, Giorgio (2004). **Lo scambio di lettere tra Francesco Severi e André Weil.** *Lettera Matematica Pristem*, 52, giugno 2004, 36-41.

BONFIM, Sabrina Helena. **Theodoro Augusto Ramos: Um Estudo Comentado de sua Tese de Doutorado.** Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Tese de Doutorado. Rio Claro, 2013.

BOUCHARLAT, Jean-Louis. *Eléments de calcul différentiel et de calcul integral.* Cinquième Edition. Bachelier, Imprimeur-Libraire pour les mathématiques. Paris, 1838.

BOS, Henk Jan Maarten. **Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus**, Archive for History of Exact Sciences, 14, 1974, p.1-90.

BOTTAZZINI, Umberto. **The Higher Calculus: A History of Real and Complex Analysis from Euler to Weierstrass**. Springer-Verlag. New York, 1986.

BOYER, Carl. **The History of the Calculus and its conceptual development**. Dover Publications. New York, 1949.

BRASIL. *Carta de Lei de 4 de dezembro de 1810. Cria uma Academia Real Militar na Côrte e Cidade do Rio de Janeiro*. Coleção das Leis do Império do Brasil, Pág 232. Vol 1, 1810. Disponível em <http://www2.camara.leg.br/legin/fed/carlei/anterioresa1824/cartadelei-40009-4-dezembro-1810-571420-publicacaooriginal-94538-pe.html>. Consulta realizada em 08/11/2014

BRASIL. *Decreto nº 140 – 09 de março de 1842. Approva os Estatutos da Escola Militar, em virtude do Artigo 15 § 2º da Lei de 15 de novembro de 1831*. Lex: Coleção das Leis do Brasil, 1831-1840, Atos do Poder Executivo – 1831. Leis do Império. Disponível em <http://www2.camara.leg.br/atividade-legislativa/legislacao/publicacoes/doimperio/colecao3.html>. Consulta realizada em 11/10/2014

CARDOSO, Licinio Athanasio. **Teoria Elementar das Funções para servir de introdução ao estudo da Álgebra**. Typ, Mont-Alverne. Rio de Janeiro, 1885.

CARVALHO, José Murilo de. **A Escola de Minas de Ouro Preto: o peso da glória**. Centro Edelstein de Pesquisas Sociais. Rio de Janeiro, 2010.

CASTRO, Francisco M. de Oliveira. **A Matemática no Brasil**. Editora da UNICAMP, Campinas, 1992.

CAUCHY, Augustin. **Cours d'Analyse de L'ecole Royale Polytechnique**. De L'imprimerie Royale, 1821.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **A influência italiana nas atividades científicas brasileiras**. In DE BONI, L.A. (org). *A presença italiana no Brasil*. Porto Alegre: EST, 1987, p.508-521.

_____. **Uma História Concisa da Matemática no Brasil**. São Paulo: Vozes, 2008.

DEDEKIND, Richard. **Essays on the Theory Numbers**. New York: Dover (reprint), 1963.

DIAS, Altamiro Tibiriça. *Curso de Cálculo Infinitesimal*. Tomo I. Segunda Edição. Publicação da Fundação Gorceix. Ouro Preto, 1962.

EDWARDS, Charles Henry. **The Historical Development of the Calculus**. Springer-Verlag. New York, 1979.

EULER, Leonhard. **De innumerabilibus curves tautochronis in vácuo**, 1735.

_____. **Introductio in analysin infinitorum**. Lausanne, 1748.

FAUSTO, Bóris. **História Concisa do Brasil**. São Paulo, Editora da Universidade de São Paulo, 2014.

FÁVERO, Maria de Lourdes. **Faculdade Nacional de Filosofia**. Rio de Janeiro. Ed UFRJ, v.1, 1989.

FAUVEL, John & GRAY, Jeremy. **The History of Matethematics: A Reader**. The Open University, 1987.

FLEURY, P. Henry. **Le Calcul Infinitésimal fondé sur des principes rationnels et précédé de la Théorie Mathématique de l'Infini**. Marseille, 1879.

FREITAS, Antônio de Paula. **These de Concurso à Primeira Cadeira do Segundo Anno**. Tese de Concurso apresentada à Escola Central. Rio de Janeiro, 1874.

GAMA, Lélío. **Introdução à Teoria dos Conjuntos**. Rio de Janeiro, 1945.

_____. **Séries Numéricas**. Rio de Janeiro, 1946.

_____. **Discurso do Professor Lélío Gama**. Atas do 5º Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 1965.

GARÇON, Anne Françoise. **Entre l'État et l'usine: L'École des Mines de Saint-Étienne au XIXe siècle**. Presses Universitaires de Rennes, 2004.

GISPERT, Helene. **Camile Jordan et les fondements de l'analyse: comparaison de la premier edition (1882-1887) et de la deuxieme (1893) de son cours d'analyse de l'ecole polytechnique**. Tese. Universite de Paris-Sud. Paris, 1982.

GIUSTI, Enrico. “Gli ‘errori’ di Cauchy e i fondamenti dell’analisi” *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, 1984.

GOODSTEIN, Judith & BABBITT, Donald. Guido **Castelnuovo and Francesco Severi: Two Personalities, Two Letters**. Notices of the AMS. Volume 56, Number 7. 2009.

GRABINER, Judith V. **The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus**. Cambridge, MIT Press, 1981.

_____. **Who gave you the epsilon? Cauchy and the origins of rigorous calculus**. *The American Mathematical Monthly*, vol. 91, pp. 185-194, 1983.

KLIN, Morris. **Mathematics – The Loss of Certainty**. Oxford University Press. New York, 1980.

KUHN, Thomas. **The structure of scientific revolutions**. Chicago: The University of Chicago Press, 1962.

LACROIX, S.F. **Tratado Elementar de Cálculo Diferencial e Cálculo Integral**. Tradução de Francisco Cordeiro da Silva Torres. Imprensa Régia. Rio de Janeiro, 1812

LE GOFF, Jacques. **História e Memória**. Tradução de Bernardo Leitão [et al.]. Ed. 5. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2003.

LIMA, Eliene Barbosa. **Dos Infinitésimos aos Limites: a contribuição de Omar Catunda para a Modernização da Análise Matemática no Brasil**. Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Feira de Santana. Dissertação de Mestrado. Salvador, 2006.

_____. **Matemática e Matemáticos na Universidade de São Paulo: Italianos, Brasileiros e Bourbakistas (1934-1958)**. Universidade Federal da Bahia, Universidade Estadual de Feira de Santana. Tese de Doutorado. Salvador, 2012.

LIMA, Eliene Barbosa, DIAS, André Luiz Mattedi. O curso de análise matemática de Omar Catunda: uma forma peculiar de apropriação da análise matemática moderna. **Revista Brasileira de História da Ciência**. Rio de Janeiro, v.3,n.2, p.211-230, 2010.

LIMA, Margarida Rosa de. **D.Pedro II e Gorceix – A Fundação da Escola de Minas de Ouro Preto**. Fundação Gorceix. Ouro Preto, 1977.

LÜTZEN, Jesper. **The foundation of analysis in the 19th century**. In JAHNKE, Hans Niels (org.) *A History of Analysis*. Providence, American Mathematical Society, 2003.

MARAFON, Adriana César de Matos. **Vocação Matemática como Reconhecimento Acadêmico**. Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Educação. Tese de Doutorado. Campinas, 2001.

MARTINES, Mônica de Cássia Siqueira. **Primeiros Doutorados em Matemática no Brasil: uma análise histórica**. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Tese de Doutorado. Rio Claro, 2014.

MEDEIROS, João Ernesto Viriato de Medeiros. **O Methodo dos Limites e dos Infinitamente Pequenos**. Dissertação de Doutorado apresentada à Escola Militar. Rio de Janeiro, 1850.

MEDEIROS, Luiz Adalto da Justa. **Aspectos da Matemática no Rio de Janeiro**. Universidade Federal do Rio de Janeiro. Instituto de Matemática. Rio de Janeiro, 1996.

MEDVEDEV, Fyodor A. *Razvitie Pontattiya Integrala*. [The development of the concept of the integral] Moskva, 1974.

MILLER, Célia Peitl. **O Doutorado em Matemática no Brasil: Um Estudo Histórico Documentado**. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Tese de Doutorado. Rio Claro, 2003.

MOREIRA, Heloi José Fernandes. **Escola Central: a academia do Largo de São Francisco de Paula que consolidou o ensino da engenharia civil no Brasil**. Universidade Federal do Rio de Janeiro, Programa de Pós Graduação em História das Ciências, das Técnicas e Epistemologia. Tese de Doutorado. Rio de Janeiro, 2014.

NABONNAND, Philippe, PEIFFER, Jeanne & GISPERT, Hélène (ed). **Circulations et échanges mathématiques. Études de cas (18^e-20^e siècles)**. Philosophia Scientia. Vol 19 Cahier 2, 2015.

NACHBIN, Leopoldo. **Discurso do Professor Leopoldo Nachbin**. Atas do 5^o Colóquio Brasileiro de Matemática. IMPA, 1965.

OLIVEIRA, Antônio Sylvio Vieira de. **O Ensino de Cálculo Diferencial e Integral na Escola Politécnica de São Paulo, no ano de 1904: uma análise documental**. Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Dissertação de Mestrado. Rio Claro, 2004.

OLIVEIRA, José Carlos de. **D. João VI: Adorador do Deus das Ciências?** Rio de Janeiro: E-papers Serviços Editoriais, 2005.

PADILHA, Rodrigo Bastos. **A formação científica e humanística de Antonio Francisco de Paula Souza, o fundador da Escola Politécnica de São Paulo**. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Dissertação de Mestrado. São Paulo, 2009.

PADILHA, Rodrigo Bastos. **Antônio Francisco de Paula Souza: criador da Escola Politécnica de São Paulo, engenheiro, político e educador**. 1.ed. São Paulo: Leopardo Editora, 2010.

PARDAL, Paulo. **Brasil, 1792: Início do Ensino da Engenharia Civil e da Escola de Engenharia da UFRJ**. Fundação Emílio Odebrecht, 1985.

PEIXOTO, Manoel Maria Pinto Peixoto. **Estudo dos Principios do Calculo Diferencial**. Tese apresentada à Escola Militar. Rio de Janeiro, 1853.

PEREIRA, José Saturnino da Costa. **PROBLEMA - Entre todos os sólidos de igual superfície, achar o que tem máximo volume**. O Patriota, 2: 3-7, fev, 1813.

_____. **Elementos de Cálculo Diferencial e de Cálculo Integral, segundo o sistema de Lacroix, para uso da Escola Militar**. Typografia Nacional. Rio de Janeiro, 1842.

PYENSON, Lewis. **Pure Learning and Political Economy: Science and European Expansion in the Age of Imperialism**. Ed Rodopi, 1989.

RIBEIRO, Ana Lúcia Costa. **O Professor e Politécnico Manuel Amoroso Costa: Aspectos de uma Trajetória Acadêmica no Brasil nos anos de 1920.** Universidade Federal do Rio de Janeiro. Decania do Centro de Ciências Matemáticas e da Natureza. Tese de Doutorado. Rio de Janeiro, 2015.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática.** Zahar. Rio de Janeiro, 2012

SAD, Lígia Arantes. **Rastros do Ensino de Cálculo Diferencial e Integral nas décadas iniciais da Academia Militar do Rio de Janeiro.** Revista Brasileira de história da Matemática. Vol. 11 nº21 – pág 46-67, 2011.

SAD, Lígia Arantes & SILVA, Circe Maria Silva da. **Vestígios do Ensino do Cálculo Diferencial e Integral na Escola Politécnica do Rio de Janeiro (1874-1885).** Anais do VI Encontro Luso-Brasileiro de História da Matemática. São João Del Rei, 2011.

SANTOS, Maria Cecília Loschiavo dos. **Escola Politécnica da Universidade de São Paulo: 1894-1984.** São Paulo: Coordenadoria de Assuntos Culturais da USP, 1985.

SCHAPPACHER, Norbert. **Rewriting points.** Em: Proceedings of the International Congress of Mathematicians Hyderabad, India, 2010, pp. 3258-3291.

SCHUBRING, Gert & ROQUE, Tatiana. **Curso de Análise de Cauchy: uma edição comentada.** Rio de Janeiro. SBM, 2016.

SCHUBRING, Gert. **Pure and Applied Mathematics in Divergent Institutional Settings in Germany: the Role and Impact of Felix Klein.** The History of Modern Mathematics. Volume II: Institutions and Applications eds. David Rowe, John McCleary, 171-220. Boston: Academic Press, 1989.

_____. "Changing cultural and epistemological views on mathematics and different institutional contexts in 19th century Europe", **L'Europe mathématique - Mythes, histoires, identités. Mathematical Europe - Myths, History, Identity**, eds. Catherine Goldstein, Jeremy Gray, Jim Ritter (Paris: Éditions de la Maison des Sciences de l'Homme, 1996), 361-388.

_____. "O primeiro movimento internacional de reforma curricular em matemática e o papel da Alemanha: um estudo de caso na transmissão de conceitos", **Zetetiké**, 1999, vol. 7, no. 11, 29-50.

_____. **Kabinett - Seminar - Institut: Raum und Rahmen des forschenden Lernens**, *Berichte zur Wissenschaftsgeschichte*, 2000, 23: 269-285.

_____. **Production mathématique, enseignement et communication.** Revue d'histoire des mathématiques, p. 295-305, 2001.

_____. "A Framework for Comparing Transmission Processes of Mathematics to the Americas", **Revista Brasileira de História da Matemática**, 2002, vol. 2, no. 3, 45-63.

_____. **Análise História de livros de Matemática: Notas de Aula**. Campinas, SP: Autores Associados, 2003

_____. **Recent Developments in Research on the Institutional History of Mathematics**. LLULL: Revista de la Sociedad Española de História de las Ciencias y das Técnicas, vol 26, 2003, p.1045-1049

_____. O primeiro movimento internacional de reforma curricular em matemática e o papel da Alemanha. In **Euclides Roxo e a modernização do ensino da matemática no Brasil**. Organizador Wagner Valente. Brasília: Editora UnB, 2004. Cap 1, p. 11-38.

_____. **Conflicts between generalization, rigor, and intuition: number concepts underlying the development of analysis in 17th-19th century France and Germany**. New York: Springer, 2005.

_____. **A Matematização do Calor**. Ciência Hoje, v.47:3, p. 68-70, 2011.

SEVERI, Francesco. **Lezioni di Analisi**. Nicola Zanichelli Editore. Segunda Edição. Bologna, 1938

SILVA, Circe Maria Silva da. **Cartas Inéditas de Otto de Alencar Silva (1874-2012) para Francisco Gomes Teixeira (1851-1933)**. Revista da SBHC, n.10, p.95-104, 1993.

_____. "A Variação dos Triângulos Esféricos" de Manuel Araújo Guimarães: primeiro impresso de Matemática, no Brasil, após a liberação da imprensa em 1810. Revista da SBHC, n.15, p.53-66, 1996.

_____. **A matemática positivista e sua difusão no Brasil..** Vitória: Edufes, 1999.

_____. **Formação de Professores e Pesquisadores de Matemática na Faculdade Nacional de Filosofia**. Cadernos de Pesquisa, n. 117, p.103-126, novembro, 2002.

_____. **O livro didático mais popular de Leonhard Euler e sua repercussão no Brasil**. Revista Brasileira de História da Matemática – Vol 9 nº 17, pág 33-52, 2009.

_____. **Controle estatal sobre livros didáticos de matemática utilizados na Academia Militar no Brasil**. Zetetiké – FE – Unicamp – v.19, n.35 – jan./jun. - 2011

SILVA, Domingos de Araujo e. **These apresentada à Escola Central por ocasião do concurso para o preenchimento da vaga de lente da primeira cadeira do segundo anno. Tese de Concurso apresentada à Escola Central.** Rio de Janeiro, 1874,

SILVA, Clóvis Pereira da. **A contribuição de Otto de Alencar Silva para o desenvolvimento da ciência no Brasil.** Revista da SBHC, n.19, pp 13-30, 1998.

_____. **Manuel Amoroso Costa: o Continuidor da Obra Matemática de Otto de Alencar Silva.** LLULL, Curitiba, v.22, 1999.

_____. **A matemática no Brasil: história de seu desenvolvimento.** 3Ed.rev. São Paulo: Edgard Blucher, 2003.

SILVA, Clovis Pereira da & BASTOS, Gervasio Gurgel. **Otto de Alencar Silva: Uma Coletânea de Estudos e Cartas.** Editora UFC. Fortaleza, 2006.

SILVA, F.A.H. **As Escolas de Engenharia e a Produção do Saber.** UNESP. Assis, 2011

SILVA, Luciana Vieira Souza. **A Missão Italiana da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras da Universidade de São Paulo: ciência, educação e fascismo (1934-1942).** Universidade de São Paulo. Dissertação de Mestrado. São Paulo, 2015.

SILVA, Luiz Roberto Rosa. **Prof. J.O Monteiro Camargo e o Ensino de Cálculo Diferencial e Integral e Análise na Universidade de São Paulo.** Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Dissertação de Mestrado. Rio Claro, 2006.

SILVEIRA, T.A.C. **Lições de Calculo Differential ou Methodo Directo das Fluxões.** Lisboa, 1801.

SONNET, Hipolyte. **Premiers éléments du calcul infinitésimal à l'usage des jeunes gens qui se destinent à la carrière d'ingénieur.** Paris, 1884.

SOUZA, Antônio Francisco de Paula. **Geometria Superior.** São Paulo, 1895.

SPALT, Detlef.T. **Welche Funktionsbegriffe gab Leonhard Euler?** Historia Mathematica Volume 38, p.485-505, 2011.

STURM, Charles. **Cours d'Analyse de L'École Polytechnique.** Deuxième Edition. Paris, 1863.

TÁBOAS, Plínio Zornoff. **Luigi Fantappiè: Influências na Matemática Brasileira. Um Estudo de História como contribuição para a Educação Matemática.**

Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Tese de Doutorado. Rio Claro, 2005.

TELLES, Pedro Carlos da Silva. **História da Engenharia no Brasil: Séculos XVI a XIX.** Rio de Janeiro: Clavero, 1994.

TOLEDO, José do Carmo. **Uma história do processo de institucionalização da área de Análise Matemática no Brasil.** Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas. Tese de Doutorado. Rio Claro, 2008.

VALENTE, Wagner Rodrigues. **Uma história da matemática escolar no Brasil, 1730-1930.** São Paulo: Annablume: FAPESP, 1999.

VEYNE, Paul. **Como se escreve a história; Foucault revoluciona a história.** Tradução de Alda Baltar e Maria Auxiliadora Kneipp. Ed.4. Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1982. [reimpressão 2008]

VIERTEL, Klauss. **Geschichte der gleichmäßigen Konvergenz. Ursprünge und Entwicklungen des Begriffs in der Analysis des 19. Jahrhunderts.** Springer, Wiesbaden, 2014.

WEIL, André. Em: F. Lionnais (org.), Les Grands Courants, 1948.

XIAOQIN, Wand & YINGHO, Zhang. **The introduction of Foreign Mathematics Education to China and its Influence.** In WANG, Jianpan (Ed). **Mathematics Education in China: Tradition and Reality.** Cengage Learning Asia. Singapura, 2013.

ZERNER, Martin . **La Transformation des Traités Français d'Analyse (1870-1914).** Laboratoire J-A. Dieudonné. Université de Nice-Sophia-Antipolis. Nice, 1994.

Apêndice 1: Lista de alunos da ETH no ano escolar de 1861/1862

IV. Schulnachrichten vom Schuljahre 1861/62.	
A. Lehrpersonal.	
Es sind im Laufe des Schuljahres an neuen Lehrkräften hinzutreten 4 Privatdozenten:	
Die Herren: Dr. Joh. Stössel von Bürenschweil, Kts. Zürich, für Nationalökonomie.	
Dr. Karl Morell, von St. Gallen, für Schweizergeschichte.	
Aug. Gouxy, von Lausanne, für Mathematik.	
Dr. Jul. Piccard v. Lutry, Waadt, für Geologie.	
Die Behörde entsprach ferner dem Wunsche des Hrn. Major Vögeli-Bodmer, militärwissenschaftliche Vorträge zu halten.	
Ausgetreten ist in Folge eines Rufes an die höhere technische Lehranstalt seiner Vaterstadt Herr Dr. Deekind, Professor der Mathematik, aus Braunschweig. Mit seinem Weggang verlor die Anstalt eine bewährte Lehrkraft und einen Mann von bedeutendem Gelehrtenruf.	
Herr Dr. Stössel ist am Schlusse des Wintersemesters einem Rufe an das schweizerische statistische Bureau gefolgt.	
Herr Gouxy wurde zum Professor der Mathematik in Aarau ernannt.	
Den Hrn. Dr. Durège und Dr. Gastell, bisher Privatdozenten, ist der Rang und Titel eines Professors ertheilt worden.	
B. Studierende.	
Die Anstalt war im Schuljahre 1861/62 von nachfolgenden regelmässigen Schülern besucht:	
* Bezeichnet ausgetreten während des Schuljahres.	
a. Mathematischer Vorkurs.	
1) Ahrens, Joh., von Wehren (Holstein).	21) Gouxy, Albert, von Lausanne.
2) Altheer, Alfred, von Speicher (Appenzell).	22) Grasset, Eug., von Alergement (Waadt).
3) Andreoli, Franz, von Agno (Tessin).	23) Grohmer, Kasimir, von Warschau.
4) Ankersmit, Leonh., von Deventer (Holland).	24) Grössmann, Emil, von Aarburg.
5) Asmis, Wilh., von Woldeck (Mecklenburg).	25) Gyr, Thomas, von Schwyz.
6) de Barros, Diego, von Ru (Brasilien).	26) Heinzen, C. F., von Bosten.
7) Bettschard, Joseph, von Schwyz.	27) Herzog, Jos., von Grünewald (Böhmen).
8) Blank, Heinrich, von Schaffhausen.	28) Hüssli, Christian, von Andeer (Bündten).
9) Burkowski, Valère, von Warschau.	29) Howaldt, Georg, von Kiel.
10) Chaudet, Henry, von Vevey.	30) Hubacher, Michael, von Tavel (Freiburg).
11) Claessen, Engelbert, von Geor (Holland).	31) Ischnae, Emil, von Stauf.
12) Crimoz, Emil, von Aubonne (Waadt).	32) v. Kalbermatten, Jos., von Sitten (Wallis).
13) Dinkelfmann, Joh., von Koppigen (Bern).	33) Keiser, Adolf, von Grellingen (Bern).
14) Duchesne, François, von Châlon-sur-Saône.	34) Kehlhofer, Bernh., von Gunmadingen (Schaffh.).
15) Dürholz, Leo, von Solothurn.	35) Langemeier, Gustav, von Warschau.
16) Eisenhut, Heinrich, von Gais.	36) Lindegger, Joseph, von Geunsee (Luzern).
17) Elster, Gustav, von Fernambuco.	37) Loretz, Wilh., von Oberhof (Nassau).
18) Favre, Jos., von Genf.	38) Lysakowski, Joseph, von Warschau.
19) Fock, Heinrich, von Wilster (Holstein).	39) Marx, Joh., von Thun.
20) Gilardi, Pietro, von Montagnola.	40) Meley, Arnold, von Wählern (Bern).
	41) Mosimann, Gottl., von Lauperswyl (Bern).
	42) Müller, Edgard, von Bern.
	43) Niklaus, Albrecht, von Mäntschener (Bern).
	44) Roth, Alfred, von Bühler (Appenzell).
	45) Risold, Karl, von Bern.
	* 46) Ruef, Paul, von Burgdorf.
	47) Samojewicz, Kasimir, von Warschau.
	48) Schlichting, Julius, von Sarkwits (Oldenburg).
	49) Schwytzer, F. Albert, von Luzern.
	50) Seebeck, Karl, von Libau (Carland).
	51) Sestib, Charles, von Warschau.
	52) Siedler, Gotthard, von Affoltern a/A.
	* 53) Somazzi, Ernst, von Lugano.
	54) Staub, Karl Leo, von Mämnedorf.
	55) Steiner, Klemens, von Ingenbohl (Schwyz).
	56) Steczkowski, Wladislas, von Warschau.
	57) Stoltz, Hendrik, von Bergen (Norwegen).
	58) Stromloff, Niklaus, von Warschau.
	59) Sulgerer-Süel, Karl, von Stein a/Rh.
	60) v. Tavel, Rud., von Bern.
	61) Weber, Otto, von Dürnten (Zürich).
	62) Weilemann, August, von Knosau.
	63) Weis, Karl, von Wien.
	* 64) Werthemann, Arthur, von Muhlhausen.
	65) Wingard, Oluf, von Bergen.
	66) Zuhlin, Emil, von St. Gallen.
	67) Zurlinden, Louis Adrien, von Eaux-vives (Genève).
b. Hausschule. I. Jahreskurs.	
68) Borel, Eduard, von Vevey (Waadt).	
69) Geiser, Arnold, von Langenthal (Bern).	
70) Gohl, Theodor, von Aarberg (Bern).	
71) Gresclaude, Auguste, von Lecl.	
* 72) Hafliger, Eduard, von Luzern.	

Fonte: (PADILHA, 2009,p.69)

Apêndice 2: Lista de alunos da ETH no ano escolar de 1861/1862

— 40 —	
75) Hermann, Wilhelm, von Frankfurt a/M. * 74) Kern, Emil, von Zürich. * 75) Lutz, Emil, von Basel. 76) Pfunder, Walther, von Munsdorf (Zürich). 77) Scheins, Albert, von Odessa. 78) Wulfke, Gust., von Husum (Schleswig). 79) Wüst, Friedrich, von Dagmersellen (Luzern). II. Jahreskurs. * 80) Bachofen, Arnold, von Basel. 81) Balthasar, Karl, von Luzern. 82) Becker, Theodor, von Wahlstorf (Holstein). 83) Bluntschli, Friedrich, von Zürich. * 84) Goschalk, Isaak, von Amsterdam. 85) Schäfer, Adolf, von Aarau. 86) Schmid, Emil, von Eglisau (Zürich). III. Jahreskurs. 87) Becorrit, Henri, von Coligny (Genf). 88) Guinand, Eduard, von Jouxtemezery (Waadt). * 89) v. Holst, Matth., von Fellin (Livland). 90) Kalin, Jakob, von Einsiedeln. * 91) Moldenschart, Heinrich, von Tiefbergen (Holstein). * 92) Schmidlin, Wilhelm, von Basel. 93) Sommer, Oskar, von Wollenhütten. c. Ingenieurschule. I. Jahreskurs. 94) Alder, Emil, von Schwellbrunn (Appenzell). 95) Alterfer, Heinrich, von Basel. 96) Andreou, Friedrich, von Frankfurt a/M. 97) Bachofen, Wilhelm, von Basel. 98) Beumont, Frank, von Genf. 99) Bezencenet, Louis, von Yverdon (Waadt). 100) Bodenheimer, Alph., von Blouhouse (Pruntrut). * 101) Borowski, Bronislaus, von Miedoczin (Polen). 102) Burkhard, Werner, von Munsdorf (Zürich). * 103) Colombani, Jacques, von Tromello (Tessin). * 104) Dahl, Erik, von Bronheim (Norwegen). * 105) Dietz, Gustav, von Altona (Holstein). 106) Doerr, Moritz, von Frankfurt a/M. 107) Faton, Louis, von Genf. * 108) Fehr, Otto, von St. Gallen. 109) Gremond, Amadée, von Riaz (Freiburg). 110) Gurliitt, Ed., von Bittwerder (Hamburg). 111) Hahn, Christ., von Nürnberg. 112) Hinrichs, Wilh., von Jewer (Oldenburg). 113) Hotz, Anton, von Baar (Zug). * 114) v. Huene, Alfred, von Reval (Estland). 115) Knapler, Friedrich, von Bern. * 116) Langfeldt, Peter, von Altona. 117) Lebell, Axel, von Helsingfors. 118) Lienau, Ludw. Aug., von New-Yersey. 119) Lücken, Günther, von Rhaude (Oldenburg). 120) Mathison, Theodor, von Franklin (Louisiana). 121) Mercier, Christ., von Lausanne. 122) Moll, J. Albert, von Biel (Bern). 123) Muhelm, Kaspar, von Altorf (Uri). 124) Murali, Hans, von Zürich. 125) Nussen, Lauritz, von Christiania.	126) Noskowsk, Wladislas, von Warschau. * 127) Paul de Souza, Ant. Francisco, v. Ita (Brasilien). 128) Peters, Theodor, von Nordheim (Hannover). 129) Petrolini, Edm., von Brissago (Tessin). 130) Plöger, Alex., von Hildesheim. 131) Richard, Rud., von Yburg (Hannover). 132) Rychter, Jos., von Warschau. 133) Schmid, Gottl., von Eriswyl (Bern). 134) Schmid, Karl, von Reiden (Luzern). 135) Schuberth, Karl Eduard, von Petersburg. 136) Schwan, Achilles, von Zuz (Bündten). 137) Solari, Constantin, von Casara (Tessin). 138) Sprenger, Aloys, von Calcutta. 139) Stieda, Eug., von Riga. 140) Strub, Victor, von Trimbach (Solothurn). 141) Struck, Emil, von Riga. 142) Tolvianski, Kasimir, von Wilna. II. Jahreskurs. 143) Albrici, Pietro, von Poschiavo (Bündten). 144) Ammann, Joh., von Dymhard (Zürich). * 145) Amick, Hugo, von Hamburg. 146) de Barros, Ant. Paes, v. Ita (Brasilien). 147) Bavier, Emil, von Chur. 148) Benteli, Albrecht, von Bern. 149) Bernardazzi, Clod., von Pambio (Tessin). 150) Borel, François, von Courvet (Neuchâtel). 151) Bösch, Ludw., von Krammbeck (Lauenburg). 152) Brühns, Otto, von Eutin (Oldenburg). 153) Bussinger, Ferdinand, von Stans. 154) Creuzfeldt, Wilhelm, von Eutin (Oldenburg). 155) Emery, Alfred, von Collayes (Waadt). 156) Flühmann, Ad., von Neuenegg (Bern). 157) Fokschaner, Gabriel, von Bukarest. 158) Franzius, Georg, von Fürstenaug (Hannover). 159) Franken, Leo, von Mühlheim (Rheinspreussen). 160) Fuhrken, Heinrich, von Oldenburg. 161) Gladbach, Karl, von Alzey (Hessen). 162) Glinz, August, von St. Gallen. 163) Harlachner, Andreas, v. Schofflistorf (Zürich). * 164) Husslin, Aristides, von Athen. 165) Hostmann, Wilh. Otto, von Celle (Hannover). 166) Isaakson, Eimer, v. Clap b. Christiansand (Norw.). * 167) v. Kapf, Ad., von Bremen. 168) Kloss, Karl, von Liestal. 169) Luder, Friedrich, von Hiestätten (Luzern). 170) Lüthi, Ulrich, von Kappel (St. Gallen). 171) Manthey, Wilhelm, von Christiania. 172) Mast, Jakob, von Dettighofen (Thurgau). 173) Meitner, Moritz, von Tobitschau (Mähren). * 174) Petersen, Gustav, v. Grossellerbühl (Schleswig). 175) Petersen, Friedrich, von Garding (Schleswig). 176) Petest, Samuel, von Roche (Bern). 177) Piguet, Leon, von Vouvry (Wallis). 178) Reimers, Conrad, von Schwofel (Holstein). 179) Roner, Johannes, von Schuls (Bündten). 180) Rosskotten, W., v. Rosskotten b. Kattwig (Rheinpr.). 181) Schneider, Eduard, von Eriswyl (Bern). 182) Stockalper, Ernst, von Sitten (Wallis).

Fonte: (PADILHA, 2009, p.70)

Apêndice 3: Lista de alunos da ETH no ano escolar de 1862/1863

IV. Schulnachrichten vom Schuljahre 1862/63.	
A. Lehrpersonal.	
Es wurde im Frühjahr 1863 an die Professur für Mathematik in deutscher Sprache berufen:	
Herr Dr. Christoffel von Montjoie in Rheinpreussen, bisher Privatdozent an der Hochschule in Berlin.	
Als Privatdozenten traten ein:	
1. Herr Lasius von Oldenburg für architektonische Fächer.	
2. Herr Dr. Reye von Hannover für Mathematik.	
3. Herr Buchonnet von Lausanne für Mathematik.	
Von den vorhandenen Lehrkräften ist im Schuljahre Niemand abgegangen.	
B. Studierende.	
Die Anstalt war im Schuljahre 1862/63 von nachfolgenden regelmässigen Schülern besucht:	
* Bonofiet ausgestiegen während des Schuljahres.	
a. Mathematischer Vorkurs.	
1) Anastasia, Theodor, von Breno (Tessin).	33) Marshall, Richard, von Dresden.
2) Aufdermaur, Carl, von Ingenbühl (Schwyz).	34) Middelberg, Adrian, von Amsterdam.
3) Berger, Gustav, von Nidau (Bern).	35) Müller, Heinrich, von Tischenreuth (Baiern).
4) Bernasconi, Adolf, von Chiasso (Tessin).	36) Müller, Xaver, von Rapperswil.
5) Bettinger, Friedrich, von Frankenthal (Rheinb.).	37) Müller, Albert, von Schaffhausen.
6) Bolling, Friedrich, von Aachen.	38) Nederburg, Wilh., von 'Sgravesande (Holland).
7) Böttcher, Franz Rudolf, von Dresden.	* 39) Nehlsen, Rudolf, Wesselbüren (Holstein).
8) Brandt, Alois, von Renan (Bern).	40) Notz, Heinrich, von Zürich.
9) Bujard, Jules, von Moskau.	41) Oswald, Wilhelm, von Zürich.
10) Coray, Balthasar, von Fattin (Graubünden).	42) Paula Souza, Fs., von Ita (Brasilien).
11) Eichfeldt, Hermann, von Karlsruhe.	43) Petrelli, Carl, von Savagnino (Bündten).
12) Fallot, Thomas, von Fondy (Frankreich).	44) Pistor, Philipp, New-York.
13) Fankhauser, Friedrich, von Burgdorf (Bern).	45) Rahn, Jacob, von Unterhalla (Schaffhausen).
14) Felber, Adolf, von Egerkingen (Solothurn).	46) Rathgeb, Gustav, von Schwamendingen.
15) Fioke, Heinrich, von Bremen.	* 47) Reiner, August, von Turas (Mähren).
16) Flieger, Albert, von Warschau.	48) Rouge, Jules, von Genf.
17) Fontana, Carl, von Tesserete (Tessin).	49) Samson, Henri, von Hamburg.
18) Gianini, Jules, von Lorenzo (Tessin).	50) Skala, Theodor, von Wien.
19) Gimpert, Friedrich, von Unterstrass.	51) Schlumpf, Carl, von Neu St. Johann (St. Gallen).
* 20) Girard, Emil, von Solothurn.	52) Schneider, Waldemar, von Petersburg.
21) Heft, August, von Heidelberg.	* 53) Schanbel, Carl, von Libau (Curland).
22) Hess, J. Jakob, von St. Gallen.	54) Schoeller, Ewald, von Düren (Rheinpreussen).
23) Hurter, Friedrich, von Schaffhausen.	55) Simon, Johann, von Reutigen (Bern).
24) Jehu, Roy, von Oldensword (Schleswig).	56) Stombach, Jakob, von Uerkheim (Aargau).
25) Jordan, Adolf, von Granges (Waadt).	57) Steidinger, Julius, von Hottingen (Zürich).
* 26) Kälin, Anton, von Einsiedeln.	58) Steiner, Robert, von Albersweil (Luzern).
27) Köster, Ludwig, von Friedelsheim (Pfalz).	59) v. Struve, Georg, von Warschau.
* 28) Lepori, Giacomo, von Dino (Tessin).	60) Süß, Johann, von Unterstammheim (Zürich).
29) Leu, Burkhardt, von Luxern.	61) Szabó, Julius, von Raab (Ungarn).
* 30) Linde, Rudolf, von Hamburg.	* 62) Theilen, Heinr., von Neustadt-Gödens (Ostfriesl.).
31) Meire, Alcide, von Saignesgler (Bern).	63) Vogel, Cornelius, von Rotterdam.
32) Mack, Eduard, von Vevey.	64) Widmer, Rudolf, von Siegmühle (Aargau).
	* 65) Widmer, Carl, von Oberrieden.
	66) Wild, Martin, von Thuis.
	67) Wyss, Anton, von Büren (Luzern).
	* 68) Wulff, Oskar, von Reval.
	69) Zollinger, Julius, von Maur (Zürich).
	70) Zurlinden, Louis Adrian, von Eaux-vives (Genève).
b. Bauschule. I. Jahreskurs.	
71) Bar, Konrad, von Unterstrass.	
72) Braun, Rudolf, von Altona.	
73) Düniker, Ludwig, von Zürich.	
* 74) Dresler, Heinrich, von Siegen (Westphalen).	
75) Fortmann, Wilhelm, von Oldenburg.	
* 76) Frey, Julius, von Eglisau.	
* 77) Fueter, Eduard, von Bern.	
* 78) Grasset, Eugen, von Alergemont (Waadt).	
79) Grosclaude, Louis, von Loche.	
80) Heinzen, Carl, von Boston.	
* 81) Hermann, Wilhelm, von Frankfurt a. M.	
82) Hoesch, Eduard, von Basel.	
83) v. Kalbermatten, Jos., von Sitten.	

Fonte: (PADILHA, 2009, p.71)

Apêndice 4: Lista de alunos da ETH no ano escolar de 1862/1863 (cont)

84) Kirchhofer, Wih., von Altona.	135) Meley, Arnold, von Bern.
85) Ray, Rudolf, von Grandson.	136) Müller, Ludwig, von Riga.
86) Ringier, Ed., von Zolingen.	137) Ofer, Johann, von Bruneck (Tirol).
87) Staub, Carl, von Männedorf.	138) Pfiffer, Carl, von Luzern.
88) Steiner, Clemens, von Ingenbohl (Schwyz).	* 139) Quercfeldt, Hermann, von Riga.
89) Studer, Emil, von Winterthur.	140) Rolstorff, Ferd., von Griu (Norwegen).
90) Sutter, Emil, von Appenzell.	141) Roth, Alfred, von Buhler (Appenzell).
91) Weber, Otto, von Dürnten (Zürich).	142) Roge, Arnold, von Dresden.
* 92) Weis, Carl, von Wien.	143) Ruppel, Carl, von Nidda (Hessen).
93) Willich, Albert, von Oldenburg.	144) Saetren, Gunnar, von Elverum (Norwegen).
II. Jahreskurs.	
94) Borel, Eduard, von Vevey (Waadt).	* 145) Samojlowicz, Casimir, von Warschau.
95) Geiser, Arnold, von Langenthal (Bern).	146) Schenk, Robert, von Nomislaw (Schlesien).
96) Gohl, Theodor, von Aarberg (Bern).	147) Schlüssler, Heinrich, von Rastede (Oldenburg).
* 97) Pfunder, Walther, von Männedorf.	148) Segesser, Ludwig, von Luzern.
98) Scheins, Albert, von Odessa.	149) Stęczkowski, Wladislaw, von Warschau.
99) Wiest, Friedrich, von Dagmarsellen (Luzern).	* 150) Stromkoff, Niklaus, von Warschau.
100) Wüllke, Gust., von Husum (Schleswig).	* 151) Towianski, Cas., von Wilna.
III. Jahreskurs.	
101) Balthasar, Karl, von Luzern.	152) Uhl, Ed., von Newyork.
102) Becker, Theodor, von Wahlstorf (Holstein).	153) Waldner, August, von Basel.
103) Bluntschli, Friedrich, von Zürich.	154) Widmer, Joseph, von Neuenkirch (Luzern).
104) Schärer, Adolf, von Aarau.	* 155) Zellweger, Joh., von Berneck (St. Gallen).
105) Schmid, Emil, von Eglisau.	156) Zühlín, Emil, von St. Gallen.
c. Ingenieurschule. I. Jahreskurs.	
106) Ahrens, Joh., von Wobren (Holstein).	157) Alder, Emil, von Schwellbrunn (Appenzell).
107) Avé-Lallement, Ferd., von Magdeburg.	158) Altörfer, Heinrich, von Basel.
* 108) de Barros, Diogo, von Itu (Brasilien).	159) Andreæ, Friedrich, von Frankfurt a/M.
109) Beitschard, Joseph, von Schwyz.	160) Bachofen, Wilhelm, von Basel.
* 110) Bilek, Friedrich, von Hobenstadt (Mähren).	161) Beaumont, Frank, von Gent.
111) Burkowski, Valère, von Warschau.	162) Bodenheimer, Alphons, von Neuchâsse (Bern).
112) Brauer, Carl, von Hamburg.	* 163) Bong-Schmidt, Otto, von Eckernförde (Holstein).
113) Brunner, Emil, von Winterthur.	164) Burkhard, Werner, von Männedorf.
114) Fährhinder, Eugen, von Aarau.	165) Faton, Louis, von Genf.
* 115) Favre, Jos., von Genf.	166) v. Festetics, Emil, von Veröcse (Slavonien).
116) Fenili, Pio, von Grottoamare (Sardinien).	* 167) Franzius, Georg, von Fürstenau (Hannover).
117) Fiers, Alexander, von Petersburg.	* 168) Giesse, Hermann, von Wehen (Hannover).
118) Frey, Ludwig, von Dornstadt.	169) Gremard, Amadée, von Riaz (Freiburg).
119) v. Gagarin, Georg, von Odessa.	* 170) Grosschopf, Paul Rud., von Riga.
120) Gilardi, Pietro, von Montagnola.	171) Gurliit, Ed., von Bättwerder (Hamburg).
121) Glauser, Joh., von Mari (Bern).	172) Hahn, Christ, von Nürnberg.
122) Hanhart, Heinrich, von Winterthur.	* 173) Herwegb, Horace, von Baselaugst.
123) Hesse, August, von Verdon (Hannover).	* 174) Hinrichs, Wih., von Jewer (Oldenburg).
124) Hoffmann, Emil, von Wiesbaden.	175) Holz, Anton, von Baar (Zug).
125) Hofmann, Benj., von Tura (Ungarn).	176) Jassniger, Jakob, von Rajetz (Ungarn).
126) Huber, Hermann, von Dielsdorf (Zürich).	177) Küpler, Friedrich, von Bern.
127) Jegher, August, von Triest.	* 178) Lantz, Adolf, von Wiesbaden.
128) Ischner, Emil, von Stäfa.	179) Lebell, Axel, von Helsingfors (Finnland).
129) Lilien, Samuel, von Bolchow (Galizien).	* 180) Lehenstein, David, von Sull (Ungarn).
* 130) Lindt, Franz, von Bern.	181) Lienau, Ludw. Aug., von New-Yersey.
* 131) Lysakowski, Joseph, von Warschau.	182) Lücken, Günther, von Rhaude (Oldenburg).
132) Maas, Gerhard, v. Moorsee (Oldenburg).	* 183) Manthey, Wilhelm, von Christiania.
133) Mannhardt, Eugen, von Hünereu (Holstein).	* 184) Menzer, Ludwig, von Gr. Beskerck (Ungarn).
134) Meder, Guido, aus Livland.	185) Moll, Albert, von Biel (Bern).
	186) Molnár, Mich., von Gr. Beskerck (Ungarn).
	187) Muralt, Hans, von Zürich.
	188) Niederfrininger, Martin, von Feldkirch.
	* 189) Paula-Souza, Francisco, von Itu (Brasilien).
	190) Peters, Theodor, von Nordheim (Hannover).

Fonte: (PADILHA, 2010, p.72)

Apêndice 5: Ata da Prova oral de AFPS realizada em 18 de julho de 1867.

Geoffrey Carlisle, 13 July 1867.

Minister's Prüfung der Kandidaten
für das Leben der Gemeinschaft
zu Paris - Souda

Amstels die fover
Nürnberg als Kaufmann

Herb	Wien
Kell	Hollstein
Wiedemann	Knap
Soll	Brenn
Fra Hof	

Diering is een pfefferplant
 met witte bloemen.
 Het is een kruidachtige plant
 die in de tropen voorkomt.
 De bladen zijn groen en
 de bloemen zijn wit.
 Het is een gewone plant
 die in de tropen voorkomt.
 De bladen zijn groen en
 de bloemen zijn wit.

1. Spalte.
 Probenmenge 100 g. ist beauftragt in
 die Analyse nach Hydrogenperoxyd
 Verfahren bezogen zu sein. Die Quantität ist
 unbestimmt, der Prozentsatz ist
 im Rezeptur, Erzeugung der Spalte.
 Notwendig aufzuheben (90)
 G. Wiedemann

2) Луга - к Косован

[illegible]

Go

J. P. Hartney

3, Angewandte Mathematik zur Kinetik

[illegible]

(50)

Graslow.

Apêndice 6: Ata da Prova oral de AFPS realizada em 18 de julho de 1867 (cont).

3. Maßnahmen
Die gesammelten Samen bedurfen die
Säuerung der feinsten Stoffen.
Die Säuerung ist mit Zucker zu thun,
weil die Säuerung der Feinsten
und die Säuerung der Feinsten
nicht zu vermeiden ist. Die Samen
sind zu säuern. (50) Koch.
4. Analysis
Die Samen bedurfen die Säuerung der feinsten Stoffen.
Die Säuerung ist mit Zucker zu thun.
Maßnahmen: Die Samen zu säuern. (50) Koch.
5. Analysis
Die Samen bedurfen die Säuerung der feinsten Stoffen.
Die Säuerung ist mit Zucker zu thun.
Maßnahmen: Die Samen zu säuern. (50) Koch.
6. Analysis
Die Samen bedurfen die Säuerung der feinsten Stoffen.
Die Säuerung ist mit Zucker zu thun.
Maßnahmen: Die Samen zu säuern. (50) Koch.
7. Analysis
Die Samen bedurfen die Säuerung der feinsten Stoffen.
Die Säuerung ist mit Zucker zu thun.
Maßnahmen: Die Samen zu säuern. (50) Koch.
8. Analysis
Die Samen bedurfen die Säuerung der feinsten Stoffen.
Die Säuerung ist mit Zucker zu thun.
Maßnahmen: Die Samen zu säuern. (50) Koch.
9. Chemie
Die Samen bedurfen die Säuerung der feinsten Stoffen.
Die Säuerung ist mit Zucker zu thun.
Maßnahmen: Die Samen zu säuern. (50) Koch.

Fonte: (PADILHA, 2010, p.79)

Apêndice 7: Ata da Prova oral de AFPS realizada em 18 de julho de 1867; quadro geral de notas (cont).

*Zusammenstellung
des Resultats der Prüfungsvorgänge in Halle, den 18. Juli 1867.*

1. Math. und Mechanik, schriftl. Arbeit	8.40	=	320
Mündl. Arbeit	40+90	=	65
Mündl. Prüfung			90
Angewandte Mathematik & Mechanik, schriftl.			50
Mündl.			50
2. Mathematik, schriftl.			60
Mündl.			50
3. Physik, schriftl.			55
Mündl.			50
4. Physik, schriftl.			60
Mündl.			50
5. Physik, schriftl.			40
Mündl.			40
6. Astronomie, schriftl.	10+60+0	=	25
Mündl.			70
7. Astronomie, schriftl.			50
Mündl.			60
8. Physik			90
9. Geologie und Mineralogie, schriftl.			40
Mündl.			40
Summe der Punkte der Prüfung: 27.			1415
Resultat der Gesamtprüfung:			$\frac{1415}{27} = 52 \frac{1}{3}$
Erklärung: Die Prüfung ist in Ordnung, das Resultat ist zu befriedigen.			
Halle, den 18. Juli 1867.			
Präsident	Minister	J. Schumacher	
König.	Schell.		
Karl.	Wetzel.		
H. Doll.			

Fonte: (PADILHA, 2010, p.80)

Apêndice 8: Ata da Prova oral de AFPS realizada em 18 de julho de 1867. Página final, assinada pelo candidato onde consta que o diploma não será omitido.

Ich erkläre hiermit auf Ehrenwort, daß ich
zu der Prüfung in je drei Tagen
bestanden Lösungen der Aufgaben und der
1. angenommenen Monarchie & Staatsverfassung,
2. der
3. der öffentlichen Verwaltung
selbstständig und ohne fremde Hilfe gefertigt
habe. Braunschweig, den 18. Juli 1867.
A. Paul

Fonte: (PADILHA, 2010, p.81)

Apêndice 9: Carta do chefe do arquivo (Dr Klaus-Peter Hoepke) da Universidade de Karlsruhe, onde consta que Antônio Francisco de Paula Souza foi reprovado nos exames finais, e que não se inscreveu para repetir as provas e que nenhum diploma foi emitido.



UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
 Rektorat
 - Universitätsarchiv -
 Kollegium am Schloß, Bau II

Universitat Karlsruhe (TH), Karszen 12, Postfach 8000, D-7500 Karlsruhe

Institut für Werkstoffe
 -Herrn Dr. Ulrich Waldherr-
 Postfach 10 21 48
 W-4630 Bochum 1

Ar. (Bitte bei Antwort angeben) Sachbearbeiter/in Dr. Hoepke Tel.: 07121 609-3494 Datum 24.4.92

Antonio Francisco de Paula Souza

: Ihre Anfrage vom 19.3., mein Zwischenbescheid vom 20.3.

Sehr geehrter Herr Waldherr

/ Im Anschluß übersende ich Ihnen die beiden Jahreszeugnisse der Ingenieurschule;
 von der Chemischen Schule sind keine Jahreszeugnisse mehr vorhanden.

/ Ferner erhalten Sie Kopien von der Prüfungsakte. Da Souza durchfiel, recherchierte
 ich, ob er bei uns die Prüfung wiederholte. Ausweislich der Liste von Schülern,
 die ihr Diplom ablegten oder sich ein Studienzeugnis ausstellen ließen, war das
 nicht der Fall, auch besagtes Zeugnis ließ er sich nicht ausstellen.

Eine Rechnung einschl. Zahlungsbeleg sowie Gebührenbeleg der Post über insgesam
 28,- DM Auslagen füge ich bei. Ich wäre Ihnen sehr verbunden, wenn Sie den von
 mir ausgelegten Betrag gelegentlich auf mein Konto überweisen wollten: Deutsche
 Bank Ettlingen, Kto.-Nr. 729 76 4, BLZ 660 700 04.

Könnten Sie wohl freundlicherweise veranlassen, daß die Escola Politecnica uns
 ein Belegexemplar schickt, falls Sie so etwas wie eine Souza-Gedenkschrift ver-
 öffentlicht? Denn hier ist schon mancher schlecht aus dem Rennen gegangen, der
 hinterher mit beachtlichen Leistungen aufwartete, und wir wollen das Andenken
 unserer Schüler dennoch nicht schuldig bleiben.

Mit freundlichen Grüßen,

Klaus-Peter Hoepke
 (PD Dr. Klaus - Peter Hoepke)
 Universitätsarchivar

Anlagen

Bankverbindung:
 Baden-Württembergische Bank Karlsruhe
 Kto.-Nr. 490 8341 03 (BLZ 660 800 80)

Telefax: 721 186 - UNIKar
 Telefon: 71-721 186
 Telefax: 908-42 90

Sie erreichen uns auf den Straßenbahn-
 Linien 1, 2, 3, 4 und 6.
 Haltestelle „Berliner Platz/Universität“

Fonte: (PADILHA, 2010, p.82)

Apêndice 10: Folha de rosto da ficha escolar de Antônio Francisco de Paula Souza na ETH. [AETH1]

82 - KLA. A. J. 387

Paul de Souza, Ant. Francisco

Abtheilung: I

Jahreskurs: <i>I</i>	Schuljahr: <i>1862</i>
" " <i>II</i>	" " <i>1863/64</i>
" " _____	" " _____

Geboren:

Heimath: *St. Paul de Paulo Brasilien*

Eltern oder Vormund:

Wohnung in Zürich:

Bisherige Ausbildung: *Folgte d. h. h. h. h.*

Deponirte Zeugnisse.

Folgt d. h. h. h. h.

Langezeit. h. h. h. h. h. h. h.

Apêndice 11: Ficha escolar de Antônio Francisco de Paula Souza na ETH. (p.2)
[AETH1]

[illegible]

Apêndice 12: Ficha escolar de Antônio Francisco de Paula Souza na ETH. (p.3)
[AETH1]

[illegible]

Apêndice 13: Ficha escolar de Antônio Francisco de Paula Souza na ETH. (p. 5)
[AETH1]

C. Quartalberichte							Bemerkungen
Fächer?	Lernz.	I Quartal	II Quartal	III Quartal	IV Quartal	Abwesenheit (Fehltag)	
		Tag	Frei	Tag	Frei	Tag	
Off. Ref.	Christoffel	4	1	1			I Quartal: Lectionen
Ref. Ref.	Christoffel	5	11	9	21		II Quartal: Besprechung etc.
Ref. Ref.	Christoffel	2	4	2	11		III Quartal: Besprechung
Ref. Ref.	Christoffel	21	3	4	4		
Ref. Ref.	Christoffel			1	2		
Ref. Ref.	Christoffel	3	2	1	1		
Ref. Ref.	Christoffel						
Ref. Ref.	Christoffel	11	3	11	21		
Ref. Ref.	Christoffel	4		1	1		
Ref. Ref.	Christoffel	11	3	21	3		
		Abwesen	Abwesen	Abwesen	Abwesen	Abwesen	

B. Disciplinarisches Verhalten.

Apêndice 14 – Carta do Capitão Antônio Paes de Barros e de sua esposa Gertrudes Eufrosina Paes de Barros dirigida aos seus filhos Antônio Paes de Barros e Diogo Antônio de Barros.

“ Meus caros filhos

14,7 hrs. Itú, 27 de Agto. 1855

Muito temos sofrido com a ausência de nossos filhos, quantas saudades. Vossa Mãe ainda chora quase todos os dias. Nossa única consolação será, se meus filhos aproveitarem e se comportarem bem. Nós passamos como velhos; vossa Mãe sempre doente. Sentimos que não nos escrevêsseis de Lisboa, de onde o Snr Braboza nos deu noticias de meus filhos. Muito desejamos saber como foram tratados na viagem, e lá como se acham; tudo miudamente desejamos saber. Meus filhos cuidai com esmero em vossos estudos. Respeitai e obedecei a vossos Mestres e ao Snr. Hirsch como a vosso pai, e respeitai sempre os mais velhos. Nada obreis sem primeiro pensar, senão viríeis a ter vergonha do que que quereis fazer. Não tomeis amizade com meninos turbulentos ou exagerados. Nunca mintas: falai a verdade sempre, ainda que seja contra vós. Não te metas em intrigas: cada um responde por suas ações. Não vos deixeis iludir pelos mais espertos, porque não é bom fiar-se em palavras bonitas. Nunca vos esqueçais da religião de vossos pais; ouvi missa aos Domingos e dias santos; confessai-vos ao menos uma vez a cada ano; não tenhais acanhamento ou vergonha de ser católico: tolerai a todos na sua religião para que vos tolerem, e sobre isso não converseis com qualquer pessoa: quando precisardes de conselho a esse respeito, procurai algum Católico instruído e honesto para vos esclarecer. Todos os dias quando os acordardes seja a primeira coisa dar graças a Deus por vos ter conservado e pedir graça e força para cumprir vossas obrigações, o mesmo a noite quando vos deitardes para dormir. Deveis crer e estar certo que Deus vê todas as nossas ações, e até nossos pensamentos. Fugi e evitai todos que possa vos distrair de vossos estudos, e vos comprometer em atos vergonhosos. Tratai com carinho e amor vosso irmão e protegei-o sempre; vós sois mais velho deveis tolerar suas impertinências e guiá-lo para o bem com brandura e não com aspereza, para vendo ele um amigo, seja dócil e não se revolte. Sede econômico, gastai só o que for necessário, que assim não sofrereis vexame e tereis crédito. Não sejas importuno nem pesado aos outros. Não ocupes a outrem naquilo que podeis fazer, não sejas preguiçoso. Nada prometas sem reflexão para não faltar. Enfim amai a Deus sobre tudo, e ao próximo, como a vós, que sereis feliz mesmo nesta vida e na outra tereis infinita recompensa. E que prazer não terão vosso pais e parentes se depois de alguns anos tornarem a ver seus filhos instruídos e bem comportados para lhes adoçarem os incômodos do resto de seus dias! Nada poderá igualar nossa satisfação. Aceitai nossas bênçãos. Deus vos proteja em graças, é o desejo de vossos Pais mot. Amos.

Antônio

Gertrudes

PS. Aceitai de todos muitas lembranças e todos se lembram de vós com saudades.

PS. Vossa mãe vos pede que ao menos uma vez cada mês leiais esta”

Apêndice 15 – Lista de Alunos da Universidade de Zurique no periodo de 1833-1949

** C18 **		RZU <--> STAATSARCHIV		** C18 **		Matrikel der Universitaet Zuerich 1833 - 1949		** C18 **	
IMMATR.-NRN	NAME VORNAME	SEX	GEB- JAHR	ORT	H E R K U N F T S - R E G I O N	L A N D	STUDIEN - FACH IMMATRIKULIERT		
52436	PATTY EARLE EUGENE JR.	M	1927	VAN NUYS	CALIF.	USA	PHIL.I GERM.	WS 1947	
22231	PATULOFF WALDEMAR	M	1884	LIDA		RUSSLAND	CHEM	WS 1913	
30664	PATZIG GABRIELE	M	1904	DRESDEN		D	NAT.OEK.	SS 1924	
49872	PAUCKER KURT	M	1924			D (STAATENLOS)	PHIL.II CHEM.	WS 1945	
02554	PAULA SOUZA ANTON FRANZ	M		ITU		BRASILIE	PHIL	SS 1863	
02625	PAULA SOUZA FRANCISCO	M		ITU		BRASILIE	PHIL	WS 1863	
11725	PAULCKE WILHELM	M	1873	LEIPZIG		D	PHIL	SS 1897	
48592	PAULI ALFRED	M	1924	VECHIGEN	BE	CH	NAT.OEK.	SS 1944	
05720	PAULI EUGEN	M	1859	STETTIN	PREUSSEN	D	IUR	SS 1879	
52917/47806/ /80438/	PAULI HANNES	M	1924	VILLNACHERN	AG	CH	MED.	WS 1947	
47806	PAULI HANS	M	1924	VILLNACHERN	AG	CH	MED.	WS 1943	
50438/47806/	PAULI HANS	M	1924	VILLNACHERN	AG	CH	MED.	WS 1945	
04042	PAULI RICHARD	M	1850	LANDAU	BAYERN	CH	MED	WS 1871	
31656	PAULI WAI TFR	M	1906	VILLNACHERN	AARGAU	CH	MED.	WS 1925	

Fonte: Padilha (2009)

Apendice 16 – Arquivos referentes à Paula Souza na Escola Politécnica de Karlsruhe.
[AKIT II], [AKIT III]

KIT-Archiv

Antônio Francisco de Paula Souza

21003, 2: Einschreibebuch der Schüler, Studienjahr 1864/65, Neuimmatrikulierte, Heft 2:

Matr. Nr.	Vorname	Nachname	Geburtsort	Geburtsjahr	Religion	Stand	Heimatort	Land	Religion	Stand	Heimatort	Land
14	Antônio	F. Souza	1864	1864	1864	1864	1864	1864	1864	1864	1864	1864

21003, 2: Einschreibebuch der Schüler, Studienjahr 1865/66, Rückmelder, Heft 1:

Matr. Nr.	Vorname	Nachname	Geburtsort	Geburtsjahr	Religion	Stand	Heimatort	Land	Religion	Stand	Heimatort	Land
14	Antônio	F. Souza	1864	1864	1864	1864	1864	1864	1864	1864	1864	1864

Apêndice 17 – Relatório referente à Paula Souza na Escola Politécnica de Karlsruhe
[AKIT I]

Noten

sehr gut
sehr gut
mittel
schlecht

Studium Jahr 18 6/7

PolYTECHNISCHE SCHULE. Winter Semester

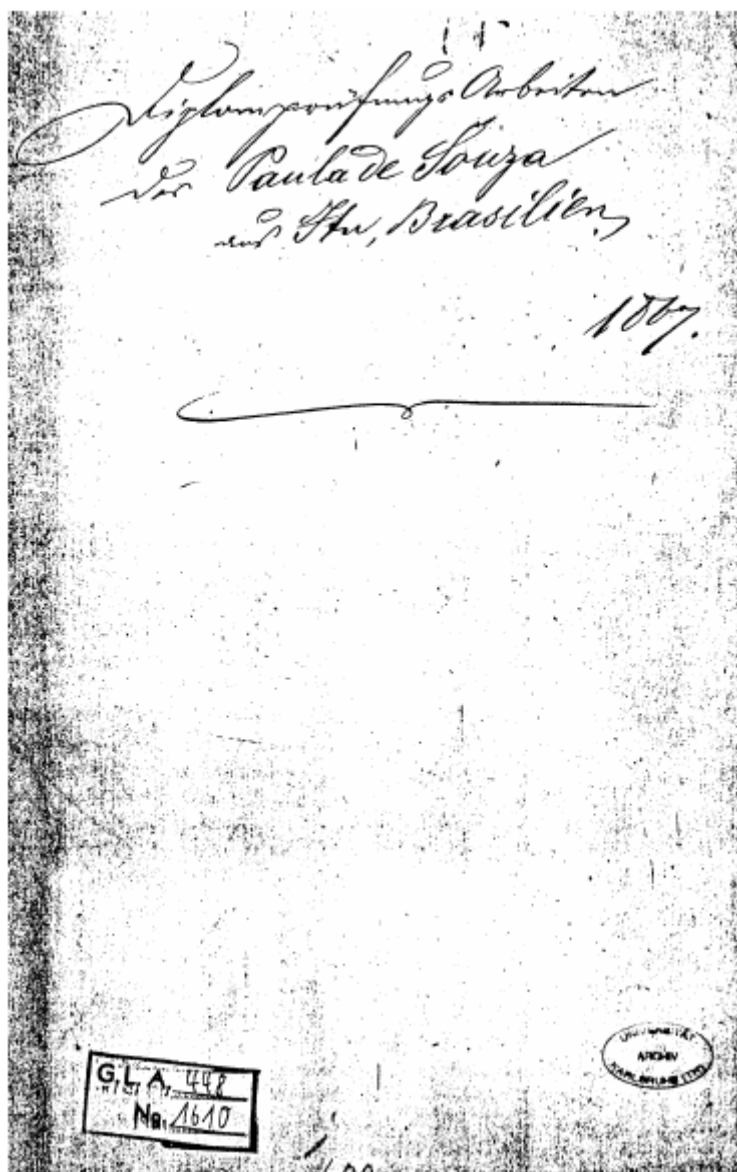
Jahres - Bericht

Antonia Paula - Souza aus Lu (Brasilien)

Schüler der Ingenieurschule III. Curs

Unterrichtsgegenstände	Stunden besuch	Reife	Fachkunde	Beitragen	Name des Lehrers
Math. & Phys. Lehrb. III	3. vngut u. fleißig				(Hansen)
Größen-Lehrbuch					
Math. & Phys. Lehrb. II	3. vngut u. fleißig				H. Hansen
Prakt. Geometrie	3. vngut u. fleißig				H. Hansen
Größen-Lehrbuch	3. vngut u. fleißig				H. Hansen
Chemie	3. vngut u. fleißig				H. Hansen

Apêndice 18 – Página de rosto dos exames finais de Antônio Francisco de Paula Souza na Escola Politécnica de Karlsruhe



Fonte: Padilha (2009)

415

Apêndice 20 - Ata da prova oral de Antônio Francisco de Paula Souza, realizada em 18 de julho de 1867. (Continuação)

3. Maßnahmen.
Die gesammelten Sprachen beauftragen die
Schriftführung der Gelehrten Professor
die Aufzeichnung der mündlichen Rede,
sowie die Schriftführung der Prosasprachen
und Prosasprachen. Diese Sprachen
werden nun in geeigneter Weise bearbeitet.
(50) Harb.
4. Analysen
Die Sprachen beauftragen die Schriftführung der mündlichen Rede der
auf die Aufzeichnung der mündlichen Rede der
Haupt. Diese Aufzeichnung geschieht. [50] Harb.
5. Analysen der Sprachen
Die Sprachen beauftragen die Schriftführung der mündlichen Rede der
auf die Aufzeichnung der mündlichen Rede der
Haupt. Diese Aufzeichnung geschieht. [40] Harb.
6. Analysen der Sprachen
Die Sprachen beauftragen die Schriftführung der mündlichen Rede der
auf die Aufzeichnung der mündlichen Rede der
Haupt. Diese Aufzeichnung geschieht. [50] Harb.
7. Analysen der Sprachen
Die Sprachen beauftragen die Schriftführung der mündlichen Rede der
auf die Aufzeichnung der mündlichen Rede der
Haupt. Diese Aufzeichnung geschieht. [70] Harb.
8. Handliche Grammatik
Die Sprachen beauftragen die Schriftführung der mündlichen Rede der
auf die Aufzeichnung der mündlichen Rede der
Haupt. Diese Aufzeichnung geschieht. [80] Harb.
9. Chemie
Die Sprachen beauftragen die Schriftführung der mündlichen Rede der
auf die Aufzeichnung der mündlichen Rede der
Haupt. Diese Aufzeichnung geschieht. [60] Harb.

Fonte: Padilha (2009)

Apêndice 21 – Ata da prova oral de Antônio Francisco de Paula Souza, realizada em 18 de julho de 1867; quadro geral de notas. (Continuação)

*Zusammenstellung
des Resultats der Prüfung von Paula Souza*

1. Math. des Maschinenbau, schriftl. Arbeit	8.40	=	520
schriftl. Arbeit	40+90	=	65
mündl. Prüfung			90
Angewandte Physik & Maschinenlehre, schriftl.			50
mündl.			50
2. Maschinenbau, schriftl.			60
mündl.			50
3. Analyt., schriftl.			55
mündl.			50
Analyt. Geometrie, schriftl.			60
mündl.			50
4. Analyt. Mechanik, schriftl.			40
mündl.			40
5. Geometrie Geometrie, schriftl.	10+60+0		70
mündl.	3		70
6. Schriftl. Geometrie, schriftl.			60
mündl.			60
7. Physik			90
8. Geometrie des Mineralog., mündl.			60
Summe der Punkte der Probe: 27.			1413
Resultat der Gesamtpfung:	$\frac{1413}{27}$	=	52 $\frac{1}{3}$

*Erklärung: Prüfung der Commission, dass die Commission
des Examen nicht erfüllt wurde.*

Karlsruhe, den 18. Juli 1867.

Graschhof
Knopf
Hof
St. Doll

Meinert
Schell
Wetzlar

J. Schaub

Fonte: Padilha (2009)

Apêndice 22 – Ata da prova oral de Antônio Francisco de Paula Souza, realizada em 18 de julho de 1867. Página final, assinada pelo candidato, constando que o diploma não será emitido.

Ich erkläre hiermit öffentlich, daß ich
 die zur Diplomprüfung in der Reihe Natur-
 wissenschaften vorgegebenen Aufgaben nicht zu
 1. Angewandten Mechanik & Stoffkunde,
 2. Analysis,
 3. Ausgewählten Geometrie
 selbstständig oder fremde Hülfe in Anspruch
 nehmen, Braunschweig, den 18. Juli 1867.
 A. F. de Paula Souza

Fonte: Padilha (2009)

Apêndice 23 – Programa da Disciplina de Cálculo Infinitesimal da Escola Politécnica de São Paulo, dos anos letivos 1899-1900.

CÁLCULO INFINITESIMAL Noções Preliminares

- Funções e sua classificação. Noções sobre a continuidade.
- Método dos limites – Conceção de Newton.
- Método infinitesimal – Conceção de Leibniz
- Método das derivadas – Conceção de Lagrange
- Considerações sobre a análise ordinária ou algébrica e a análise transcendente ou infinitesimal. Distinção entre o método e o cálculo.

CÁLCULO DIFERENCIAL Funções explícitas de uma só variável independente

- Definições e notações. Marcha uniforme podendo conduzir as diferenciais e derivadas das dez funções simples.
- Teorema das funções inversas. Diferenciação das funções de funções. Diferenciação das funções compostas.
- Diferenciação de uma soma, de um produto, de um quociente, de uma potência qualquer. Solução destas questões pelo princípio de diferenciação de funções compostas.
- Diferenciação das funções logarítmicas e exponenciais.
- Diferenciação das funções circulares.
- Proposições relativas às derivadas das funções de uma só variável
- Diferenciações sucessivas. Das diferenciais e derivadas de diversas ordens. Aplicação às funções produto, potência, exponencial, logarítmica e circular.

Funções Explícitas de duas ou mais variáveis independentes

- Definições e notações
- Diferencial Parcial, diferencial total. Teorema das funções homogêneas.
- Diferenciais e derivadas sucessivas. Diferenciais e derivadas parciais e totais de diversas ordens. Teorema relativo à ordem das diferenciações. Fórmula geral simbólica da diferencial total.
- Diferenciais totais de diversas ordens de uma função composta de funções de algumas variáveis independentes.

Funções Implícitas de uma ou mais de uma variável independente

- Diferenciação das funções implícitas isoladas. Diferenciação das funções implícitas simultâneas. Eliminação das constantes ou parâmetros.
- Diferenciações sucessivas. Diferenciais de diversas ordens.
- Caso das funções de uma só variável: caso das funções de algumas variáveis.

APLICAÇÕES ANALÍTICAS DO CÁLCULO DIFERENCIAL

Desenvolvimento das funções em série

- Fórmula de Taylor para as funções de uma só variável. Diferentes formas do resto. Condição de convergência da série. Introdução das diferenciais. Fórmula de Maclaurin para as funções de uma só variável.
- Extensão das fórmulas de Taylor e Maclaurin às funções de algumas variáveis.
- Aplicação da fórmula de Maclaurin a alguns desenvolvimentos importantes, tais como fórmula do binômio para expoente qualquer, funções exponenciais, $l(1+x)$, $\text{sen } x$, $\cos x$, $\text{arc. tang } x$, etc.

Avaliação dos símbolos indeterminados

- Expressões que se apresentam sob a forma $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Regra de L'Hospital. Outros símbolos de indeterminação $-0 \times \infty$, $\infty - \infty$, 0^∞ , ∞^0 , 1^∞ . Casos particulares: indeterminação real.
- Funções implícitas: marcha a seguir quando a derivada $\frac{dy}{dx}$ se apresenta na forma $\frac{0}{0}$.

Teoria dos Máximos e Mínimos

- Noções preliminares.
- Máximos e mínimos das funções explícitas. Caso de uma variável: Caso de algumas variáveis.
- Máximos e mínimos das funções implícitas. Caso de uma variável: Casos de algumas variáveis

CÁLCULO INTEGRAL

Integração das Diferenciais Explícitas

- Definições e teoremas fundamentais. Integral, limite de uma integral. Integral indefinida. Integral definida. Integração imediata.
- Processo de integração – 1º por decomposição – 2º por substituição – 3º por partes. Combinação dos métodos.

Diferenciais Algébricas Racionais

- Decomposição de uma fração algébrica em frações simples.
- Integração das diferenciais algébricas racionais. Caso das funções de forma inteira. Caso das funções de forma fracionária. Formas diferenciais a cuja integração se reduz a das funções diferenciais algébricas fracionárias.

Diferenciais Algébricas Irracionais

- Integração das funções que só contém irracionais monômios. Funções que contém um radical de 2º grau. Casos que se reduzem aos anteriores.
- Integração das diferenciais binomiais. Casos de integrabilidade. Fórmulas de redução.

Diferenciais Transcendentes

- Integração das funções que se reduzem a integração de funções algébricas. Integral de $z^n Pdx$. Integração de algumas funções exponenciais e circulares.
- Integração das diferenciais da forma $\sin^m x \cos^n x dx$. Fórmulas de redução.

Integrais Definidas

- Princípios gerais. Sua aplicação ao cálculo das integrais definidas. Integrais múltiplas. Integrais duplas. Integrais triplas. Teorema relativo a ordem das integrações.
- Cálculo aproximado das integrais definidas. Fórmulas dos trapézios, de Poncelet, de Parmentier e de Simpson.

Aplicações Geométricas do Cálculo Diferencial

- Tangentes e normais às curvas planas. Equações respectivas. Comprimento da sub-tangente, subnormal, etc. Grau da equação da tangente. Problemas. Assíntotas.
- Análise das curvas planas – 1º Do sentido da concavidade. 2º Dos pontos singulares.
- Diferencial do arco, da área e da inclinação de uma curva plana.
- Curvatura das curvas planas. Raio de Curvatura. Centro de curvatura.
- Teoria do contato das curvas planas. Curvas osculatrizes. Círculo osculador.
- Evolutas e evolventes em relação a curvas planas. Curvas evolventes.
- Curvas reversas. Raio e ângulo de torção.
- Superfícies curvas. Plano tangente, normal.
- Superfícies involventes Curvatura das superfícies. Caracteres analíticos dos principais famílias de superfícies.

Aplicações Geométricas do Cálculo Integral

- Retificação das curvas planas e das curvas reversas.
- Quadratura das curvas planas.
- Quadratura das superfícies curvas em geral. Casos da Superfície de revolução.
- Cubatura dos volumes geral. Caso dos sólidos de revolução.

Equações Diferenciais a duas variáveis

- Definições. Equações diferenciais de primeira ordem. Integração das equações diferenciais de primeira ordem e do primeiro grau. Separação das variáveis. Funções homogêneas. Equações lineares.

Fonte: Annuario da Escola Polytechnica de São Paulo para o anno de 1900.

Apêndice 24 – Programa da disciplina Cálculo Diferencial e Integral da Escola Politécnica de São Paulo, publicado em 1932.

Cálculo Diferencial e Integral

Introdução

- a) Números reais: racionais, irracionais e relativos. Números imaginários, expressões imaginárias ou complexas; expressões imaginárias conjugadas; módulo e argumentos. Representação gráfica das quantidades imaginárias;
- b) Funções: definição e classificação. Limite, definição e proposições. Primeiras noções sobre o que se deve entender por quantidade infinitamente pequena. Continuidade das funções; definição e proposições.
- c) Recapitulação sumária sobre as séries; definições; utilidade das series. Convergência das séries: proposições mais importantes. Séries exponenciais, logarítmicas e circulares.

Análise Transcendente ou Infinitesimal

- d) Análise ordinária: método e cálculo: método empregado pelos antigos ou método da exaustão. Método de Leibniz ou infinitesimal; cálculo infinitesimal e sua divisão; notações respectivas; infinitamente pequenos de diversas ordens; proposições sobre os infinitamente pequenos.
- e) Método de Newton; método dos limites e das fluxões; notações. Método de Lagrange ou das derivadas; propriedades das derivadas
- f) Confronto entre os três métodos, interpretação geométrica. Notícias sobre outros métodos.

Cálculo Diferencial

- 1 – Marcha uniforme para a diferenciação e derivação das funções explícitas de uma variável independente. Funções inversas e teoremas relativos. Diferenciação e derivação de funções de funções. Derivação e diferenciação das funções compostas de funções de uma variável independente. Notações.
- 2 – Diferenciação e derivação das funções algébricas e transcendent.
- 3 – Diferenciação e derivação sucessiva das funções explícitas de uma variável independente; caso da potência inteira, da exponencial, da logarítmica, do seno e do cosseno. Fórmula de Leibnitz.
- 4 – Derivadas e diferenciais de 1ª ordem das funções explícitas de mais de uma variável independente; diferenciais e derivadas de diversas ordens; representação simbólica da diferencial total de ordem n. Ordem de diferenciação. Notações
- 5 – Teorema das Funções Homogêneas. Diferenciais totais de diversas ordens de uma função composta de funções de mais de uma variável independente.
- 6 – Diferenciais de primeira ordem e de ordem superior das funções implícitas isoladas e simultâneas.
- 7 – Eliminação das constantes; primeiras noções sobre equações diferenciais implícitas. Derivas dos determinantes. Determinantes funcionais.
- 8 – Funções de uma variável imaginária. Séries de termos imaginários. Derivadas das funções de variável imaginária. Fórmula de Euler.
- 9 – Funções Hiperbólicas; definições e propriedades; representação gráfica. Diferenciação das funções hiperbólicas.

10 – Mudança de variáveis: caso das funções de uma só variável independente; caso das funções de mais de uma variável independente;

Aplicações Analíticas do Cálculo Diferencial

a) Desenvolvimento em séries

11- Fórmula de Taylor para as funções de uma variável independente; diferentes formas do resto. Fórmulas de Maclaurin para as funções de uma só variável independente.

12 – Extensão das fórmulas de Taylor e Maclaurin às funções de duas variáveis independentes.

13 – Aplicação da fórmula de Maclaurin ao desenvolvimento do Binômio e ao desenvolvimento das funções exponenciais, logarítmicas e circulares.

b) Formas Indeterminadas

14 – Exemplos de expressões de uma variável que se apresentam sob qualquer das formas indeterminadas. O que se entende por verdadeiro valor dessa expressões; caso das formas: $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$; regra de l'Hospital. Formas $-\infty\infty$ e $0 \cdot \infty$; redução às formas anteriores. Formas 0^0 , ∞^0 e $l\infty$; redução à forma $0 \cdot \infty$; Verdadeiro valor de $\frac{dy}{dx}$ nas funções implícitas quando se torna em $\frac{0}{0}$.

Exemplos de aplicação das séries à determinação do verdadeiro valor das expressões que se apresentam sob forma indeterminada. Verdadeiro valor das funções de mais de uma variável.

c) Máximos e mínimos

15 – Máximos e mínimos das funções explícitas de uma e de mais de uma variável independente. Máximos e mínimos das funções implícitas de uma e mais variáveis independentes.

Aplicações Geométricas do Cálculo Diferencial

a) Curvas Planas

16 – Tangente, normal e assíntotas em coordenadas cartesianas e polares.

17 – Análise das curvas planas; 1) do sentido da concavidade; 2) dos pontos singulares.

18 - Diferencial do arco, da área e da inclinação de uma curva plana.

19 - Curvatura das curvas planas; raio e centro de curvatura.

20 - Contato das curvas planas. Curvas osculatrizes; reta osculatriz, círculo osculador e parábolas osculatrizes.

21 – Evolutas e evolventes das curvas planas. Curvas envolventes ou envoltórias.

b) Curvas Reversas

22 – Tangente e plano tangente. Plano normal. Diferencial do arco de uma curva reversa.

23 – Plano osculador; definições, equação e propriedades. Normal principal e binormal.

24 – Curvatura das curvas reversas; segunda curvatura ou curvatura de torção.

25 – Contato das curvas reversas; esfera osculatriz; círculo osculador.

c) Superfícies Curvas

- 26 – Plano tangente e normal. Aplicação à esfera e às superfícies regradas.
- 27 – Contato das superfícies. Superfícies envolventes.
- 28 – Curvatura das superfícies: teorema de Euler e de Meunier.

Cálculo Integral

a) Funções diferenciais explícitas

- 29 - Integral indefinida e integral definida: definições; notações; interpretação geométrica. Propriedades das integrais.

Integrais Indefinidas

- 30 – Integração imediata. Processos ou métodos de integração; 1) por decomposição; 2) por partes; 3) por substituição; 4) por séries. Série de J.Bernoulli. Integração das funções hiperbólicas.
- 31 – Decomposição de uma fração algébrica racional; determinação das constantes das frações simples.
- 32 – Integração das diferenciais algébricas racionais de forma inteira e de forma fracionária.
- 33 – Integração das diferenciais algébricas irracionais: 1) funções que somente contém irracionais monomiais; 2) funções que contém a raiz quadrada de um trinômio do 2º grau; casos que se reduzem aos anteriores; 3) funções diferenciais binomiais; casos de integrabilidade; formas de redução.
- 34 – Integração das funções diferenciais transcendentais que se podem reduzir à funções algébricas: tipos dessas diferenciais. Integração da expressão $z^n P dx$.
- 35 – Integração das funções trigonométricas: $\operatorname{sen}^m x dx$, $\cos^m x dx$, $\operatorname{tg}^m x dx$, $\operatorname{cotg}^m x dx$, $\operatorname{sen}^m x \cdot \cos^m \mu x dx$. Fórmulas de redução.

Integrais Definidas

- 36 – Limites de integração infinitos. Integrais das funções que se tornam infinitas para os limites ou entre os limites de integração. Diferenciação e integração sob o sinal $\int$. Integrais duplas, trípticas e múltiplas; ordem da integração.
- 37 – Aplicação às integrais definidas dos desenvolvimentos em série. Séries de Fourier. Noções sobre a integração das funções de variável imaginária.
- 38 – Cálculo aproximado das integrais definidas, fórmula dos trapézios, de Poncelet, Parmentier e de Simpson.
- 39 – Cálculo numérico de uma área plana por processo mecânico; integradores em geral; planímetro de Amsler. Noções sobre a integração gráfica; curvas integrais, constante de integração; integrais de diversas ordens. Integrafos.

Aplicações Geométricas do Cálculo Integral

- 40 – Retificação das curvas planas; retificação da elipse: tipo das integrais denominadas elíticas; retificação de outras curvas planas. Retificação das curvas reversas.
- 41 – Quadratura das curvas planas; aplicação ao círculo, elipse, hipérbole e parábola.

42 – Quadratura das superfícies; caso das superfícies de revolução; caso de superfícies quaisquer.

43 – Cubatura dos volumes; caso dos sólidos de revolução; caso de sólidos quaisquer.

Funções diferenciais implícitas ou equações diferenciais propriamente ditas

44 – Origem, definição e classificação das equações diferenciais. Solução geral, particular e singular de uma equação diferencial de 1ª ordem a duas variáveis.

45 – Integração das equações diferenciais isoladas de primeira ordem e do primeiro grau pela separação das variáveis; casos em que se pode fazer essa separação.

46 – Condições para que uma equação diferencial de duas variáveis seja uma equação diferencial exata. Fórmula conduzindo à integração das equações diferenciais exatas. Caso em que a equação diferencial, além de exata, é também homogênea. Fatores integrantes; definição. Casos especiais de determinação dos fatores integrantes

47 – Equações diferenciais de 1ª ordem, mas de grau superior ao primeiro; casos principais em que se pode determinar a solução geral; equações de Monge e de Clairaut. Soluções singulares das equações diferentes de 1ª ordem; processos para a determinação dessas soluções.

48 – Equações diferenciais de ordem superior a primeira; forma geral dessas equações. Equações lineares; definição e propriedades gerais.

49 – Estudo especial das equações lineares de primeira e de segunda ordem. Equações que se podem reduzir a equações lineares.

50 – Equações de ordem superior à primeira que são integradas por processos particulares ou especiais. Aplicação das séries à integração dessas equações.

51 – Equações diferenciais simultâneas de 1ª ordem e do primeiro grau à uma variável independente. Noções sobre as equações diferenciais simultâneas de ordem superior à primeira.

52 – Equações diferenciais a três variáveis: equações diferenciais exatas; equações diferenciais exatas e homogêneas. Condições de integrabilidade.

53 – Equações diferenciais parciais; caso das equações de 1ª ordem; caso das equações de 2ª ordem.

54 – Aplicações geométricas da integração das equações diferenciais.

Fonte: Anuario da Escola Polytechnica de São Paulo para o anno de 1932.

ANEXO G – CADEIRAS DOS CURSOS DA ESCOLA CENTRAL

REGULAMENTO DE 1858

Ensino Preparatório:

1ª Aula: francês e latim (gramática, tradução e leitura)
2ª Aula: história, geografia e cronologia.
3ª Aula: aritmética e metrologia.
Elementos de álgebra até as equações do 1º grau inclusive. Geometria

1º) Curso Matemático e de Ciências Físicas e Naturais.

1º ano

1ª Cadeira: álgebra (continuação, inclusive álgebra superior), trigonometria plana, geometria analítica.
2ª Cadeira: física experimental e meteorologia.
- Aula de desenho linear, topográfico e de paisagem.

2º ano

1ª Cadeira: Geometria Descritiva.
Cálculo diferencial, integral, das probabilidades, das variações e diferenças finitas.
2ª Cadeira: Química.
- Aula de desenho descritivo e topográfico

3º ano

1ª cadeira: Mecânica Racional aplicada às máquinas em geral.
Máquinas de vapor e suas aplicações.
2ª Cadeira: Mineralogia e Geologia
- Aula de desenho de máquinas

4º ano

1ª Cadeira: Trigonometria Esférica.
Ótica, Astronomia, Geodesia.
2ª Cadeira: Botânica e Zoologia
- Aula de desenho geográfico

2º) Curso Suplementar de Engenharia Civil.

1º ano

1ª Cadeira: Mecânica Aplicada.
Arquitetura Civil, Construção de Obra de Pedra, Madeira e ferro; estudo dos materiais correspondentes e suas aplicações.
Abertura, calçamento, conservação e reparação de estradas.
Vias férreas
Aterros e dessecação de pântanos.
2ª Cadeira: Montanhística e Metalurgia
- Aula de desenho de arquitetura e execução de projetos.

2º ano

1ª Cadeira: Canais navegáveis, estudo dos materiais empregados nesta espécie de obras. Regimento e melhoramento dos portos, rios e barras, e sua desobstrução.
 Derivação e encanamentos de águas
 Aquedutos, fontes e poços artesanais.
 Construções relativas a portos marítimos, molhes, diques, faróis, obras de segurança das encostas contra a força e velocidade dos ventos e das águas.
 - Aula de desenho de construções e de máquinas hidráulicas.

REGULAMENTO DE 1860

1º) Curso de Ciências Físicas e Matemáticas (Curso Normal)

1º ano

1ª Cadeira: Álgebra com aplicação às operações numéricas, Geometria, trigonometria retilínea e Topografia.
 2ª Cadeira: Física Experimental e Telegrafia Elétrica.
 - Aula de desenho topográfico e de paisagem

2º ano

1ª Cadeira: Composição geral de equações, princípios fundamentais de geometria descritiva, geometria analítica, cálculo infinitesimal, mecânica e máquinas necessários ao artilheiro.
 2ª Cadeira: Física Experimental e Telegrafia Elétrica.
 - Aula de desenho de projeções e de máquinas.

3º ano

1ª Cadeira: Continuação do Cálculo Infinitesimal e de Mecânica
 2ª Cadeira: Botânica e Zoologia.
 - Aula de desenho de arquitetura e de máquinas.

4º ano

1ª Cadeira: Trigonometria esférica, Astronomia e Geodesia.
 2ª Cadeira: Mineralogia e Geologia.
 - Aula de desenho geográfico e hidrográfico.

2º) Curso de Engenharia Civil

Compõe-se do 1º, 2º e 3º Anos do Curso de Ciências Físicas e Matemáticas (Curso Normal) e das doutrinas ensinadas nos seguintes anos:

4º ano

1ª Cadeira: Mecânica Aplicada às Construções, Arquitetura Civil, Estradas, Pontes e Caminhos de Ferro.
 2ª Cadeira: As mesmas matérias da segunda cadeira do 4º ano do Curso normal.
 - Aula de desenho de minas e de planos para execução de obras da natureza das que foram acima indicadas.

5º ano

1ª Cadeira: Mecânica Aplicada, Arquitetura Hidráulica.
2ª Cadeira: Metalurgia e Montanhística
- Aula de desenho de construções e máquinas hidráulicas.

REGULAMENTO DE 1863

1º ano

1ª Cadeira: Álgebra Elemental e Superior, Geometria, Trigonometria Retilínea e Esférica.
- Aula de desenho linear e topográfico: noções de topografia.

2º ano

1ª Cadeira: Geometria Analítica, Teoria Geral das Projeções, Elementos de Cálculos Diferencial e Integral. A parte da Mecânica que só precise daqueles elementos.
2ª Cadeira: Física Experimental, precedendo as noções indispensáveis de Mecânica.
- Aula de resolução gráfica dos problemas de geometria descritiva e de suas aplicações à teoria das sombras.

3º ano

1ª Cadeira: Continuação de Cálculo Diferencial e Integral, e de Mecânica.
2ª Cadeira: Química Inorgânica e Análise respectiva
- Aula de desenho de máquinas.

4º ano

1ª Cadeira: Astronomia, Topografia e Geodesia.
2ª cadeira: Botânica e Zoologia, precedendo as noções indispensáveis de Química Orgânica.
- Aula de desenho geográfico

5º ano

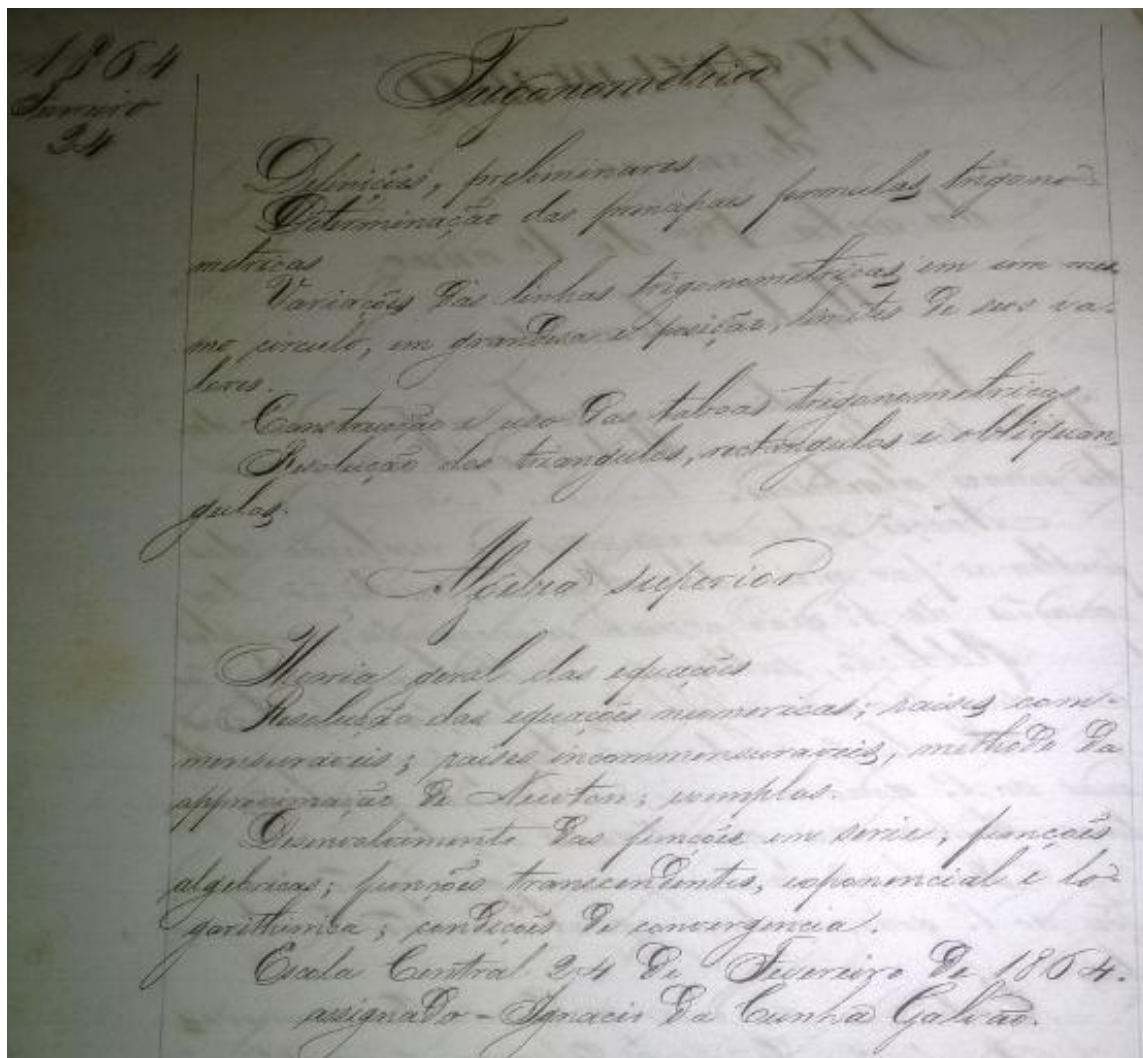
1ª Cadeira: Mecânica aplicada às construções: princípios de arquitetura civil, especialmente quanto à disposição e distribuição dos edifícios; propriedades e resistências dos materiais de construção; noções teóricas e práticas sobre regime dos rios e o movimento das águas nos canais e encanamentos; da navegação interior, natural e artificial; estradas, pontes, vias férreas e telégrafos.
2ª Cadeira: Mineralogia e geologia.
- Aula de desenhos de arquitetura, ordenação e decoração dos edifícios civis e militares; execução de projetos.

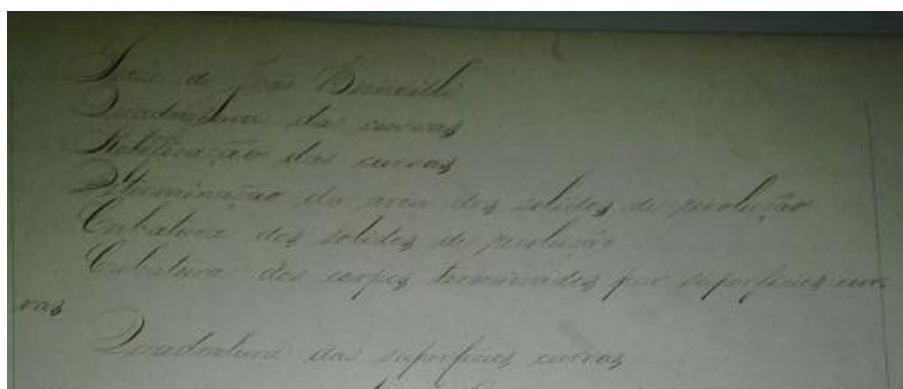
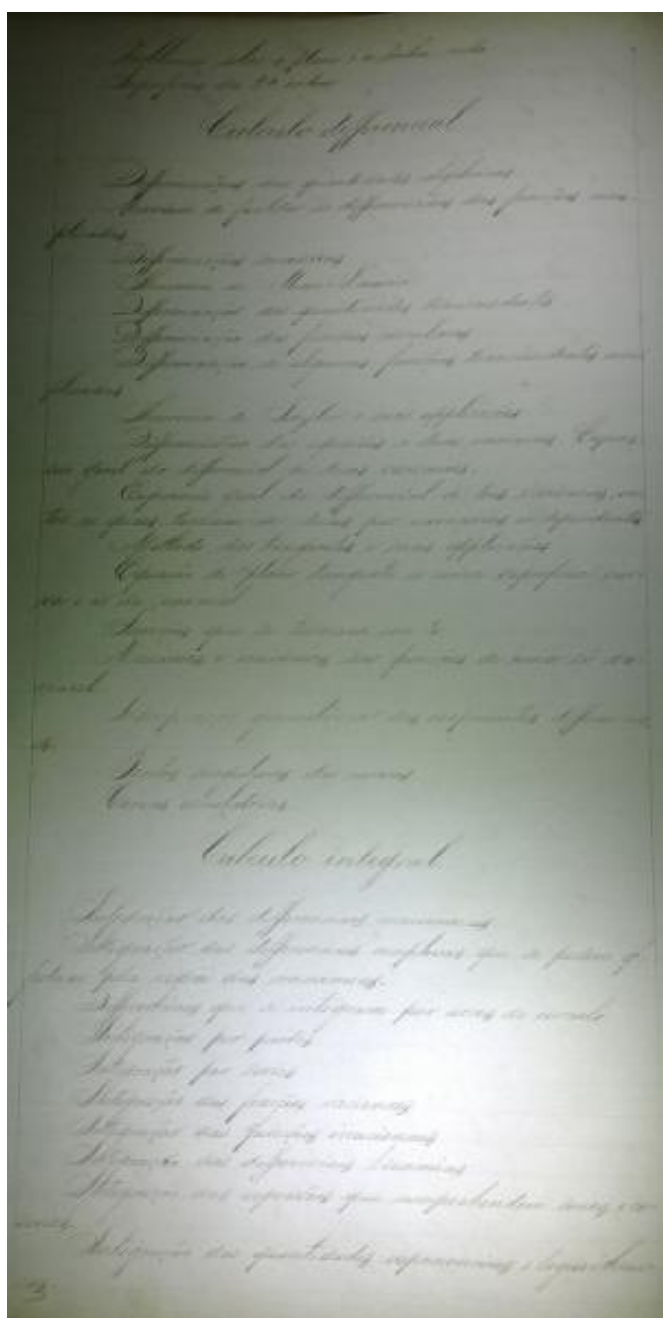
6º ano

1ª Cadeira: Estudo Complementar de Hidrodinâmica Aplicada e dos Caminhos de Ferro. Descrição e estabelecimento de motores e máquinas hidráulicas; melhoramento dos rios, relativamente à navegação e às inundações; detalhes de construção dos canais navegáveis; encanamento e derivações de águas; abertura de poços artesianos; obras concernentes à segurança e conservação dos portos; desobstrução das barras e ancoradouros.
2ª Cadeira: Economia Política; Estatística e Princípios de Direito Administrativo.
- Aula de desenho de construções e máquinas hidráulicas.

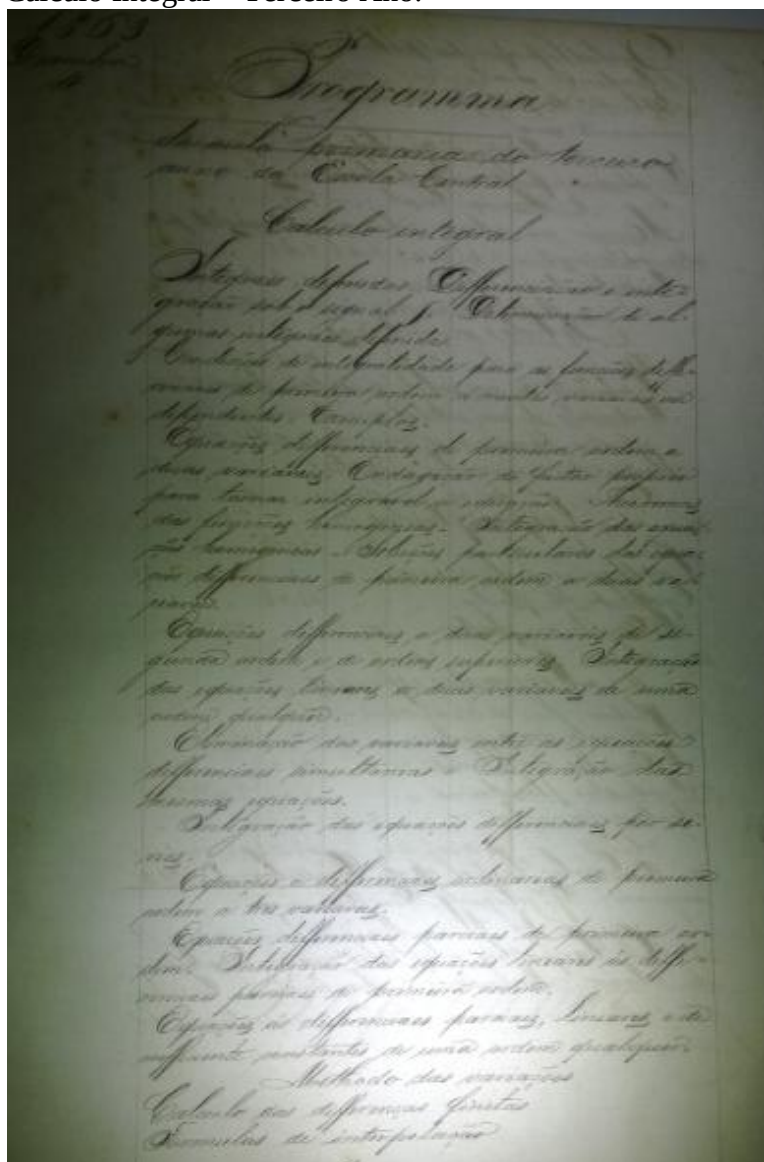
Fonte: Moreira (2014)

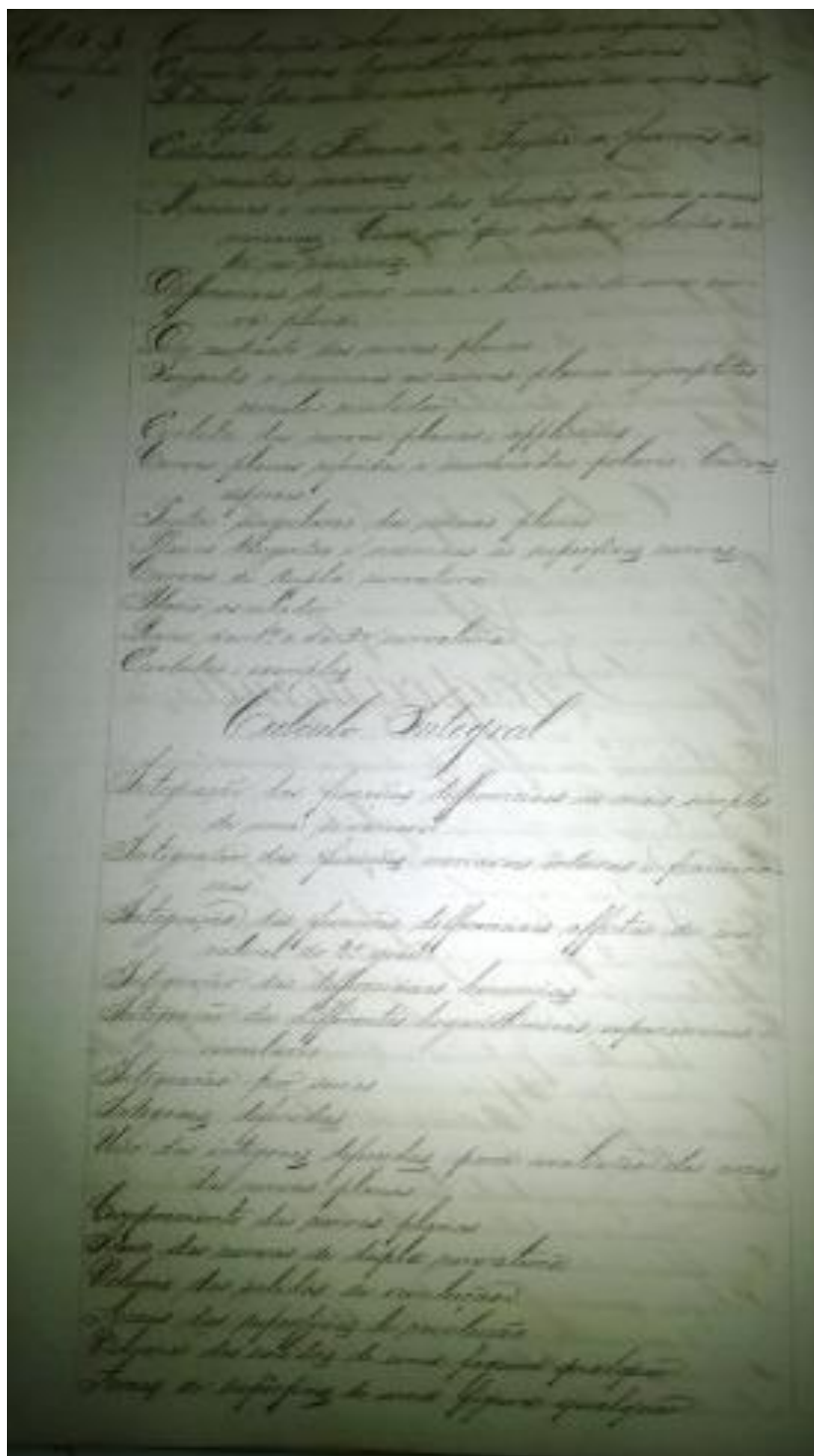
Algebra Superior



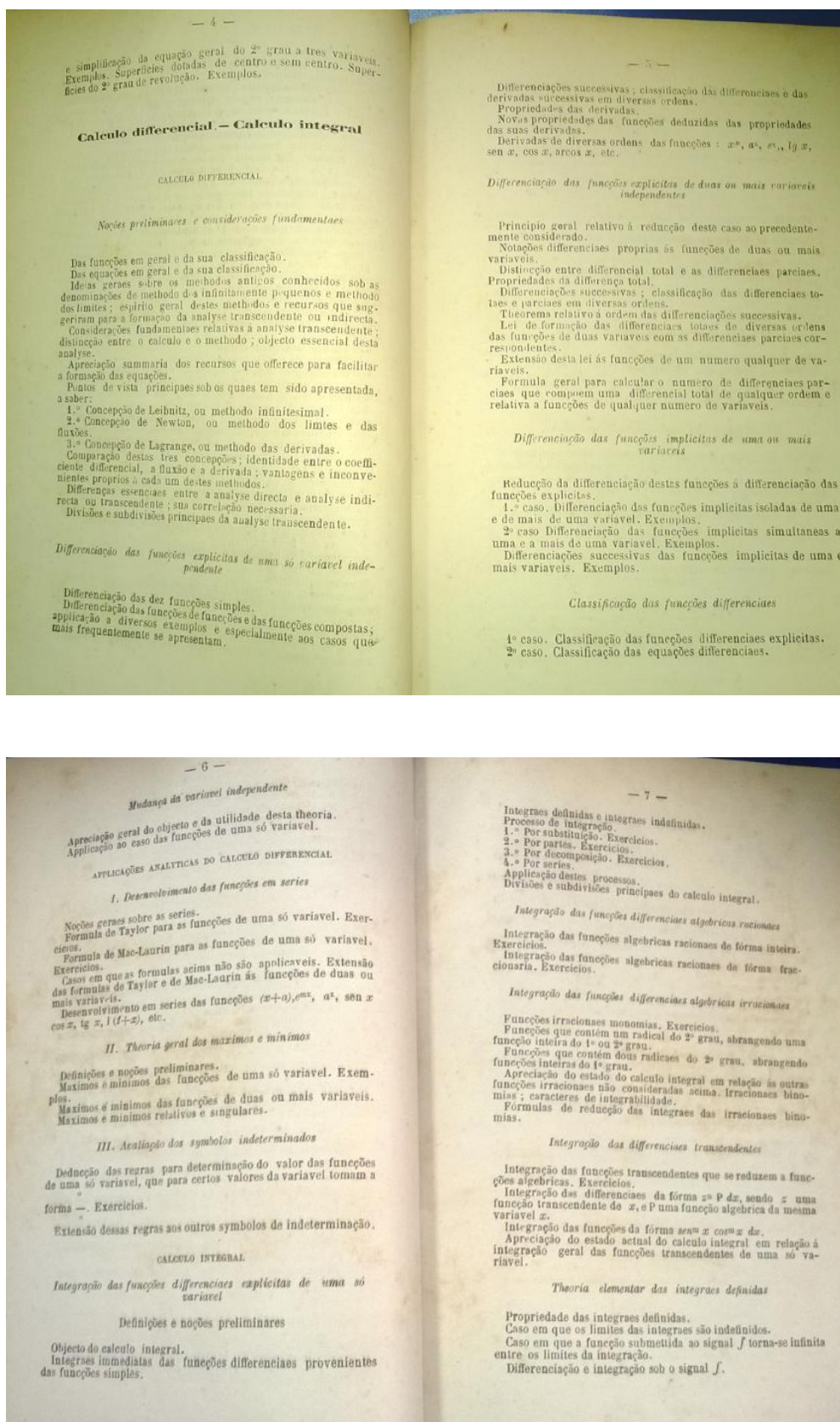


Calculo Infinitesimal	
Das funções em geral	
Funções derivadas e diferenciaes	
Differenciação das funções simples de uma só variavel: exemplos.	
Differenciação das funções compostas, ou funções de funções de uma só variavel	
Differenciação das funções de muitas variaveis independentes.	
Differenciação das funções implicitas	
Differenciaes de diversas ordens para as funções de uma só variavel.	
Das para as funções de muitas variaveis	
Das para as funções implicitas	
Mudança da variavel independente	
Expressão geral do desenvolvimento de uma função seguindo as potencias inteiras da variavel. Theorema de Taylor	
Casos em qua o Theorema de Taylor não dá o desenvolvimento da função.	
Valores das quantidades, que se apresentam sob a forma indeterminada $\frac{0}{0}$	
Desenvolvimento de funções de uma só variavel	
Relações, que existem entre as funções exponenciaes e as funções trigonometricas	
Formulas de Moivre	
Resolução das equações binomias	





Apêndice 27 – Ementa do Curso de Cálculo Diferencial e Integral da Escola Politécnica do Rio de Janeiro do ano de 1886 [BOR 1]



Aplicações geométricas do cálculo diferencial

Tangentes e normaes ás curvas planas. Exercícios.
Equações da tangente, subtangente, normal e subnormal.
Exercícios.
Concavidade e convexidade das curvas planas. Aplicações.
Expressão diferencial do arco e da área de curva plana.
Aplicações.
Expressão diferencial da área de uma superfície curva qualquer.
Expressão diferencial de revolução. Aplicações.
Expressão diferencial de um volume terminado por uma superfície qualquer; caso do sólido de revolução. Aplicações.
Raio de curvatura e centro de curvatura de uma curva plana.
Contactos de diversas ordens das curvas planas.
Caracteres distintivos dos contactos de ordem par e de ordem ímpar.
Curvas osculatrizes.
Círculo osculador.
Evolutas e devolutas das curvas planas.
Aplicações das noções acima á ellipse, á hyperbole, á parábola, á cycloide, e ás espiraes.

Aplicações geométricas do cálculo integral

Quadratura das curvas planas. Aplicações.
Rectificação das curvas planas. Aplicações.
Quadratura de uma superfície curva qualquer; caso das superfícies de revolução. Aplicações.
Cubatura dos sólidos terminados por superfícies curvas quaisquer; caso dos sólidos de revolução. Aplicações.

Apêndice 28 – Estrutura curricular da Escola de Minas de Ouro Preto, após a reformulação de 1885.

- 1º Ano
 - 1ª Cadeira – Aritmética, álgebra, geometria e trigonometria elementar.
 - 2ª Cadeira – Noções de Física e Química, desenho de imitação.

- 2º Ano
 - 1ª Cadeira – Complementos de Álgebra, cálculo das derivadas, geometria analítica a duas e três dimensões, complementos de trigonometria retilínea.
 - 2ª Cadeira – Geometria Descritiva: linha reta e plano.
 - 3ª Cadeira – Agrimensura, cosmografia e topografia elementar.
 - 4ª Cadeira - Química dos metaloides; Física: calor, magnetismo e eletricidade.
 - 5ª Cadeira – Zoologia. Épuras, trabalhos práticos de química, de física e de zoologia. Desenho de imitação e de topografia. Prática de trabalhos de campo.

- 3º Ano
 - 1ª Cadeira – Cálculo Diferencial e Integral, mecânica racional, trigonometria esférica.
 - 2ª Cadeira – Geometria Descritiva: planos tangentes e intersecção de superfícies.
 - 3ª Cadeira – Química dos metais e orgânica. Física: acústica e luz.
 - 4ª Cadeira – Botânica. Épuras, trabalhos práticos de química, de física e de botânica. Desenho de imitação.

Fonte: Annaes da Escola de Minas de Ouro Preto nº4, 1885

Apêndice 29 – Ementa das cadeiras contendo conceitos do Cálculo Diferencial e Integral na Escola de Minas de Ouro Preto.

2º Ano – 1ª Cadeira – Curso de Álgebra

1ª Parte

- Primeiras noções sobre as funções e suas variações
- Representação gráfica da variação de uma função contínua
- Teoria Elementar de Máximos e Mínimos
- Método dos coeficientes indeterminados. Aplicação à dedução da fórmula do trinômio.
- Desenvolvimento de uma função algébrica racional e inteira $f(x + h)$ segundo as potências crescentes do acréscimo h .
- Continuidade das funções inteiras de uma variável.
- Séries. Regras principais de convergência das séries.
- Estudo especial da série (e). Limite $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ quando $((m))$ cresce indefinidamente.

2ª Parte – Teoria das Derivadas

- Classificação das funções.
- Definição da derivada de uma função contínua de uma variável. Existência dessa derivada.
- Derivada das funções simples.
- Derivada de uma função de função e de uma função inversa.
- Derivada de uma soma, de um produto, de um quociente de funções de $((x))$ de uma potência.
- Teorema geral relativo a derivada de uma função de funções de uma variável.
- Determinação da derivada de algumas funções escolhidas.
- Derivadas de diversas ordens.
- Derivadas parciais.
- Derivadas de uma função implícita.
- Estudo de algumas propriedades importantes das derivadas.
- Aplicação da teoria das derivadas a determinação do valor das expressões que se apresentam sob forma indeterminada, a determinação dos valores máximos e mínimos, ao estudo enfim da variação das funções de uma variável.
- Dedução da fórmula de Taylor de funções de uma variável.
- Fórmula de Mac-Laurin. Aplicação dessa última fórmula à determinação das séries convergentes que servirão para calcular uma tabela de logaritmos e uma tabela de senos.

OBS: Deixa-se claro que essa parte do curso será acompanhada de exemplos e de numerosos exercícios os quais, os alunos deverão resolver e obter uma nota correspondente ao valor do trabalho.

Cálculo Diferencial

- Método infinitesimal, princípios fundamentais. Derivadas. Significação.
- Derivadas das funções simples, funções de funções.
- Diferenciais. Representação Geométrica da Derivada, do acréscimo e da diferencial de uma função.
- Regras da diferenciação. Funções simples.
- Funções de funções, funções compostas.
- Funções Inversas, funções circulares.
- Funções implícitas, funções de várias variáveis.
- Diferenciais e derivadas de diversas ordens.
- Diferenciais parciais e diferenciais totais.
- Mudança de variável independente.
- Desenvolvimento das funções em série.
- Fórmulas e séries de Taylor e de Mac-Laurin.
- Aplicações analíticas do cálculo diferencial.
- Teoria dos máximos e mínimos
- Verdadeiro valor das funções que se apresentam sob uma forma intermediária.
- Teoria das curvas planas.
- Tangente a uma curva em coordenadas retangulares e polares. Normal.
- Contato das curvas planas
- Diferencial da área de uma curva plana em coordenadas retangulares e polares.
- Diferencial de um arco (Coordenadas retangulares e polares)
- Curvatura, círculo osculador.
- Raio de curvatura em um ponto de uma curva. (coordenadas retangulares e polares)
- Curvas envoltórias e evolutas
- Tangente, plano tangente, plano normal, plano osculador e raio de curvatura de uma curva no espaço.
- Normal e plano tangente a uma superfície

Cálculo Integral

- Objeto, integrais indefinidas, integrais definidas.
- Métodos de Integração. Integração imediata.
- Integração por substituição, por partes e das funções racionais.
- Condições de integração das funções de várias variáveis
- Integração pelas séries.
- Quadratura das áreas planas. Métodos dos trapézios, de Simpson e de Poncelet.
- Retificação das curvas
- Cubatura dos sólidos.
- Equações diferenciais.
- Equação Linear de primeira ordem.
- Equações lineares a coeficientes constantes. Problema das trajetórias ortogonais.

Apêndice 30 – Ementa da 1ª cadeira do 3º ano da Escola de Minas de Ouro Preto, no ano de 1885.

3.º ANNO 1.ª CADEIRA Trigonometria espherica, Analyse, Mecanica racional TRIGONOMETRIA ESHERICA Triangulos eshericos. Relações entre os angulos e os lados de um triangulo esherico. Do triangulo polar ou supplementar. Fórmulas relativas aos triangulos rectangulos e aos triangulos rectilateros. Fórmulas geraes calculaveis por logarithmos. Fórmulas de Delambre, fórmulas de Neper. — Excesso esherico. Resolução dos triangulos eshericos rectangulos, rectilateros e triangulos eshericos quacsquer. Applicação da trigonometria esherica. Redução de um angulo ao horizonte, calculo da distancia entre dois pontos da superficie da terra, etc. CALCULO DIFFERENCIAL Methodo infinitesimal, principios fundamentaes. — Derivadas. — Significação. Derivadas das funcções simples, funcções de funcções. Differenciaes. — Representação geometrica da derivada, do acrescimo e da differencial de uma funcção. Regras da differenciação. — Funcções simples. Funcções de funcções. — Funcções compostas. Funcções inversas. — Funcções circulares. Funcções implicitas. — Funcções de varias variaveis.	256 Differenciaes e derivadas de diversas ordens. Differenciaes parciaes e differenciaes totaes. Mudança de variavel independente. Desenvolvimento das funcções em serie. Fórmulas e series de Taylor e de Mac-Laurin. Applicações analyticas do calculo differencial. Theoria dos maximos e minimos. Verdadeiro valor das funcções que se apresentam sob uma fórma intermediaria. Theoria das curvas planas. Tangente a uma curva em coordenadas rectangulares e polares. — Normal. Contacto das curvas planas. Differencial da area de uma curva plana em coordenadas rectangulares e polares. Differencial de um arco. — (Coordenadas rectangulares e polares.) Curvatura, circulo osculador. Raio de curvatura em um ponto de uma curva. — (Coordenadas rectangulares e polares.) Curvas envoltorias e evolutas. Tangente, plano tangente, plano normal, plano osculador e raio de curvatura de uma curva no espaço. Normal e plano tangente a uma superficie. CALCULO INTEGRAL Objecto, integraes indefinidas, integraes definidas. Methodos de integração. — Integração immediata. Integração por substituição. Integração por partes. Integração das fracções racionais. Condições de integração das funcções de varias variaveis. Integração pelas series. Quadratura das areas planas. — Methodo dos trapezios. — Methodo de Simpson. — Methodo de Poncelet. Rectificação das curvas. Cubatura dos solidos.

Fonte: Annaes da Escola de Minas de Ouro Preto nº4, 1885

Apêndice 31 – Estrutura dos cursos de Cálculo ministrados na Escola de Minas de Ouro Preto entre 1893 e 1908. [APEM 1], [APEM 2] e [APEM 3]

Cálculo Diferencial

- Classificação das Funções
- Continuidade das Funções (não aparece em 1893)

No final de 1903, Marciano salienta a divisão entre Análise Ordinária (Algébrica) e Análise Transcendente ou Infinitesimal. É citado ainda cálculo das funções diretas e inversas. E ainda o “Méthodo Algébrique”

- Methodo Infinitesimal – Substituição dos Infinitamente Pequenos
- Methodo dos Limites – Limites
- Infinitamente pequenos de diversas ordens

É citado ainda ao final de 1903 os “Princípios fundamentaes relativos a substituição dos infinitamente pequenos”

- Diferença, diferencial e derivada de uma função de uma variável.
- Interpretação Geométrica
- Teoremas relativos à derivadas
- Diferenciais das funções simples, inversas, funções de funções, somas algébricas, produtos, quocientes, potências, funções compostas (Regra geral de diferenciação),
- Diferenciais das funções diretas e inversas
- Diferenciais das funções hiperbólicas e imaginárias (não aparecem em 1893)
- Diferenciais das funções implícitas de uma variável independente
 - 1º - Caso de uma equação a duas variáveis
 - 2º - Caso de n equações a n+1 variáveis
- Teorema dos Acréscimos Finitos e sua interpretação geométrica
- Demonstração da fórmula $f^n(x) = \lim \frac{\Delta^n y}{\Delta x^n}$
- Teorema de Rolle (não aparece em 1893)
- Derivadas e diferenciais de várias ordens das funções de uma variável independente
- Expressão geral de $\Delta^n y = (\Delta x)^n \cdot f^n[x + (\theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n)\Delta x]$ e suas consequências
- Desenvolvimento em série das funções de uma variável, $y = e^x, y = a^x, y = y = (1 + x)^m, y = \mathcal{L}(1 + x), y = \text{sen} x, y = \text{cos} x$
 - 1º - Série de Taylor – Propriedades fundamentais. Resto da Série. Limite ou erro.
 - 2º - Fórmula e Série de Mac Laurin
- Cálculo dos logaritmos neperianos, cálculo e módulo dos logaritmos vulgares.
- Determinação do verdadeiro valor de expressões que se apresentam sob as formas indeterminadas $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, 0^0, 1^\infty, \infty^0$
- Máximos e mínimos das funções de uma variável – Aplicação da fórmula de Taylor.

Cálculo Diferencial com funções de mais de uma variável

- Acréscimos Parciais, Derivadas e diferenciais parciais das funções implícitas de mais de uma variável
- Diferenciais totais das funções compostas de mais de uma variável
- Diferenciação de somas, produtos, quocientes de funções de diversas variáveis
- Acréscimo Total e Diferencial Total
- Propriedades da Diferencial Total
- Derivadas parciais e diferencial total de várias ordens das funções implícitas de mais de uma variável independente.
 - 1º Caso – Uma função implícita de diversas variáveis
 - 2º Caso – Duas funções implícitas ligadas por duas equações
 - 3º Caso – m funções ligadas a n variáveis por n equações
- Derivadas e diferenciais de várias ordens – Teorema relativo a ordem das diferenciações
- Diferenciais totais de várias ordens – Fórmula de Leibniz
- Propriedades das funções homogêneas e de suas derivadas parciais – Teorema de Euler
- Mudança de Variáveis
 - Caso de função de uma variável
 - a) Mudança somente da variável independente
 - b) Mudança das duas variáveis
 - Caso de funções de mais de uma variável
 - a) Mudança somente das variáveis independentes
 - b) Mudança simultânea dessas variáveis e da função
- Transformação de Legendre
- Desenvolvimento em série de uma função com mais de uma variável – Fórmulas de Taylor e de Mac Laurin.
- Processo de Lagrange e Processo de Cauchy para a generalização da Fórmula de Taylor
- Máximos e mínimos das funções de mais de uma variável

OBS: Cabe ressaltarmos que o curso de 1893 não contém tópicos do Cálculo Integral

Cálculo Integral

- Integrais Indefinidas – Existência do limite da soma $\lim \sum_{x_0}^{x_n} f(x) \Delta x$
- Integrais Indefinidas
- Objeto do Cálculo Integral: Redução do Cálculo das Integrais Definidas ao das Integrais Indefinidas
- Integral das Diferenciais (Observações acerca da impossibilidade de resolver um problema em sua generalidade somente com os elementos analíticos conhecidos)
- Processos de Integração
 - 1º - Quadro das Integrais Fundamentais
 - 2º - Integração por Decomposição
 - 3º - Integração por Substituição
 - 4º - Integração por Partes

5° - Integração por Funções Racionais por meio de decomposição em frações simples

6° Integração das formas $\int \frac{Adx}{x-a}$, $\int \frac{Adx}{(x-a)^n}$, $\int \frac{Mx+N}{(x-a)^a+\beta^a} dx$, $\int \frac{Mx+N}{[(x-a)^a+\beta^a]^\gamma} dx$

- Integração das diferenciais racionais
- Integração das diferenciais irracionais
 - 1° - Integração das irracionais monomiais. Formas $\int f(x, \sqrt[n]{x})$, $\int f(x, \sqrt[n]{ax+b})$
 - 2° - Integração das irracionais da forma $f(x, \sqrt{a+bx+x^2})dx$
- Integração por séries
- Demonstração da fórmula de Taylor pelo emprego do Cálculo Integral
- Cálculo de π
- Fórmula de Simpson (a partir de 1909)
- Fórmula de Poncelet (a partir de 1909)
- Integrais definidas nas quais os limites tornam-se infinitos com a função admitida sob o sinal da integral seja finita e contínua
- Integrais definidas nas quais a função admitida sob o sinal da integral torna-se infinita ou descontínua para os limites da integral ou entre esses limites

Equações Diferenciais

- Equações Diferenciais Ordinárias – Separação de Variáveis e Equações Homogêneas
- Equações Diferenciais Lineares de 1ª Ordem
- Equações que se reduzem a equação de Jaques Bernoulli
- Problema das Trajetórias – Trajetórias Ortogonais
- Caso de Equações da forma $y = xf\left(\frac{dy}{dx}\right) + \varphi\left(\frac{dy}{dx}\right)$
- Equações Diferenciais de ordem superior, das formas $\frac{d^ny}{dx^n} = f(x)$ e $f\left(\frac{d^ny}{dx^n}\right) = x$ e $f\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$ e, em particular, $f\left(\frac{d^ny}{dx^n}, \frac{dy}{dx}\right) = 0$
- Equação de Clairaut
- Integração de equações diferenciais da forma $f\left(\frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = 0$
- Aplicações $\frac{d^2y}{dx^2} \pm \frac{dy}{dx} = 0$ e $\frac{d^2y}{dx^2} \pm ny^2 = 0$
- Integração das Diferenciais Totais – Caso de duas e de três variáveis independentes
- Condições de Integrabilidade – Caso de duas variáveis independentes e Generalização do Problema

Apêndice 32 – Quadros contendo os Professores de Cálculo nas Instituições Brasileiras.

Lente	Instituição	Período	Lente FNFi	
Francisco Cordeiro da Silva Torres	Academia Real Militar	1810-		
José Joaquim da Cunha	Escola Militar	-1858		
José Joaquim da Cunha	Escola Central	1858-		
Luiz Carlos Barbosa de Oliveira	EPRJ	1877-		
?	EPRJ	?		
Ignácio Manoel Azevedo do Amaral	EPRJ	1927-1945	Lélio Gama, UDF	1935-1939
			Gabriele Mammana	1939-1942
?	EPRJ	1945 - ?	José Abdelhay	1943-?
			Luis Adauto Medeiros	? - ?

Lente	Instituição	Período	Lente FFCL	Período
Urbano de Vasconcellos	EPSP	1895-1901		
Rodolpho de São Thiago	EPSP	1901-1933		
Monteiro Camargo	EPSP	1933-1934		
Luigi Fantappiè ??	EPSP	1934-?	Luigi Fantappiè	1934-1939
Monteiro Camargo	EPSP	1938-	Omar Catunda	1939-1963

Lente	Instituição	Período
Arquias Eurípedes da Rocha Medrado	Escola de Minas de Ouro Preto	1876-
Augusto Barbosa da Silva	Escola de Minas de Ouro Preto	1885-1893
Marciano Ribeiro dos Santos	Escola de Minas de Ouro Preto	1893-1908?
Altamiro Tibiriça Dias	Escola de Minas de Ouro Preto	1939-1967