



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

Programa de História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia

Guita Nascimento

ESTUDO DA EVOLUÇÃO DA TEORIA DOS NÚMEROS TRANSFINITOS DE CANTOR
POR MEIO DE SUA CORRESPONDÊNCIA COM DEDEKIND.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
2009

Guita Nascimento

ESTUDO DA EVOLUÇÃO DA TEORIA DOS NÚMEROS TRANSFINITOS DE CANTOR
POR MEIO DE SUA CORRESPONDÊNCIA COM DEDEKIND

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO
HCTE (HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS E DAS
TÉCNICAS E EPISTEMOLOGIA) DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU
DE DOUTOR EM HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS E
DAS TÉCNICAS E EPISTEMOLOGIA.

Orientador: Ricardo Silva Kubrusly

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
2009

Nascimento, Guita

Estudo da evolução da teoria dos números transfinitos de Cantor por meio de sua correspondência com Dedekind / Guita Nascimento - 2009.

241 f.

Tese de doutorado – Universidade Federal do Rio de Janeiro, História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia (HCTE), Rio de Janeiro, 2009.

1. Teoria dos Conjuntos
2. Infinito
3. Transfinito
4. Fundamentos da matemática

I. Kubrusly, Ricardo (Orient.) II. HCTE/UFRJ III. Título

Guita Nascimento

ESTUDO DA EVOLUÇÃO DA TEORIA DOS NÚMEROS TRANSFINITOS DE CANTOR
POR MEIO DE SUA CORRESPONDÊNCIA COM DEDEKIND

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO
HCTE (HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS E DAS
TÉCNICAS E EPISTEMOLOGIA) DA
UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS
NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU
DE DOUTOR EM HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS E
DAS TÉCNICAS E EPISTEMOLOGIA.

Aprovada em:

Prof. Ricardo Silva Kubrusly, Ph.D., UFRJ

Prof. Walter Gomide do Nascimento Júnior, D.Sc., UFMT

Prof. Antonio Marmo de Oliveira, D.Sc., UNITAU

Prof. Carlos Antônio de Moura, Ph.D., UERJ

Prof. Carlos Benevenuto Guisard Koehler, D.Sc., UFRJ

Aos meus pais,
Riwka Glasman (in memoriam)
e Samuel Herman Glasman.

AGRADECIMENTOS

À Universidade Federal do Rio de Janeiro e ao programa de História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia pela oportunidade que me deram.

Ao professor Ricardo Kubrusly, meu orientador, pela confiança depositada em mim e por seus conselhos, sempre úteis.

Ao professor Walter Gomide do Nascimento Júnior, que além das valiosas sugestões, ainda me auxiliou nas traduções dos textos, em alemão.

Ao professor Luis Alfredo Vidal de Carvalho, que me ajudou a resolver todos os problemas administrativos, e não foram poucos, que apareceram desde a inscrição até a homologação, em 2004.

À professora e amiga Maria Regina Alves de Mendonça, pelo carinho e dedicação que foram muito além de uma simples revisão de texto.

À professora Zulena dos Santos Silva, por sua importante colaboração na área de Filosofia.

Aos professores do Colégio Pedro II e, em particular, à equipe de matemática e de línguas estrangeiras, sempre dispostas a me ajudar.

Ao colega Rodrigo Devolder, por sua ajuda na confecção dos gráficos da função de Cantor.

Aos meus amigos que, direta ou indiretamente, estiveram do meu lado e me deram apoio nesta longa jornada.

E finalmente, a todas as pessoas que de alguma maneira colaboraram para a elaboração dessa pesquisa.

Resumo da Tese apresentada à HCTE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ESTUDO DA EVOLUÇÃO DA TEORIA DOS NÚMEROS TRANSFINITOS DE CANTOR
POR MEIO DE SUA CORRESPONDÊNCIA COM DEDEKIND

Guita Nascimento

Abril/2009

Orientador: Ricardo Kubrusly

Programa: História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia

Este trabalho tem como objetivo estudar como a teoria dos números transfinitos criada por Cantor se desenvolveu. Para isso pesquisou-se a sua construção, cuja origem está na definição dos conjuntos derivados, criados a partir da demonstração do Teorema da Unicidade das Séries de Fourier. Além disso, analisou-se a correspondência de Cantor com Dedekind, no período entre 1872 e 1877, traçando um paralelo com dois de seus artigos. Avaliou-se que a descoberta cantoriana de que espaços de dimensões diferentes possuem a mesma potência foi importante para que ele tivesse a idéia de abstrair, além da natureza dos elementos, a sua ordem, dando origem às “unidades cardinais” que, reunidas, formam os números cardinais transfinitos.

Palavras-chave: Teoria dos conjuntos, infinito, transfinito, fundamentos da matemática.

Abstract of Thesis presented to HCTE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

THE STUDY OF THE EVOLUTION OF CANTOR'S TRANSFINITE NUMBERS THROUGH
HIS CORRESPONDENCE WITH DEDEKIND

Guita Nascimento

April/2009

Advisor: Ricardo Silva Kubrusly

Department: History of Sciences and Techniques and Epistemology

The aim of this work is to study the development of the Theory of Transfinite Numbers founded by Cantor. In order to do so, a research on the construction of such theory, whose origin rests on the definition of the derived sets, created by the demonstration of uniqueness theorem for the Fourier's Series, was carried out. In addition, the correspondence between Cantor and Dedekind in the years 1872 - 1877 was traced and a parallel with two of Cantor's papers was established. It was estimated that Cantor's finding regarding different dimension spaces having the same power was crucial for his concept of abstracting the nature of the elements as well as their orders, thus giving origin to the "cardinal units" which, if reunited, form the transfinite cardinal numbers.

Kew-words: Set theory, infinite, transfinite, foundations of mathematics.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO	13
1 FATOS PRINCIPAIS DA VIDA DE GEORG CANTOR	19
1.1 INÍCIO DE UMA CARREIRA	19
1.2 GEORG CANTOR ASSUME COMO PROFESSOR, EM HALLE	21
1.3 AMIZADE ENTRE GEORG CANTOR E DEDEKIND	22
1.4 DESAVENÇA ENTRE GEORG CANTOR E KRONECKER	26
1.5 CANTOR E A HIPÓTESE DO CONTÍNUO	27
1.6 ELABORAÇÃO DE UMA DE SUAS MAIORES OBRAS	28
1.7 DOENÇA E NOVOS INTERESSES	29
1.8 PARTICIPAÇÃO DE CANTOR NOS ENCONTROS DE MATEMÁTICA	31
1.9 LISTA DAS OBRAS ESCRITAS POR GEORG CANTOR	34
2 ORIGEM DOS NÚMEROS TRANSFINITOS	41
2.1 PRELIMINARES	41
2.2 NÚMEROS IRRACIONAIS E O CONTÍNUO	46
2.2.1 Definição dos números irracionais segundo Weierstrass	48
2.2.2 Definição dos números irracionais segundo Cantor	52
2.2.3 Definição dos números irracionais segundo Dedekind	55
2.3 RELAÇÃO ENTRE AS SÉRIES TRIGONOMÉTRICAS E OS NÚMEROS TRANSFINITOS DE CANTOR	59
2.4 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DA UNICIDADE PARA AS SÉRIES TRIGONOMÉTRICAS	64
3 NÚMEROS TRANSFINITOS	71
3.1 DEFINIÇÃO DE INFINITO	71
3.2 DEFINIÇÃO DOS NÚMEROS ORDINAIS E CARDINAIS TRANSFINITOS	78
3.2.1 Definições de conjunto, segundo Cantor	79

3.2.2	Concepção de conjunto de objetos <i>bem definidos</i>, segundo Cantor	80
3.2.3	Axiomas de Zermelo para a Teoria dos Conjuntos	80
3.2.4	Definição de <i>potência</i> de um conjunto	84
3.2.5	Conceito de números <i>finitos e infinitos</i>	85
3.2.6	Diferença entre os números ordinais e cardinais transfinitos	86
3.2.7	Princípios de geração para a construção dos números ordinais transfinitos	87
3.2.8	Observações sobre números cardinais transfinitos e potência	89
3.2.9	Operações e propriedades dos números cardinais transfinitos	92
3.2.10	Diferença entre os <i>tipos</i> ordinais e os <i>números</i> ordinais transfinitos	96
3.2.11	Teorema da Boa-Ordenação	103
3.2.12	Relação entre os números ordinais e os números cardinais transfinitos	105
3.2.13	Teorema de Cantor	109
3.2.14	Potência e tipo ordenado do contínuo	112
3.3	HIPÓTESE DO CONTÍNUO	118
3.3.1	Enunciado e conseqüências da Hipótese do Contínuo	118
3.3.2	Tentativas para demonstrar a Hipótese do Contínuo	122
3.4	NOÇÕES SOBRE O INDECIDÍVEL	125
3.5	TOPOLOGIA DA RETA	127
3.6	NOÇÕES SOBRE OS INFINITESIMAS	129
4	NÚMEROS TRANSFINITOS: INVENÇÃO OU DESCOBERTA?	131
4.1	CRIAÇÃO NO CAMPO DA MATEMÁTICA	131
4.2	IDÉIAS GERAIS SOBRE A FILOSOFIA DA MATEMÁTICA	134
4.3	IDÉIAS DE CANTOR SOBRE A FILOSOFIA DA MATEMÁTICA	138
4.4	CONSIDERAÇÕES FINAIS	139
5	CORRELAÇÃO E ANÁLISE DAS CARTAS DE CANTOR COM SEUS ARTIGOS E ALGUNS DESDOBRAMENTOS	141
5.1	DISCUSSÃO SOBRE A EXISTÊNCIA DE INFINITOS DIFERENTES	144
5.1.1	Demonstração da enumerabilidade do conjunto dos números algébricos	154

5.1.2	Demonstração da não-enumerabilidade do conjunto dos números reais	157
5.2	RETA E PLANO, CONJUNTOS COM MESMA POTÊNCIA	158
5.2.1	Comentários sobre a troca de cartas entre Cantor e Dedekind	159
5.2.2	Paralelo entre as cartas mencionadas acima e o artigo publicado	180
5.3	DESDOBRAMENTOS E OUTRAS DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE CANTOR	187
5.3.1	Demonstração de que a dimensão é um invariante topológico	187
5.3.2	Demonstração dada por Sierpinski para o Teorema de Cantor	190
5.3.3	Demonstração dada por Huntington para o Teorema de Cantor	191
	CONCLUSÃO	193
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	198
	APÊNDICE - A – Observações sobre o Axioma da Escolha	205
	APÊNDICE - B – Demonstração do Teorema da Boa-Ordenação	207
	APÊNDICE - C - Frações contínuas	210
	APÊNDICE - D - Paradoxos de Zenão	213
	APÊNDICE - E - Detalhes sobre o gráfico da função de Cantor	215
	ANEXO - Cartas na ordem cronológica	218



Georg Cantor

INTRODUÇÃO

Nesta tese vamos mostrar a evolução da Teoria dos Conjuntos, incluindo aí a criação dos números transfinitos. É consenso geral entre os historiadores que Georg Cantor foi o idealizador desta teoria que é ainda hoje uma ferramenta poderosa para quem quer estudar os diversos campos da matemática. Não podemos deixar de citar também o nome de Richard Dedekind que teve um papel fundamental para a construção desta teoria.

Apesar de todas as dificuldades inerentes à época em que viveu, Cantor escreveu muitas cartas, em várias línguas e para diversas pessoas, abordando diversos temas: religião, literatura, filosofia e claro, a matemática, que era seu principal interesse.

Por meio dessas cartas estudaremos de que maneira as idéias principais de sua teoria tiveram sua origem e foram amadurecendo. Infelizmente, dos 20 cadernos de notas (letterbooks) encontrados após sua morte, 17 deles foram queimados após a Segunda Guerra Mundial. Esses cadernos contêm os rascunhos das cartas que Cantor escrevia, antes da versão definitiva; atualmente se encontram guardados nos arquivos da Biblioteca da Universidade de Göttingen.[DAUBEN, p. 315, 1979]:

Cantor (I): Caderno de notas de Cantor de 1884 até 1888.

Cantor (II): Caderno de notas de Cantor de 1890 até 1895.

Cantor (III): Caderno de notas de Cantor de 1895 até 1896.

Os textos das cartas se encontram traduzidos para o francês no livro do filósofo e matemático Jean Cavaillès [1937]; em inglês, no livro de Dauben citado acima; o original em alemão no livro de Herbert Meschkowski e Winfried Nilson[1991].

Algumas cartas inéditas, ou parte delas que não se encontram nos autores citados, estão ainda no original, em alemão, no Apêndice XL intitulado *Georg Cantor e Richard Dedekind, correspondência inédita* do livro *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*

[DUGAC]. Pierre Dugac salienta que muitas vezes o objetivo dos autores era enfatizar alguns assuntos específicos e, deste modo, os trechos de algumas cartas eram omitidos por eles propositalmente. Esse autor, matemático e historiador, estudou a obra de Dedekind, relacionando-a com sua correspondência com Cantor e chama a atenção para o fato de os autores, em geral, valorizarem mais o trabalho de Cantor do que o de Dedekind, quando este foi fundamental nas pesquisas matemáticas desenvolvidas por ambos.

É importante salientar que, na maioria das vezes, o rascunho das cartas escritas no caderno de notas não coincidia exatamente com a versão final que Cantor efetivamente enviava aos seus correspondentes. No entanto, a maioria deles guardava as cartas que recebia e por isso foram salvas de serem destruídas. As recebidas por Dedekind estão guardadas nos arquivos da biblioteca *Technische Hochschule* em Braunschweig, cidade onde ele passou a maior parte de sua vida.

Podemos enfatizar que, mesmo com a exclusão de algumas cartas, ainda assim foi possível reconstruir sua obra e chegar a algumas conclusões.

Neste trabalho foram selecionadas, entre as cartas disponíveis, aquelas que de algum modo tiveram significado importante no desenrolar da história dos números ordinais e cardinais transfinitos criados por Cantor.

O início desta jornada começa quando Cantor ainda era um adolescente descobrindo sua vocação para a matemática e caminhamos até o triste fim no hospital em Halle, quando escreve uma carta a sua mulher, dizendo sobre a sua vontade de voltar para casa. Seu desejo, no entanto, não pôde ser atendido, pois veio a falecer logo depois.

Em 1870, com 25 anos e já morando em Halle, por sugestão de seu colega de trabalho na Universidade, Heinrich Eduard **Heine** (1821 – 1881) começa a estudar a unicidade das séries de Fourier que, no caso de funções contínuas ou descontínuas em um número finito de pontos, já

havia sido demonstrada pelo próprio Heine; para o caso de um número infinito de descontinuidades o estudo vai desencadear, em Cantor, a questão de como os pontos (que podem ser vistos como números) podem se distribuir na reta real.

No final de 1873, Georg Cantor percebeu que existiam infinitos de “tamanhos” diferentes e provou que o conjunto dos números reais possuía uma potência maior que a do conjunto dos números naturais¹.

Cantor jamais imaginou que passaria o resto de sua vida tentando provar algo que, quase um século depois, mostrou ser indemonstrável: a Hipótese do Contínuo, isto é, a hipótese de que entre a potência do enumerável, relacionada ao conjunto dos números naturais e a potência do contínuo, relacionada ao conjunto dos números reais, não existe nenhuma outra potência.

Com o objetivo de demonstrar esta hipótese, Georg Cantor e outros matemáticos de seu tempo, como por exemplo, Richard Dedekind e Ernst Zermelo, precisaram criar novos conceitos e ferramentas cada vez mais rigorosas que geraram além de outros resultados, a Teoria dos Conjuntos como a conhecemos nos dias de hoje. O gérmen dessas idéias aparece registrado em várias de suas cartas que serão analisadas neste trabalho.

Cantor não tinha como saber que o “preço” da consistência da teoria dos conjuntos seria sua incompletude, ou seja, que existem proposições que não são demonstráveis, assim como sua negação e neste caso, é preciso estabelecer um novo axioma para o sistema.

¹ Os conjuntos numéricos citados nesta tese serão os seguintes: o conjunto dos números naturais $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, o conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \text{ e } q \in \mathbb{Z}^* \right\}$, onde o asterisco significa que o número zero foi excluído. O conjunto dos números reais $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup I$, onde I é o conjunto dos números irracionais (números que não podem ser escritos sob a forma de fração) e será estudado em detalhes no capítulo 2; e finalmente o conjunto dos números complexos $\mathbb{C} = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{R} \text{ e } i = \sqrt{-1}\}$.

Somente em 1931, Kurt **Gödel** no artigo intitulado *Sobre proposições formalmente indecidíveis do Principia Mathematica*² e *Sistemas relacionados* [GÖDEL, 1931] (Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme) demonstrou o Teorema da Incompletude e desde então, desconfiou-se que era o caso da Hipótese do Contínuo; mais tarde o próprio **Gödel** [1938] e Paul **Cohen** [1963b] mostraram que esta desconfiança se confirmava.

Esta tese é composta por cinco capítulos:

Considerando que Georg Cantor foi o criador dos números transfinitos optamos que o primeiro capítulo desta tese contasse um pouco sobre sua vida, sua desavença com Kronecker, sua relação com Dedekind, o que aconteceu em sua vida que propiciou a criação dos números ordinais e cardinais transfinitos, sua doença mental, o reconhecimento da comunidade matemática de sua genialidade e finalmente sua morte.

Com o objetivo de facilitar a visualização de como ocorreu o desenvolvimento da sua teoria com o decorrer do tempo, ao final do capítulo, faremos uma lista de suas obras com a data em que foram escritas, o título traduzido para o português e o título original. Em alguns casos ainda foram colocados alguns comentários ou observações.

O segundo capítulo é uma pesquisa de seus primeiros artigos sobre séries trigonométricas e mostra como o estudo de conjuntos de pontos, principalmente a definição de conjuntos derivados, que ele inventou para usar na demonstração da unicidade das Séries de Fourier, inspirou Cantor na criação dos números transfinitos. Logo no início é feito um glossário para que o leitor vindo de outras áreas, que não seja a matemática, possa prosseguir a sua leitura sem recorrer a outras fontes de consulta.

² *Principia Mathematica* - Tratado em três volumes, escrito por Alfred North **Whitehead** e Bertrand **Russell** nos anos de 1910, 1912 e 1913 respectivamente.

No terceiro capítulo, fazemos um estudo do conceito de infinito no decorrer dos séculos para, dentro do contexto matemático-filosófico, concluir o que são os números ordinais e cardinais transfinitos, sua aritmética, semelhanças e diferenças com os números ordinais e cardinais finitos. No final chegamos à Hipótese do Contínuo e suas consequências.

Para uma melhor compreensão do último capítulo, é importante que o leitor esteja a par da teoria dos números transfinitos e conheça as principais idéias contidas nos artigos escritos por Cantor.

Enfatizaremos os trabalhos iniciais onde Cantor descobre a existência de infinitos diferentes e constata que apesar disso a reta e o plano representam o mesmo infinito. É neste período que sua teoria dos transfinitos começa a se delinear e Cantor intui que a ordem, ou a ausência dela, seria um conceito fundamental quando se pensa em números infinitos.

Além disso, estudaremos as idéias contidas no *Grundlagen* (1883) e no *Beiträge* (1895/1897), onde ele fundamenta sua teoria. Somente desta maneira será possível avaliar a importância das correspondências trocadas entre Cantor e seus colegas, que é o objetivo maior deste trabalho.

A seguir, no quarto capítulo, trataremos de um assunto ainda bastante controverso nos dias de hoje e que tem a ver com as *Escolas de pensamento matemático*: Realismo (platonismo) e construtivismo (logicismo, intuicionismo, formalismo) que discutem se a matemática é uma criação humana ou se existe independente de nosso pensamento.

No último capítulo apresentamos a relação de suas cartas com a sua obra, sempre tentando obedecer a uma ordem cronológica.

Daremos maior ênfase a sua correspondência quase que diária com Dedekind, no período que vai de 1872 a 1878, e que mostra a evolução de suas pesquisas e a elaboração das idéias fundamentais sobre a Teoria dos Conjuntos. Veremos que em 1877, quando Cantor descobre a

equivalência entre reta e plano, ele percebe a “força” do contínuo e a partir daí começa a se delinear o que viria a ser a teoria dos números transfinitos, que tem o seu ápice com a publicação do *Grundlagen* e, mais de dez anos depois, o fecho da sua obra, com a publicação do *Beiträge*.

Os textos serão transcritos em português, mas tomaremos o cuidado de colocar ao final deste trabalho um anexo contendo o original, em alemão, e suas respectivas traduções em francês, além da fonte consultada, de maneira que o leitor possa conferir e aprofundar seus estudos se assim o desejar.

1 FATOS PRINCIPAIS DA VIDA DE GEORG CANTOR

Vários historiadores já escreveram sobre a vida e obra de **Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor**, entre eles, Abraham H. **Fraenkel** (1930), Herbert **Meschkowski** (1967), Ivor **Grattan-Guinness** (1971), Joseph W. **Dauben** (1990) e mais recentemente José **Ferreirós** (1993) só para citar alguns. Por este motivo, nosso objetivo neste capítulo foi, por meio destas biografias, fazer uma síntese para que o leitor possa ter, em um só lugar e em português, as datas, lugares, pessoas e fatos relacionados à vida de Cantor que, de alguma maneira, estão ligados ao seu trabalho.

Analisando os artigos de Cantor, suas correspondências e a sua história de vida busca-se encontrar relações que sejam importantes para entender melhor seu processo criativo.

1.1 INÍCIO DE UMA CARREIRA

Georg Cantor nasceu no dia 3 de março de 1845, em São Petersburgo, e teve três irmãos: Ludwig (1846), Sophie (1848) e Constantin (1849).

Cantor tinha 11 anos quando sua família se mudou para a Alemanha, o que foi um fator determinante na sua carreira já que, no século XIX até a Primeira Guerra Mundial, este país possuía a elite dos matemáticos da época.

No século anterior, esta hegemonia pertencia aos franceses e suíços como Daniel Bernoulli, Leonhard Euler, Jean Le Rond d'Alembert, Joseph-Louis Lagrange e Pierre-Simon Laplace. Segundo D. F. Wallace [p.160, 2003], não existe nenhuma boa explicação para isso na literatura e ele levanta a hipótese de a matemática ser como a política ou o esporte, com dinastias diferentes que se desenvolvem e depois enfraquecem dando lugar a outra. A verdade é que

Cantor estava no lugar certo e na época certa. As pesquisas de Cantor, a partir de 1870, vêm juntar-se às de Dedekind e Weierstrass que se completam para estabelecer regras rigorosas para “libertar” a Análise da Geometria.

O peso da responsabilidade de ser ele o primogênito pode ser observado no trecho da carta abaixo que seu pai, Georg Woldemar Cantor, lhe escreveu, em 1860, quando ele deixa a família para estudar em Darmstadt:

Eu encerro com estas palavras: Seu pai, ou melhor, seus pais e todos os outros membros da família também na Alemanha, Rússia e Dinamarca têm seus olhos sobre você como o mais velho, e espera que você seja nada menos que um Theodor Schaeffer e se Deus quiser, mais tarde, talvez uma estrela brilhante sobre o horizonte da ciência.³ (cf. anexo)

Aos 17 anos, Cantor escreve numa carta a seu pai “sobre uma voz desconhecida e misteriosa” que, contra sua vontade, o chama para a matemática.

Meu querido Pai!

Você pode imaginar como sua carta me deixou feliz; ela determina meu futuro. Os últimos dias deixaram-me na dúvida e na incerteza. Eu não consegui chegar a nenhuma decisão. Meu sentido de dever e os meus próprios desejos chocavam-se continuamente. Agora eu estou feliz quando vejo que já não o afligirá se eu seguir meus próprios instintos nesta decisão. Eu espero que um dia você ainda venha sentir orgulho de mim, caro Pai, pois minha alma, todo o meu ser, está em minha vocação; o que quer que desejemos e que sejamos capazes de fazer, o que quer que seja aquela **voz secreta**, desconhecida que nos atrai, nos levará ao sucesso!⁴ (cf. anexo)

Com a morte do pai em 1863, Cantor vai estudar em Berlim tendo **Weierstrass** (1815 – 1897) como um de seus professores. Quatro anos depois, obtém o diploma da Universidade de Berlim com um estudo aprofundado da teoria dos números como o desenvolvido por Legendre e

³ I close with these words: Your father, or rather your parents and all others members of the family both in Germany and in Russia and in Denmark have their eyes on you as the eldest, and expect you to be nothing less than a Theodor Schaeffer and, God willing, later perhaps a shining star on the horizon of science.[DAUBEN, p.275, 1990]

⁴ My Dear Papa!

You can imagine how very happy your letter made me; it determines my future. The last few days have left me in doubt and uncertainty. I could reach no decision. My sense of duty and my own wishes fought continuously one against the other. Now I am happy when I see that it will no longer distress you if I follow my own feelings in this decision. I hope that you will still be proud of me one day, dear Father, for my soul, my entire being lives in my calling; whatever one wants and is able to do, whatever it is toward which an unknown, **secret voice** calls him, that he will carry through to success! [DAUBEN, p.277, 1990]

Gauss. Eram também seus professores nesta época nada menos que **Kummer** (1810 – 1893) e **Kronecker** (1823- 1891).

1.2 GEORG CANTOR ASSUME COMO PROFESSOR, EM HALLE

Em 1869, ele se instala em Halle como professor particular (*Privatdozent*⁵) no lugar de Hermann **Schwarz** (1843 – 1921) que tinha ido para Zurique. Sua nomeação como professor *Extraordinarius*⁶ só aconteceu três anos mais tarde.

Como assistente de Eduard **Heine** (1821 – 1881), Cantor começa a trabalhar com as séries trigonométricas e passa a estudar o teorema da unicidade destas séries.

Por volta de 1870, definindo índices para conjuntos derivados de pontos, ele tenta ampliar o conceito de número ordinal, o que viria a ser o embrião para mais tarde criar os números ordinais transfinitos.

Também nesta época, Cantor ocupa parte de seu tempo com a teoria dos números irracionais usando as seqüências de Cauchy, o que será visto, com mais detalhes, no decorrer deste trabalho.

É interessante notar que o estudo das séries trigonométricas e de funções descontínuas foram assuntos que instigaram vários matemáticos antes de Cantor, como por exemplo, **Dirichlet** (1805 – 1859), **Lipschitz** (1832 – 1904) e **Hankel** (1839 -1873), mas, apesar de renderem bons frutos, nenhum se compara à obra realizada por ele.

⁵ Assistente pago com os honorários depositados pelos alunos.

1.3 AMIZADE ENTRE GEORG CANTOR E DEDEKIND

Um fato que teve um papel importante em sua vida foi, quando por acaso, em 1872, numa viagem à Suíça, Cantor conhece Richard **Dedekind** (1831 – 1916) e a partir daí passam a se relacionar e se corresponder quase que diariamente. É importante chamar a atenção para o fato que estes períodos de farta correspondência eram intercalados com outros de total ausência de cartas, como veremos abaixo.

Segundo Ferreirós [p. 357, 1993], os períodos em que mantiveram contato foram:

1873 – trocam idéias sobre a existência ou não de uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números reais.

1877 – discutem sobre a possibilidade de existir uma correspondência biunívoca entre a reta e o plano.

1882 – discutem algumas idéias que Cantor vai usar no seu artigo *Grundlagen*, publicado em 1883.

1899 – Cantor levanta a questão dos paradoxos (Paradoxo de Burali-Forti) e define multiplicidades consistentes e inconsistentes.

Ainda nos dias atuais, existem controvérsias sobre os motivos que os levaram ao estremecimento de suas relações.

Outro ponto merecedor de destaque é que essas cartas em geral partiam de Cantor, pedindo a opinião de Dedekind sobre algum assunto matemático que fosse alvo de sua investigação naquele momento.

Existe ainda hoje uma polêmica envolvendo os nomes de Dedekind e Cantor. Alguns autores como **Dauben** [1990] e **Grattan-Guinness** [1971, 1974, 1978] evitaram tocar neste

⁶ Professor sem cátedra, assistente, pago pela Universidade.

assunto. Por outro lado, **Dugac** [1976] e **Ferreirós** [1993] levantam a questão de realmente existir uma amizade sincera entre os dois matemáticos.

O fato é que, apesar da proximidade entre suas cidades⁷, o que sabemos é que, nesses quase trinta anos, entre 1872 e 1899, eles se encontraram apenas seis vezes, sendo que as duas primeiras foram por acaso quando passavam férias na Suíça.

O terceiro encontro ocorreu em maio de 1877; depois mais dois encontros em 1882 e o último que se tem notícia, em 1899, quando voltam a se corresponder.

Em agosto de 1874, Cantor casou-se com Vally Guttmann e o casal passou o verão nas montanhas de Harz, na Suíça, onde se reuniu com Dedekind. Este período foi bastante frutífero para Cantor, pois, mesmo em lua-de-mel, pôde discutir com o colega, a possibilidade de relacionar uma superfície com uma linha reta, de maneira que a cada ponto da superfície, corresponda um único ponto da linha reta e vice-versa.

Neste ano ocorre a primeira ruptura entre eles. O motivo talvez tenha sido o fato de Cantor ter usado, em seu artigo, as idéias de Dedekind, sem citar seu nome.

Cantor comenta, muito mais tarde, em uma carta endereçada a Hilbert, em 15 de novembro de 1899, que Dedekind parou de se corresponder com ele neste período (por volta de 1873) “por razões desconhecidas por mim” (*aus mir unbekannten Gründen*).

Retornaram a se corresponder somente três anos depois, em 20 de junho 1877, focalizando novamente o tema da correspondência entre linha e plano. Cantor dá uma resposta afirmativa para essa questão, construindo uma função biunívoca entre um segmento de reta e um quadrado, mostrando deste modo que um espaço unidimensional possui a mesma potência que

⁷ Halle dista menos de 200 quilômetros de Braunschweig, onde Dedekind morava.

um espaço bidimensional. Cantor expõe a demonstração de seu teorema para Dedekind, mas este o alerta que tal demonstração continha um erro. Cantor imediatamente concorda com Dedekind e corrige o que estava errado usando frações contínuas ao invés de números decimais para representar os números irracionais, como veremos mais tarde.

Cantor fica tão empolgado com sua descoberta que começa a questionar a importância do número de coordenadas de um espaço para definir a sua dimensão.

Logo depois, Dedekind chama a atenção de Cantor para o fato de que espaços de dimensões diferentes, apesar de possuírem a mesma potência, não apresentam as mesmas propriedades já que não pode existir entre eles nenhuma função biunívoca e também contínua, ou seja, um homeomorfismo⁸, do ponto de vista topológico, esses dois espaços não são homeomorfos.

Em seguida, há uma nova interrupção na correspondência e ao que tudo indica, pelo mesmo motivo anterior. Cantor usou as idéias de Dedekind em seu artigo sem lhe dar os créditos.

Durante a década de 1870 ocorreram as principais trocas de correspondência entre Cantor e Dedekind, que tratava do conceito do contínuo e da caracterização dos números reais. Para Cantor, o conceito de contínuo ia além da caracterização dos números reais, pois um conjunto pode ter a potência do contínuo e não ter as características de um conjunto contínuo. O exemplo mais interessante é do conjunto ternário de Cantor, que definiremos no capítulo 3 e veremos que, apesar de possuir a potência c do contínuo, sua medida é nula, ou seja, potência e medida são dois conceitos completamente distintos.

⁸ Um *homeomorfismo* de M sobre N é uma bijeção (função injetora e sobrejetora) contínua $f : M \rightarrow N$ cuja inversa $f^{-1} : N \rightarrow M$ também é contínua. Neste caso, diz-se que M e N são homeomorfos. Dois espaços métricos homeomorfos são indistinguíveis do ponto de vista da Topologia.[LIMA, p.38, 1977]

A terceira ruptura entre Cantor e Dedekind ocorreu em 1882. Com a morte de Heine, em 21 de outubro de 1881, seu lugar fica vago na Universidade de Halle e Cantor sugere então o nome de Dedekind para ocupar o lugar de Heine. Menos de um mês depois, em uma carta endereçada a Cantor, Dedekind, justificando que, “por múltiplas razões cuja discussão nos conduziria muito longe” e acrescentando que “nada poderia fazê-lo mudar sua decisão”, recusa o convite. Dugac acrescenta que tem dúvidas quanto à sinceridade de Dedekind quando ele diz, nesta mesma carta, que sua eventual aceitação seria “a agradável perspectiva da relação fraternal com ele”. [DUGAC, p. 126]

Muitos autores sugerem que a negativa de Dedekind em aceitar a colocação em Halle fez com que suas relações com Cantor se fragilizassem, e que por este motivo eles deixaram de se corresponder por alguns anos. No entanto, considerando que Cantor e Dedekind ainda se encontraram em Eisenach, no fim de 1882⁹, isto é, quase um ano depois de ter recusado o convite de Cantor, para discutir sobre o problema do contínuo (Hipótese do Contínuo), não fica claro se a recusa de Dedekind em aceitar o convite para professor em Halle, em 1881, tenha sido o motivo principal de seu afastamento de Cantor por quase dez anos.

A impressão que se tem, lendo as anotações de Dedekind, relativas às cartas que trocavam, é que esses afastamentos foram devidos à mágoa que ele guardava por ver algumas de suas idéias expostas nos artigos que Cantor escrevia sem sequer citar seu nome. Isto ocorreu no artigo de 1874, sobre os números algébricos, no artigo de 1877, sobre a equípolência entre reta e plano e finalmente, em 1882, nos artigos que escreveu sobre conjuntos lineares de pontos.

⁹ A última carta escrita por Cantor para Dedekind neste período tem a data de 6 de novembro de 1882, pouco antes da publicação do *Sobre os conjuntos infinitos e lineares de pontos. Parte V (Grundlagen)* [CAVAILLÈS, p.238, 1962]

Somente em 1899, dois anos depois do Primeiro Congresso Internacional de Matemática, em Zurique, eles reatam a sua amizade e voltam a se corresponder.

Quase na virada do século, em agosto de 1899, eles tratam de diversos assuntos, entre eles o axioma da aritmética transfinita ampliada, a comparabilidade dos cardinais e também discutem sobre as antinomias.

1.4 DESAVENÇA ENTRE GEORG CANTOR E KRONECKER

A princípio Kronecker¹⁰ elogiou o trabalho de Cantor sobre as séries trigonométricas e até sugeriu algumas modificações, mas logo depois se tornou seu maior opositor. Dauben [1990], na introdução de seu livro, diz que Kronecker o considerava um charlatão científico, um renegado, um “corruptor de jovens”.

Kronecker, que era intuicionista, não acreditava na existência de qualquer coisa que envolvesse a idéia de infinito, como por exemplo, os números irracionais e, em particular, os transcendentos e, muito menos, na existência de números transfinitos, por isso, para ele, a demonstração de Cantor era totalmente sem sentido. Sendo Kronecker um dos editores do *Jornal de Crelle*, tentou, então, impedir a publicação do artigo *Uma contribuição à teoria dos conjuntos* [CANTOR, 1877], escrito em julho de 1877, e que tem um de seus resultados mais surpreendentes: o “tamanho” de $\mathbb{R}^n$ é o mesmo de $\mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}^n$ representa o produto cartesiano¹¹ $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$, n vezes. Na realidade Cantor demonstrou este teorema até mesmo para n um número infinito enumerável. Veremos esta demonstração no último capítulo.

¹⁰ Kronecker tem o apelido de “Méré”, tipo de espírito estreito que se opõe ao inesperado do progresso matemático. [CAVAILLÉS, p.180, 1962]

¹¹ Definimos o produto cartesiano $A \times B$ como o conjunto dos pares ordenados (a, b) onde $a \in A$ e $b \in B$.

Foi neste artigo que Cantor expõe publicamente pela primeira vez a questão que viria a ser origem do que ficou conhecido depois como a Hipótese do Contínuo: **Existe um subconjunto de $\mathbb{R}$ cuja potência seja estritamente superior a de $\mathbb{N}$ e estritamente inferior a de $\mathbb{R}$?**

1.5 CANTOR E A HIPÓTESE DO CONTÍNUO

O que Cantor quis dizer exatamente com essa questão?

Já se sabia nesta época que existiam pelo menos dois infinitos: o infinito enumerável relacionado ao conjunto dos números naturais e o infinito não-enumerável, que estava relacionado à reta real. A questão era decidir se poderia existir algum infinito diferente **entre** esses dois já conhecidos.

Para responder à questão acima, que a primeira vista parece tão simples, Cantor pesquisou sobre a potência de conjuntos perfeitos e, além disso, de que modo os pontos se distribuíam na reta, definindo conjuntos aderência, coerência e inerência, cuja explicação se encontra no segundo capítulo.

Cantor percebeu que se concentrar exclusivamente sobre conjuntos de pontos poderia ser um “beco sem saída” que nunca o levaria a resolver o problema do contínuo. Ele notou que deveria tentar reduzir o problema do contínuo às suas características mais essenciais, que não dependessem de propriedades métricas, mas da natureza da *ordem*. [DAUBEN, p.150, 1990]

Na sua Segunda Comunicação (*Zweite Mittheilung*), Cantor enfatiza a sua teoria dos tipos ordenados e dá um novo rumo ao estudo da estrutura do contínuo e sua potência.

Durante toda a sua vida, Cantor tentou demonstrar a Hipótese do Contínuo, mas seus esforços não tiveram o resultado esperado. Muitos de seus biógrafos, erroneamente, atribuíram seus problemas mentais às suas tentativas frustradas de demonstrar a Hipótese do Contínuo.

1.6 ELABORAÇÃO DE UMA DE SUAS MAIORES OBRAS

A partir de 1879, Cantor escreveu uma série de seis artigos sobre conjuntos lineares infinitos de pontos no *Jornal de Crelle*. Estes artigos serviram para familiarizar os leitores com seu trabalho e forneceram uma série de conceitos básicos essenciais: conjuntos derivados, conjuntos densos, potência de um conjunto, ponto limite, ponto isolado, conjuntos bem-definidos. Estes conceitos serão vistos no próximo capítulo.

Somente em 1883, Cantor expõe pela primeira vez sua teoria dos números transfinitos com a publicação de uma de suas obras mais importantes: *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, traduzida para o francês com supervisão do próprio Cantor e publicada no *Acta Mathematica* com o título *Fondements d'une théorie générale des ensembles*. Desta tradução autorizada por Cantor, foram retirados os capítulos de conteúdo mais filosófico e os que restaram aparecem numa ordem diferente do original. Apesar destas alterações, este trabalho foi o responsável pela divulgação da obra de Cantor fora da Alemanha.

Na França, Henri **Poincaré** (1854 – 1912) foi um dos primeiros matemáticos a utilizar as teorias cantorianas em seu artigo intitulado “*Mémoire sur les groupes kleinéens*”; em 1887, Paul **Painlevé** (1863 – 1933) as usou em seus estudos sobre singularidades das funções analíticas; Émile **Borel** (1871 – 1956) as empregou dentro da teoria da medida e já no final do século, René-Louis **Baire** (1874 – 1932) aplicou em seus trabalhos grande parte das noções introduzidas por Cantor.

Em uma carta datada de 8 de março de 1883, Mittag-Leffler, editor do *Acta Mathematica*, escreveu a **Hermite**¹², contando que pediu a Cantor para redigir o *Grundlagen* de outra maneira, excluindo a parte filosófica e se limitando à exposição da questão matemática. A justificativa apresentada por tal pedido foi que, nesta época, a maioria dos matemáticos achava que o infinito efetivo (actual infinite) era assunto para filósofos, não para matemáticos.

Em 2006, saiu uma tradução, feita por J.Bares e J. Climent, em espanhol, que pode ser acessada em <http://www.uv.es/jkliment/Documentos/Cantor83.pc.pdf> com o título *Fundamentos de una teoría general de las multiplicidades: una investigación matemático-filosófica en la teoría del infinito*. Esta tradução segue a ordem original e inclui os artigos omitidos na versão em francês.

1.7 DOENÇA E NOVOS INTERESSES

No final de 1884, Cantor sofre sua primeira crise de depressão e, em uma carta a Mittag-Leffler, demonstra o desejo de abandonar a matemática pela filosofia. Muitos de seus biógrafos atribuem suas crises aos problemas que teve com Kronecker e com os matemáticos em geral que não aceitavam suas idéias. Outra explicação levantada para sua doença foram suas tentativas frustradas de demonstrar a Hipótese do contínuo.

Hoje em dia acredita-se que sua doença tenha sido psicose maníaco-depressiva, ou como é chamada atualmente, “distúrbio bipolar” e que tem causas internas, talvez genéticas, e não externas, o que nos leva a crer que ele teria crises de depressão independente de seus problemas pessoais. Para saber mais detalhes sobre sua doença ver o capítulo XV do livro *Infinito e inconsciente* [CHARRAUD].

¹² Matemático francês que se correspondia com matemáticos de toda a Europa, foi o primeiro a demonstrar que o número neperiano ‘e’ era um número irracional transcendente. Depois, inspirado em sua demonstração, Liouville mostrou que o número π (pi) também era transcendente.

Segundo Dauben [2005]: Sua enfermidade mental, longe de desempenhar um papel inteiramente negativo, pode muito bem ter proporcionado, durante suas fases maníacas, a energia e a tenacidade obsessiva com que defendeu sua teoria.

Cantor diversifica seus interesses incluindo entre seus correspondentes filósofos e teólogos. Um de seus objetivos consistia em provar que, na realidade, as obras de Shakespeare foram escritas por Francis Bacon. A partir de 1884, abandona sua cadeira de professor de matemática e passa a ensinar filosofia durante alguns anos.

Em uma carta, datada de 21 de maio de 1885, Sophie **Kowalevski** (1850 – 1891) escreve para Mittag-Leffler relatando que os alunos abandonaram as aulas de filosofia de Cantor, até que não restasse mais nenhum.

Eneström¹³ também visitou Cantor. Este último começou durante o semestre anterior aulas sobre a filosofia de Leibniz. No início ele tinha 25 alunos, mas então, pouco a pouco, a turma foi se dissolvendo, primeiro para 4, então para 3, então 2, finalmente para apenas um. Cantor manteve-se firme apesar disso e continuou as aulas. Mas! Um belo dia veio o último dos moicanos, um pouco perturbado, e agradeceu muito ao professor, mas explicou que ele tinha muitas outras coisas a fazer e que ele não poderia prosseguir com as aulas. Então Cantor, para alegria de sua mulher, proferiu uma promessa solene de nunca dar aulas de filosofia novamente!¹⁴

Em 1887, Cantor publica uma Comunicação: *Mittheilungen zur Lehre Von Transfiniten* numa revista de filosofia. Desde que Mittag-Leffler havia impedido a publicação de seu artigo *Princípios de uma teoria dos tipos ordinais* (novembro de 1884), Cantor passou a publicar em revistas não-matemáticas.

¹³ Gustav Eneström (1852 – 1923) – historiador e matemático sueco era assistente de Mittag-Leffler.

¹⁴ Eneström har också uppsökt Cantor. Densamma har börjat under den föregående terminen att föreläsa om Leibnitz's philosophie. I början hade han 25 ahörare, men as smaningom ha de smältet ihop först till 4, sedan till 3, sa till 2, slutligen till en enda. Cantor höll ända ut och fortsatte att föreläsa. Men ve! En vavacker dag kom den sista mohikanern, något generad, ock tackade professorn sa mycket men förklarade at than hade sa manga andra sysselsättningar at than icke orkade följa prof's föreläsningar. Da har Cantor, till sin hustrus outsägliga fröjd, gifvit ett högtidligt löfte att aldrig föreläsa om filosofien igen! [DAUBEN, p. 313, 1990]

Neste período, Cantor escreve a Constantin **Gutberlet**¹⁵ (1837 – 1928), em 24 de janeiro de 1886 e 06 de fevereiro de 1887, falando sobre seus interesses na maçonaria, rosacruzismo e teosofia.

Em uma carta de 22 de janeiro de 1894, escreve a Hermite, explicando que a matemática não é seu único interesse e que a metafísica e a teologia ocuparam sua mente a tal grau que sobra pouco tempo para sua primeira paixão.

Num artigo publicado em 1894, Cantor lista a maneira de escrever números pares acima de 1000 como soma de dois primos. O trabalho causa estranheza, mostrando como sua saúde mental não ia bem, já que a conjectura de Goldbach¹⁶ já tinha sido feita há 40 anos para números acima de 10000.

Em 1905, ele escreve um ensaio religioso “*Ex Oriente Lux*”, traduzido para o inglês por Philip Jourdain.

Cantor possuía uma biblioteca valiosa com obras de Francis Bacon, Shakespeare, bem como coleções de filosofia e de matemática. Infelizmente, três anos depois de sua morte, ela foi vendida com o objetivo de sustentar sua família durante o período de inflação na Alemanha.[GRATTAN-GUINNESS, p. 517, 1978]

1.8 PARTICIPAÇÃO DE CANTOR NOS ENCONTROS DE MATEMÁTICA

Apesar de todas as dificuldades, Cantor nunca abandonou realmente a matemática e teve um papel essencial na fundação, em 1890, da Sociedade dos Matemáticos Alemães (Deutschen Mathematiker-Vereinigung - DMV). Sua meta era desenvolver uma organização que fosse

¹⁵ Religioso neo-tomista que escreveu o primeiro artigo teológico citando os números transfinitos de Cantor. [HEDMAN]

¹⁶ Todo número par, maior que dois, pode ser escrito como a soma de dois números primos.

independente de Berlim e Göttingen, com o objetivo de fortalecer e estimular os jovens matemáticos e servir de fórum de idéias novas, por mais radicais que pudessem parecer.

No ano seguinte, em 1891, aconteceu o Primeiro Encontro de Matemáticos Alemães, em Bremen. Uma das intenções de Cantor era participar de congressos internacionais para poder expor suas idéias para matemáticos de outras nacionalidades.

Quase 20 anos depois de seu primeiro trabalho feito em 1870, no artigo *Sobre uma questão fundamental da teoria das multiplicidades*, Cantor demonstrou de uma maneira diferente do que já havia feito em 1873, a não-enumerabilidade dos números reais e, em particular, dos números transcendentos, usando o Argumento Diagonal que é reconhecido até hoje como uma ferramenta poderosa para se demonstrar vários teoremas. Ainda neste artigo, usando o mesmo método, Cantor demonstra que o conjunto das funções definidas no intervalo $[0;1]$ possui potência maior que a potência do contínuo.

Em 1895/1897 publica seu último trabalho, o artigo *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* traduzido para o francês por F. Marotte com o título *Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis*. Neste artigo, Cantor trabalha com conjuntos abstratos quaisquer no lugar de conjuntos de pontos; além disso, aborda a questão da comparabilidade dos alefs. Apesar de ter escrito o segundo artigo apenas alguns meses depois do primeiro, Cantor esperou dois anos para publicá-lo porque tinha esperança de poder incluir a demonstração da Hipótese do Contínuo.

Neste mesmo ano de 1897, organiza o Primeiro Congresso Internacional de Matemáticos em Zurique, onde Jacques Hadamard e David Hilbert reconhecem o valor de seu trabalho e lhe rendem homenagens. Hilbert declara numa citação a respeito da aritmética dos números

transfinitos: “o produto mais extraordinário do pensamento matemático, uma das mais belas realizações da atividade humana no domínio do puramente inteligível”.

Em 1904 obtém a mais alta distinção que a Royal Society de Londres pode atribuir: a medalha Sylvester.

Neste mesmo ano, no Terceiro Congresso Internacional de Matemática, realizado em Heidelberg, o matemático húngaro Jules **König** (1849 – 1913) apresentou uma comunicação que afirmava que a potência do contínuo não era um alef. Felizmente, logo depois Zermelo encontrou um erro na demonstração: König usou indevidamente o resultado de Bernstein¹⁷. No entanto, Cantor continuou preocupado que alguém pudesse encontrar outro caminho para refutar a Hipótese do Contínuo.

Menos de um ano depois deste episódio, Zermelo provou o Teorema da Boa-Ordenação, isto é, que todo conjunto pode ser bem-ordenado e, em consequência, que toda potência é um alef. Para isto, ele usou o Axioma da Escolha explicitamente pela primeira vez. A partir deste incidente, a saúde de Cantor começa a piorar e ele passa a maior parte de seu tempo na Casa de Saúde que fica na Universidade de Halle (Nervenlinik) onde veio a falecer no dia 6 de janeiro de 1918, já bastante debilitado.

Nesta época seus trabalhos eram universalmente reconhecidos e David Hilbert exclamava: “Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós”.

¹⁷ Para mais detalhes ir à seção 3.5.

1.9 LISTA DAS OBRAS ESCRITAS POR GEORG CANTOR

Começaremos esta lista citando as dissertações que Cantor defendeu:

(1) 1867 – *De aequationibus secundi gradus indeterminatis.*(Dissertation)

(2) 1869 – *De transformatione formarum ternariarum quadraticarum.*
(*Habilitationsschrift*)¹⁸

Abaixo vamos listar as obras de Cantor com as datas em que foram escritas, o título em português e, a seguir, o título original em alemão, francês ou latim. Vamos obedecer à ordem em que elas foram escritas, mesmo que tenham sido publicadas fora desta ordem.

(3) 1870 – Sobre um teorema a respeito das séries trigonométricas; publicado no
Jornal de Crelle, 72

Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz

(4) 1870 – Prova de que para cada valor real de x , uma função $f(x)$ dada por uma
série trigonométrica, pode ser escrita somente de uma maneira; publicado no
Jornal de Crelle, 72

*Beweis, dass eine für jeden reellen Wert von x durch eine trigonometrische
Reihe gegebene Funktion $f(x)$ sich nur auf eine einzige Weise in dieser Form
darstellen lässt*

(5) 21 de abril de 1871 – Sobre séries trigonométricas; publicado no
Mathematische Annalen, t. IV.

Über trigonometrische Reihen

¹⁸ Tese escrita, necessária nas universidades alemãs, para que o candidato pudesse ministrar aulas.

- (6) 8 de novembro de 1871 – Extensão de um teorema sobre a teoria das séries trigonométricas; publicado no *Mathematische Annalen*, t.V.

Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen

- (7) 23 de dezembro de 1873 – Sobre uma propriedade do sistema de todos os números algébricos reais; publicado no *Jornal de Borchardt*, vol. 77.

Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen

Depois deste artigo passariam quatro anos para Cantor voltar a publicar. Coincidentemente foi também um período onde ele parou de se corresponder com Dedekind. Especula-se que o motivo pode ter sido os afazeres com seu casamento. Mais que isso, nos parece que este período serviu para que ele amadurecesse suas idéias sobre a questão da equivalência entre reta e plano.

- (8) 11 de julho de 1877 – Uma contribuição à teoria dos conjuntos; publicado no *Jornal de Borchardt* vol. 84, em 1878.

Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre

- (9) 1879 – Sobre um teorema da teoria dos espaços invariantes; publicado por um jornal da Sociedade Real de Ciências e da Universidade Georg-Augustus de Göttingen (*Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften und der Georg-Augusts-Universität zu Göttingen*).

Über einen Satz aus der Theorie der stetigen Mannigfaltigkeiten

- (10) Janeiro de 1879 – Sobre os conjuntos infinitos e lineares de pontos¹⁹. Parte I; publicado no *Mathematische Annalen*, volume 15.

Ueber unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten

- (11) 1880 – Comentário sobre séries trigonométricas; publicado no *Mathematische Annalen*, volume 16.

Bemerkung über trigonometrische Reihen

- (12) 1880 – Comentário adicional sobre séries trigonométricas; publicado no *Mathematische Annalen*, volume 16.

Fernere Bemerkung über trigonometrische Reihen

- (13) 1880 – Sobre a teoria das funções analíticas; publicado no *Mathematische Annalen*, volume 16.

Zur Theorie der zahlentheoretischen Funktionen

- (14) Maio de 1880 – Sobre os conjuntos infinitos e lineares de pontos. Parte II; publicado no *Mathematische Annalen*, volume 17.

- (15) 1882 – Sobre um novo e geral princípio de condensação de singularidades de funções; publicado no *Mathematische Annalen*, volume 19.

Über ein neues und allgemeines Kondensationsprinzip der Singularitäten von Funktionen

¹⁹ Conjuntos que podem ser colocados em correspondência biunívoca, sem ambigüidade, com pontos distribuídos de uma maneira contínua ou não sobre uma reta ou segmento de reta.

(16) 31 de março de 1882 – Sobre os conjuntos infinitos e lineares de pontos. Parte III. *Mathematische Annalen*, volume 20.

(17) Primeiro de setembro de 1882 – Sobre os conjuntos infinitos e lineares de pontos. Parte IV; publicado no *Mathematische Annalen*, volume 21.

(18) 1883 – Sobre os conjuntos infinitos e lineares de pontos. Parte V; publicado no *Mathematische Annalen*, volume 21.

O artigo acima também foi publicado sob a forma de um livro com o título: Fundamentos de uma teoria geral de conjuntos. Uma investigação matemático-filosófica na teoria do infinito. Publicado por B. G. Teubner.

Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre. Ein mathematisch-philosophischer Versuch in der Lehre des Unendlichen

Os artigos (7), (8), (5), (6) e (19), com as cinco partes já escritas do *Sobre os conjuntos infinitos e lineares de pontos*, apareceram juntos, de forma resumida, no *Acta Mathematica* 2, impresso em 8 de junho de 1883.

O redator, Mittag-Leffler faz a seguinte observação nas notas de rodapé deste periódico:

Senhor Georg Cantor teve a bondade de nos prometer uma série de artigos novos concernentes às suas pesquisas sobre a teoria dos conjuntos; nós pensamos em prestar um serviço a nossos leitores reproduzindo aqui uma tradução para o francês das principais memórias dele que se relacionam com este assunto; nos parece indispensável à compreensão dos novos artigos que vão seguir e que o autor publicará em francês. A tradução foi revista e corrigida pelo autor.

(19) 22 de abril de 1883 – Sobre diversos teoremas da teoria dos conjuntos de pontos situados em um espaço contínuo a N dimensões; extraído de uma carta enviada à Mittag-Leffler e publicado no *Acta Mathematica* 2, em 25 de agosto de 1883.

Sur divers théorèmes de la théorie des ensembles de points situés dans un espace continu à N dimensions.

- (20) 15 de novembro de 1883 – Sobre a potência dos conjuntos perfeitos de pontos; este artigo foi extraído de uma carta de Cantor para Mittag-Leffler que então a publicou no *Acta Mathematica*, 4.

De la puissance des ensembles parfaits de points

- (21) 1884 – Sobre os conjuntos infinitos e lineares de pontos. Parte VI; publicado no *Mathematische Annalen*, volume 23.

- (22) 6 de novembro de 1884 – Princípios de uma teoria dos tipos ordinais – Primeira Comunicação; somente publicado em 1970 no *Acta Mathematica* 124.

Principien einer theorie der ordnungstypen- Erste mittheilung

Em uma carta enviada por Mittag-Leffler para Cantor, em 9 de março de 1885, ele lhe aconselha adiar a publicação de seu artigo enquanto não tivesse resultados mais conclusivos sobre a Hipótese do Contínuo:

Estou convencido de que a publicação de seu novo trabalho, antes que você explique o seu real alcance, lhe será prejudicial [...] Pode acontecer que sua teoria e você nunca encontrem o devido mérito que ambos merecem, se suas idéias são desde agora, postas em descrédito. Pode ser que daqui a cem anos, alguém venha a redescobrir suas idéias, e então será um fato que tais idéias já eram do seu conhecimento há muito tempo[...] Mas se suas idéias forem publicadas, você não exercerá nenhuma influência significativa, o que obviamente não é o seu desejo, como não seria de ninguém que se dedique à pesquisa científica. [DAUBEN, p.138, 1990]²⁰

- (23) 29 de janeiro de 1885 – Sobre diversos teoremas da teoria dos conjuntos de pontos situados em um n -espaço invariante estendido G_n – Segunda Comunicação; publicado no *Acta mathematica* 7, em 23 de março de 1885.

Über verschiedene Theoreme der Punktmengen in einem n -fach stetigen Raume G_n . Zweite Mitteilung

Continuação do artigo de mesmo título, escrito em 1883.

- (24) 1887 – Comunicação sobre a teoria dos transfinitos; publicada numa revista de filosofia, *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* 91.

Mitteilungen zur Lehre von Transfiniten

- (25) 1891 – Sobre uma questão fundamental da teoria das multiplicidades, publicado em *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 7.

Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre

- (26) 10 de agosto de 1894 – Verificação até 1000 do teorema empírico de Goldbach, apresentado no Congresso de Caen da Associação Francesa para o Progresso da Ciência.

Vérification jusqu'à 1000 du théorème empirique de Goldbach

- (27) 1895 – Contribuições aos fundamentos da teoria dos conjuntos transfinitos. Parte I; publicado no *Mathematische Annalen* 46.

- (28) 1897 – Contribuições aos fundamentos da teoria dos conjuntos transfinitos. Parte II; publicado no *Mathematische Annalen*, 49.

Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre

- (29) 1905 – *Ex Oriente Lux*. Discussão de um mestre com seu aluno sobre os pontos essenciais do documento *Christenthums*. Relatado pelo próprio aluno

²⁰ Curiosamente este artigo só foi publicado em 1970, quase 100 anos depois desta carta.

(Gespräche eines Meisters mit seinem Schüler über wesentliche Punkte des urkundlichen Christenthums. Berichtet von Schüler selbst).

Em uma carta endereçada a Philip Jourdain, com data de 29 de março de 1905, Cantor pediu a ele que traduzisse este texto religioso para o inglês e lhe enviasse uma cópia.

(30) 1905 – Uma carta de Carl Weierstrass sobre o problema dos três corpos; publicado no *Rendiconti Del Circolo matematico di Palermo* 19.

Ein Brief von Carl Weierstrass über das Dreikörperproblem

Nesta mesma carta citada acima, Cantor comenta sobre a publicação desse artigo de grande interesse científico sobre a solubilidade do problema do movimento dos três pontos materiais que se movem, depois da lei Newtoniana, sob a forma de funções analíticas.[GRATTAN-GUINNESS, p.124, 1971]

Esses artigos podem ser encontrados, em sua maioria, em [ZERMELO, 1980]

2 ORIGEM DOS NÚMEROS TRANSFINITOS

Começaremos este capítulo enumerando algumas definições e conceitos que serão usados no transcorrer deste trabalho. Para Cantor, nos seus trabalhos iniciais, o espaço métrico X considerado por ele era o conjunto dos pontos de uma reta, onde cada elemento deste conjunto estava associado a um número real.

Uma questão fundamental a ser analisada é o que levou Georg Cantor a voltar seu pensamento para conjuntos de pontos na reta e, posteriormente, para criação dos números transfinitos.

2.1 PRELIMINARES [RUDIN, 1971]

- *Espaços métricos* – dizemos que um conjunto X , cujos elementos chamaremos pontos, é um espaço métrico se, a cada dois pontos p e q de X , está associado um número real $d(p, q)$, chamado distância de p a q , tal que:

(a) $d(p, q) > 0$ se $p \neq q$; $d(p, p) = 0$;

(b) $d(p, q) = d(q, p)$;

(c) $d(p, q) \leq d(p, r) + d(r, q)$, qualquer que seja $r \in X$.

Nas definições seguintes, todos os pontos e subconjuntos mencionados são elementos e subconjuntos de X .

- *Vizinhança de um ponto p* – é um conjunto $N_r(p)$ constituído de todos os pontos $q \in X$ tais que $d(p, q) < r$. O número r é chamado raio de $N_r(p)$.

- O ponto p é *ponto-limite* (*Grenzpunkt*) ou *ponto de acumulação* de um conjunto P se toda vizinhança de p contém um ponto $q \neq p$ tal que $q \in P$.
- O ponto p é *ponto de condensação* de um conjunto P se toda vizinhança de p , que pode pertencer ou não ao conjunto P , contém um número **não-enumerável** de pontos de P .

Observe que a definição de ponto de condensação é mais restrita que a definição de ponto-limite, de modo que todo ponto de condensação é um ponto-limite, mas a recíproca não é verdadeira.

- *Ponto-isolado* de P é todo ponto que pertence a P , mas não é ponto-limite de P .

Por exemplo, para o conjunto $P = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \dots\right\}$, temos o número zero como ponto-limite; todos os outros são pontos isolados. Repare que o ponto-limite não precisa pertencer necessariamente ao conjunto P .

A definição abaixo, bem como as anteriores de ponto-limite, ponto isolado e vizinhança, foram enunciadas por Cantor no artigo *Extensão de um teorema sobre a teoria das séries trigonométricas*. [(6) na lista 1.9]

- *Sistema derivado de P* – conjunto dos pontos de acumulação de P , denotado por P' . Ao conjunto de pontos de acumulação de P' , Cantor chamou *segundo sistema derivado de P* e denotou por P'' . E assim definiu $P^{(v)}$ o v -ésimo sistema derivado de P como o conjunto dos pontos de acumulação de $P^{(v-1)}$. Se depois de v operações, o sistema se compõe de um número finito de pontos e conseqüentemente não gera mais nenhum sistema derivado, Cantor o denotou por *sistema primitivo de v -ésima espécie* (*Art*). Todos os conjuntos de pontos de *v -ésima espécie*, para algum número finito v , constituem conjuntos derivados de 1º tipo ou gênero (*Gattung*). Conjuntos derivados de segundo tipo são aqueles para os

quais $P^{(v)} = \emptyset$ (conjunto vazio) não é satisfeito para nenhum valor finito v , mesmo grande. Tomando o ∞ ²¹ como o menor número infinito além dos números finitos, então $v < \infty$ para todos valores finitos de v , conjuntos derivados de segundo tipo são conseqüentemente aqueles para os quais $P^{(\infty)} \neq \emptyset$, no qual $P^{(\infty)} = \bigcap_{k=1}^{\infty} P^k$.

As definições de conjuntos aderência, coerência e inerência listadas abaixo aparecem numa carta de Cantor para Mittag-Leffler, em 1884, como uma tentativa de demonstrar a Hipótese do Contínuo e logo depois no artigo *Princípios de uma teoria dos tipos ordinais* [(22) na lista 1.9]:

- *Conjunto aderência* – conjunto dos pontos isolados de P . É denotado por P_a , e podemos escrever que $P_a = P \cap (P - P')$.
- *Conjunto coerência* – conjunto dos pontos de acumulação de P . É denotado por P_c , e podemos escrever $P_c = P \cap P'$.

Qualquer conjunto de pontos P pode ser representado como $P = P_a + P_c$, onde o sinal de + representa a união disjunta de conjuntos.

- *Conjunto inerência* – conjunto dos pontos de acumulação de P_c . É denotado por P_c'' , em que v se refere a ordem considerada. Por exemplo: P_c^1 é o conjunto dos pontos de acumulação de P_c , P_c^2 é o conjunto dos pontos de acumulação de P_c^1 , e assim sucessivamente.

²¹ Este símbolo dado para o infinito, conhecido como um oito deitado (∞), foi usado pela primeira vez pelo matemático inglês John Wallis em 1655.

- *Ponto interior de P* – é todo ponto p , em que existe uma vizinhança N de p tal que $N \subset P$.
- Um conjunto P é **aberto** se todo ponto P é ponto interior de P .
- Um conjunto P é **fechado** se todo ponto de acumulação de P , pertence a P . No exemplo dado acima, o conjunto P não é fechado, pois zero não pertence a P .
- Um conjunto P é **perfeito** quando o conjunto P' , formado por todos os pontos de acumulação de P , é igual ao próprio P .
- Um conjunto P é **conexo** se para quaisquer dois pontos t e t' ($t, t' \in P$) e para $\varepsilon > 0$, tão pequeno quanto se queira, existirá sempre um número finito de pontos $t_1, t_2, \dots, t_n$ de P , de várias maneiras, de modo que as distâncias $tt_1, t_1t_2, t_2t_3, \dots, t_nt'$ sejam todas menores que ε .
- Um conjunto P é **limitado** se existe um número real m e um ponto $q \in X$ tal que $d(p, q) < m$ para todo $p \in P$.
- Um conjunto P é **denso** em X se todo ponto de X é ponto de acumulação de P ou é ponto de P (ou ambos).

O conjunto dos números racionais é o exemplo clássico de conjunto denso nos reais, pois todo número real (irracional) é limite de uma seqüência de racionais, ou então é racional.

- *Função* – dados dois conjuntos A e B onde a cada elemento x de A se associa, de algum modo, um elemento de B , que designaremos por $f(x)$. Dizemos que f é uma função de A em B (ou uma aplicação de A em B).
- *Função contínua* – Suponhamos X e Y espaços métricos, $E \subset X$, $p \in E$, e f uma aplicação de E em Y . Diz-se que f é contínua em p se a cada $\varepsilon > 0$ corresponde $\delta > 0$ tal que $d(f(x); f(p)) < \varepsilon$ quando $x \in E$ e $d(x; p) < \delta$.

Se f é contínua em cada ponto de E , diz-se que f é contínua em E .

- *Sucessão* – é uma função $s: \mathbb{N} \rightarrow X$, onde a cada $n \in \mathbb{N}$ corresponde um elemento $a_n \in X$. Os elementos a_n são chamados termos da sucessão e a notação (a_n) é usada para designar a sucessão.
- *Sucessões convergentes* – diz-se que uma sucessão (p_n) em um espaço métrico X converge se existe um ponto $p \in X$ com a seguinte propriedade: Para cada $\varepsilon > 0$, existe um inteiro N tal que se $n \geq N$, $d(p_n, p) < \varepsilon$, onde d representa a distância em X .
- *Séries* – dada uma sucessão (a_n) , associamos a sucessão (s_n) , em que
$$s_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$
, se $n = \infty$, adotamos a expressão
$$s = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$
 e a chamamos de série infinita, ou simplesmente série. Os termos s_n são chamados somas parciais da série.
- *Séries de Fourier* – Uma série da forma
$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)]$$
 onde f é uma função integrável em $[-\pi; \pi]$, os números: $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$ e
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, n \geq 1$$
, são chamados de coeficientes de Fourier de f e a série formada com estes coeficientes, é a série de Fourier de f .
- Uma sequência de funções $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$ converge *simplesmente* para a função $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, e denotamos por $f_n \rightarrow f$, quando para cada $x \in X$, a sequência de números $(f_1(x); f_2(x); \dots; f_n(x); \dots)$ converge para o número $f(x)$. Ou seja, para todo $x \in X$ fixado, tem-se
$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

- Dizemos que $f_n \rightarrow f$ converge uniformemente em X se para qualquer $\varepsilon > 0$ dado, pode-se obter $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que **todas** as funções f_n , com $n > n_0$, têm seus gráficos contidos na faixa de raio ε em torno do gráfico de f .

A soma $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ de uma série é um caso particular de um limite de sequência:

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n, \text{ em que } s_n = f_1 + f_2 + \dots + f_n. \text{ [LIMA, p.287, 1978]}$$

- *Grupo integrável* - conjunto de pontos que pode ser coberto por uma sequência finita de intervalos cujo comprimento total é zero, ou seja, tem medida nula.
- Um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem *medida nula*, e escrevemos $m(X) = 0$, quando para todo $\varepsilon > 0$, for possível obter uma coleção enumerável de intervalos abertos $I_1, I_2, \dots, I_n$ tais que

$$X \subset I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_n \dots \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \varepsilon. \text{ [LIMA, p.273, 1978]}$$

2.2 NÚMEROS IRRACIONAIS E O CONTÍNUO

Para entender e aprofundar a teoria dos transfinitos e analisar alguns de seus desdobramentos, como, por exemplo, a Hipótese do Contínuo, era essencial fazer um estudo mais profundo do que era o contínuo e a construção dos números reais de uma maneira mais rigorosa.

Na Grécia Antiga, descobriu-se a existência de medidas geométricas incomensuráveis e uma consequência disso foi uma tendência crescente em separar a geometria da aritmética, sugerindo que tal analogia não teria uma base lógica. Apesar disso, no século XVII, a geometria analítica identificou a geometria com a aritmética e, por mais de 200 anos, até a época de Weierstrass, a introdução dos números irracionais era, explícita ou implicitamente geométrica. Newton e a maioria de seus sucessores usaram uma base geométrica para os números.

Qualquer que seja a definição dos números irracionais ela terá sempre como requisito básico um conjunto infinito bem definido de números racionais e que tenha a potência do enumerável.

Apenas para ilustrar, mostraremos como os gregos, na Antiguidade, faziam para calcular algumas raízes quadradas. Eles utilizavam o seguinte método; uma raiz do tipo $\sqrt{a \times b}$ gerava duas seqüências de valores, a primeira formada pela média aritmética entre **a** e **b** e a segunda pela média harmônica²² também entre **a** e **b**. O segundo termo da seqüência era obtido repetindo-se o mesmo procedimento agora para **a'** e **b'** (**a'** resultante da média aritmética e **b'** da média harmônica) e assim por diante, calculando as médias aritméticas e harmônicas sucessivamente. Com esse processo infinito, obtinham-se duas seqüências infinitas de números racionais que se aproximavam do valor irracional desejado. Por exemplo, para $\sqrt{3} = \sqrt{3 \times 1}$, obtemos as seqüências (2; 1,75; 1,73214...; ...) e (1,5; $\frac{12}{7}$; 1,73196..., ...) que nos dá com uma boa aproximação que o valor de $\sqrt{3} = 1,73205...$ (cálculo feito utilizando uma calculadora) está entre 1,73196 e 1,73214.[OLIVEIRA, p.1275, 1968]

Cauchy, no início do século XIX, adotou explicitamente uma visão geométrica no seu livro “*Cours d’analyse*”, ele definiu ‘limite’, e números irracionais como segue:

Quando os valores sucessivos atribuídos a uma variável se aproximam indefinidamente de um valor fixo de modo que terminem por diferir dele tão pouco quanto se deseje, este valor fixo é chamado o “limite” de todos os outros. Por exemplo, um número irracional é o limite das diversas frações que fornecem valores cada vez mais aproximados.²³

²² Média harmônica é definida como sendo o inverso da média aritmética dos inversos. Por exemplo: a média

harmônica entre 2 e 3 é $\frac{1}{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \div 2} = \frac{1}{\frac{5}{6} \div 2} = \frac{1}{\frac{5}{12}} = \frac{12}{5} = 2,4$.

²³ Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s’approchent indéfiniment d’une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l’on voudra, cette dernière est appelée la *limite* de toutes les autres. Ainsi, par exemple, un nombre irrationnel est la limite des diverses fractions qui en fournissent des valeurs de plus en plus approchées.[CAUCHY, p.4]

Para Cauchy, os números irracionais podiam ser vistos como o limite de várias frações que forneceriam mais e mais valores aproximados do número em questão.

Cantor não concordava com essa idéia dada por Cauchy para os irracionais; ele achava que existia uma “falha lógica”. Definia-se o irracional **b** como o limite de seqüências de números racionais, mas a definição do limite é obtida pela identificação com o número irracional já definido anteriormente.

Aqui existiria um erro lógico, desde que a definição da soma $\sum a_v$ seria igual no final, a um número **b**, necessariamente definido anteriormente. Eu acreditava que este erro lógico, evitado primeiramente por Weierstrass, era comumente cometido, mas não era notado porque pertencia a aqueles casos raros em que erros verdadeiros podem não causar nenhum dano significativo nos cálculos.²⁴

No final do século XIX, começavam-se a estudar os fundamentos da análise em bases puramente aritméticas, isto ficou conhecido por “arimetização” da análise. Os trabalhos de Weierstrass, Cantor e Dedekind de certa maneira se completam.

2.2.1 Definição dos números irracionais segundo Weierstrass

Para Weierstrass, um número era ‘determinado’ se fossem conhecidos os elementos que o compunham e quantas vezes cada elemento ocorria nele. Por exemplo, o número 3,525 é determinado, pois ele é formado pelos algarismos 2, 3 e 5, sendo que o 2 e o 3 aparecem uma vez e o 5 aparece duas vezes.

Considerando números formados com a unidade principal e uma infinidade de suas casas decimais, Weierstrass chamou qualquer agregado cujos elementos e o número (finito) de vezes

²⁴ Here there would be a logical error, since the definition of the sum $\sum a_v$ would first be won by equating it with the finished number **b**, necessarily defined beforehand. I believed that this logical error, first avoided by Weierstrass, was earlier committed quite generally, and was not noticed because it belongs to those rare cases in which real errors can cause no significant harm in calculations.[CANTOR, 1883, apud DAUBEN, p.37, 1976]

que cada elemento ocorre nele são conhecidos, uma (determinada) “**quantidade numérica**” (*numerical quantity – Zahlengrösse*).

Um agregado consistindo de um número finito de elementos era visto como igual à soma de seus elementos, e dois agregados de um número finito de elementos era visto como igual quando as respectivas somas de seus elementos fossem iguais.

Exemplo: $3,525 = \{3 + 0,5 + 0,02 + 0,005\} = \{3 + 0,42 + 0,105\}$

Um número racional **r** era dito **estar contido** em uma “quantidade numérica” **a** quando fosse possível separar de **a** um agregado parcial igual a **r**.

Exemplo: $r = 3,14 = \{3 + 0,1 + 0,04\}$ está contido em $a = \pi = \{3 + 0,1 + 0,04 + 0,001 + 0,0005 + 0,00009 + \dots\}$ então $r < \pi$.

Uma “quantidade numérica” **a** era dita ser ‘finita’ se fosse possível designar um número racional **R** tal que todo número racional contido em **a** fosse menor do que **R**.

Exemplo: **a** = 0,3333 e **R** = $\frac{1}{3}$.

Duas “quantidades numéricas” **a** e **b** eram ditas ‘iguais’, quando todo número racional contido em **a** estivesse contido em **b** e vice-versa. No exemplo anterior, considerando a dízima periódica **a** = 0,3333..., temos a igualdade **a** = **R**

Quando **a** e **b** não são iguais, existe no mínimo um número racional que está contido em **a**, sem estar contido em **b** ou vice-versa: no primeiro caso, **a** é dito “maior” que **b**; no segundo caso, **a** é dito “menor” que **b**.

Weierstrass chamou a quantidade numérica **c** definida (i.e. idêntica com) pelo agregado cujos elementos são aqueles que aparecem em **a** ou **b**; cada um destes elementos, sendo tomado o número de vezes igual ao número de vezes em que ele ocorre em **a**, aumentado pelo número de vezes que ele ocorre em **b**, a “soma” de **a** e **b**. O “produto” de **a** e **b** foi definido como sendo a

quantidade numérica formada pelos agregados cujos elementos são obtidos formando de todas as maneiras possíveis o produto de cada elemento de **a** e cada elemento de **b**. Do mesmo modo foi definido o produto de qualquer número finito de quantidades numéricas.

Por exemplo: $a = 3,15 = \{3 + 0,1 + 0,05\}$ e $b = 2,75 = \{2 + 0,7 + 0,05\}$

Soma = $\{3 + 2 + 0,1 + 0,7 + 0,05 + 0,05\} = 5,9$

Produto = $\{3 + 0,1 + 0,05\} \times \{2 + 0,7 + 0,05\} = \{6 + 2,1 + 0,15 + 0,2 + 0,07 + 0,005 + 0,1 + 0,035 + 0,0025\} = 8,6625$

A “soma” de um **número infinito** de quantidades numéricas **a**, **b**, ... foi então definida sendo o agregado (**s**) cujos elementos ocorrem em um (pelo menos) de **a**, **b**, ...; cada um destes elementos **e** sendo tomados o número de vezes (**n**) igual ao número de vezes que ele ocorre em **a**, aumentado pelo número de vezes que ele ocorre em **b**, e assim por diante. Com o objetivo que (**s**) seja *finito* e determinado, é necessário que cada um destes elementos que ocorre nele, ocorra um número finito de vezes, e é necessário e suficiente que nós possamos designar um número **N** tal que a soma de qualquer número finito de quantidades **a**, **b**,... seja menor que **N**. [JOURDAIN, Philip. In: CANTOR, p. 18, 1915.(27) e (28) na lista 1.9]

$$\text{Temos que, } \sum_{i=1}^n a_i < N \text{ então } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = N$$

Como podemos ver, no momento que se relaciona o conjunto com o número que se está definindo deve enfatizar-se como essencial que somente se usa a soma de um número sempre finito de elementos racionais e que o número **N** a definir não é posto desde o princípio como igual a soma.

O Teorema de Bolzano-Weierstrass que diz que se **S** é um conjunto **limitado** em **E** (espaço métrico) contendo infinitos pontos, então **S** terá ao menos um ponto de acumulação em **E**, nos garante a existência do limite da série.

Pela teoria dos números reais de Weierstrass, os novos números (quantidades numéricas) eram agregados de números **previamente** definidos.

Ou seja, Weierstrass considerou os números irracionais como limite de séries de números racionais, assim, por exemplo, temos que $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1}$.

A vantagem desta teoria é que a existência de limites pode ser provada. Isto quer dizer que através de uma construção real podemos provar que existe um número que é o limite de uma certa série satisfazendo a condição de “finitude” ou “convergência”.

É importante observar que na sua teoria dos números irracionais, Weierstrass não faz nenhuma associação dos números reais com pontos da reta, ao contrário de Cantor que enunciou o seguinte axioma:

A todo número real corresponde um ponto da reta tendo este número por abscissa.

Cantor chamou esse enunciado de axioma, justificando que, por sua natureza ele não pode ser demonstrado, já que nada nos garante que possam existir irracionais que não estejam representados na reta. Por outro lado, a recíproca, isto é, que todo ponto da reta é representado por um número real, é verdadeira, bastando para isso pensar na distância deste ponto à origem (representada pelo número zero), se ele estiver à direita da origem e o simétrico da distância, se este ponto estiver à esquerda.

Dedekind também fez esta associação entre os números reais e a reta real, por isso, esse axioma ficou conhecido como Axioma Cantor-Dedekind.

2.2.2 Definição dos números irracionais segundo Cantor

No artigo *Extensão de um teorema sobre a teoria das séries trigonométricas* [CANTOR, 1871, (6) na lista 1.9], Cantor usou a idéia weierstrassiana de irracionais como limites; a diferença é que Cantor usou seqüências convergentes no lugar das séries. Ele define logo no primeiro parágrafo os números reais da seguinte maneira:

Usando os números racionais, que ele denomina Sistema A, como fundamento, Cantor começa definindo **seqüências fundamentais** de números racionais como sendo uma seqüência infinita

$$(1) \quad a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$$

tal que, para todo racional positivo $\alpha > 0$ tão pequeno quanto se queira, existe um inteiro N tal que $|a_{n+m} - a_n| < \alpha$ para todo inteiro m, se $n > N$. Quando isto é satisfeito, dizemos que esta seqüência satisfaz o Critério de Cauchy.

Quando a seqüência satisfaz o Critério de Cauchy observamos que os termos desta seqüência, a partir de um certo número N, vão se tornando cada vez mais próximos um do outro de modo que acabam determinando um ponto de acumulação.

Esta propriedade da seqüência (1), Cantor exprime da seguinte maneira:

“A seqüência (1) tem um limite determinado **b**”.

Estas palavras servem somente para enunciar esta propriedade da seqüência, não tendo outra intenção senão a de exprimir que da mesma forma que nós ligamos a série (1) com um sinal particular b, devemos também ligar diferentes sinais b, b', b'' a diversas séries da mesma espécie.

Seja uma segunda seqüência:

$$(1') \quad a'_1, a'_2, \dots, a'_n, \dots$$

tendo um limite determinado b' . Obtemos que as duas seqüência (1) e (1') tem uma das três seguintes relações, que se excluem uma da outra:

1º $a_n - a'_n$ fica infinitamente pequeno a medida que n cresce, ou

2º $a_n - a'_n$ a partir de um certo n , fica sempre maior que uma grandeza positiva (racional) ε ,
ou finalmente

3º $a_n - a'_n$ tem a partir de um certo n , a diferença fica menor que uma grandeza negativa (racional) ε .

No caso da primeira relação temos $b = b'$, no segundo caso $b > b'$ e no terceiro caso $b < b'$.

Encontramos o mesmo resultado para uma seqüência (1), com um limite b e tendo com um número racional a uma das três relações seguintes:

1º $a_n - a$ fica infinitamente pequeno a medida que n cresce, ou

2º $a_n - a$ a partir de um certo n , fica sempre maior que uma grandeza positiva (racional) ε ,
ou finalmente

3º $a_n - a$ tem a partir de um certo n , a diferença fica menor que uma grandeza negativa (racional) ε .

Para exprimir a existência dessas relações, nós escrevemos respectivamente:

$$b = a, b > a, b < a$$

Destas definições e das que seguem imediatamente, resulta que, b sendo o limite da seqüência (1), $b - a$ fica infinitamente pequeno a medida que n cresce o que justifica por conseguinte de uma maneira precisa a designação de “limite da seqüência (1)” para b .

Nós designamos por sistema B o conjunto das grandezas numéricas b . Segundo as convenções precedentes podemos estender as operações elementares usadas com os números racionais aos dois sistemas A e B reunidos.

Se a_n e b_n são seqüências fundamentais temos que $a_n + b_n$ também é uma seqüência fundamental. Como $|a_{n+m} - a_n| < \frac{\alpha}{2}$ e $|b_{n+m} - b_n| < \frac{\alpha}{2}$ para todo inteiro m , se $n > N$, então,

$$|(a_{n+m} + b_{n+m}) - (a_n + b_n)| = |(a_{n+m} - a_n) + (b_{n+m} - b_n)| \leq |a_{n+m} - a_n| + |b_{n+m} - b_n| < \alpha$$

para todo inteiro m , se $n > N$. Assim, como queríamos mostrar, $a_n + b_n$ é uma seqüência fundamental e define o número real $a + b$. O mesmo raciocínio pode ser feito para a subtração, multiplicação e divisão, tomando o cuidado que a seqüência b_n não convirja para zero no caso da divisão.

Continuando com o mesmo raciocínio, o que aconteceria se pensássemos numa seqüência fundamental de números reais? Será que precisaremos criar uma nova classe de números para servir como limite dessas seqüências? A resposta é negativa, e Cantor provou o seguinte teorema:

Se r_n é uma seqüência de números reais tais que o $\lim_{n \rightarrow \infty} (r_{n+m} - r_n) = 0$ para um m arbitrário, isto é, r_n é uma seqüência fundamental de números reais, então existe um único número real r , definido por uma seqüência fundamental r_n de racionais, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r$.

Em outras palavras, Cantor foi capaz de mostrar que números reais, eles mesmos, servem como limites de seqüências fundamentais de reais, significando que este novo sistema é fechado nele próprio (self-enclosed).

Em 1872, Richard Dedekind publica um livro, *Continuidade e números irracionais* [DEDEKIND, 1872], onde ele também faz uma análise do contínuo e expõe a seguinte idéia, que logo depois ficou mais clara com a obra de Cantor:

A reta é infinitamente mais rica em pontos individuais que o domínio dos números racionais em números individuais.

O que muda é a distribuição desses pontos; em um segmento de reta, por menor que seja, há infinitos pontos racionais, formando um conjunto denso; no entanto, ainda sobram “buracos” para alojar um número ainda maior de números irracionais. Com o objetivo que o domínio dos números tivesse “a mesma continuidade que a reta” era necessária a criação de novos números.

Segundo Dauben [2005], esta observação apesar de coerente com uma compreensão correta do contínuo, esconde uma grande fraqueza. Se alguém tivesse perguntado a Dedekind, quanto mais rico em pontos era o contínuo que o conjunto infinito dos números racionais, Dedekind teria ficado sem resposta. Esta pergunta somente foi respondida por Cantor, em 1874, no artigo *Sobre uma propriedade do sistema de todos os números algébricos reais* [(7) da lista 1.9]

Por outro lado, Dugac [p.40, 1976] acha que esta forma de Dedekind falar da “riqueza” dos reais em relação aos racionais pode explicar em parte porque ele não ficou tão surpreso quando Cantor envia sua demonstração do teorema afirmando que as potências dos dois conjuntos são diferentes.

2.2.3 Definição dos números irracionais segundo Dedekind

Ao contrário de seus antecessores, Dedekind descarta a idéia de que a continuidade da reta fosse devida a sua densidade e procura uma característica precisa para o contínuo que sirva como base para deduções válidas: Por comentários indefinidos a respeito da conexão ininterrupta das

menores partes [de L] obviamente nada se ganha; o problema é indicar uma característica precisa da continuidade que possa servir como base para deduções válidas.²⁵

Esta característica não é densidade, nem conexão; é a capacidade da reta numérica de se partir (severability), que é consequência da reta ser ordenada e sucessiva, isto é, todo ponto sobre a reta numérica está à direita de todos os pontos que representam números menores que ele e à esquerda dos pontos que representam números maiores que ele. Isto significa que, para qualquer ponto particular, podemos **cortar** (*geschnitten*) a reta numérica em duas partes, mutuamente excludentes de conjuntos infinitos.

Para entendermos melhor a definição dada por Dedekind para os números irracionais, precisamos conhecer as seguintes definições [KAMKE, 1950]:

- **Decomposição** de um conjunto ordenado M é a representação deste na forma $M = U + B$, onde U é chamado de parte inicial e B é a parte restante; a operação de adição é a união de conjuntos disjuntos, ou seja, $U \cap B = \emptyset$.

Tipos de decomposição:

- **Salto** é uma decomposição tal que U tem um último elemento e B tem um primeiro elemento.
- **Lacuna** é uma decomposição onde U não tem último elemento e B não tem primeiro elemento.
- **Corte** (*schnitt*) é uma decomposição onde U tem um último elemento e B não tem um primeiro elemento ou, o contrário, U não tem último elemento e B tem um primeiro elemento.

²⁵ By vague remarks upon the unbroken connection in the smallest parts [of L] obviously nothing is gained; the problem is to indicate a precise characteristic of continuity that can serve as the basis for valid deductions.[WALLACE, p.207, 2003]

Por exemplo: $[0, 1] + [2, 3]$ é um salto.

$[0, 1[+ [1, 2[$ ou $[0, 1] +]1, 2]$ são cortes.

$]0, 1[+]1, 2[$ é uma lacuna.

Dedekind define os números reais através de cortes. Os cortes racionais são identificados com os números racionais. Todos os demais cortes serão chamados de números irracionais. O número real α é o conjunto de todos os racionais p tais que $p < \alpha$. [RUDIN, 1971, p.3]

A definição dos números irracionais através de cortes, dada por Dedekind, ficou conhecida como *cortes de Dedekind*, e é estudada até hoje nos cursos de Análise Real.

Ainda no livro *Continuidade e números irracionais*, na §5, Dedekind introduz sua teoria dos conjuntos dos números reais de forma muito moderna, dando uma definição axiomática. Para ele, $\mathbb{R}$ é um conjunto cujos elementos verificam as seguintes leis:

- I. Se $a > b$ e $b > c$, então $a > c$. (Transitividade)
- II. Se a e $c \in \mathbb{R}$, $a \neq c$, então existe uma infinidade de b entre a e c . (Densidade)
- III. Se $a \in \mathbb{R}$, então podemos partir o conjunto (Sistema) $\mathbb{R}$ em duas classes A_1 e A_2 tais que, qualquer que seja $a_1 \in A_1$, nós temos $a_1 < a$ e, qualquer que seja $a_2 \in A_2$, nós temos $a_2 > a$. Para o mesmo a , $a = \sup(A_1) = \inf(A_2)$, pode-se ter seja $a \in A_1$, seja $a \in A_2$.
Diremos que esta partição (Zerlegung) “será gerada por a ”.²⁶

Fora estas propriedades, o conjunto dos números reais possui também a *propriedade da continuidade*, a saber, tem-se o seguinte teorema:

- IV. Se partirmos o conjunto $\mathbb{R}$ em duas classes A_1 e A_2 de forma que, qualquer que seja $a_1 \in A_1$ e qualquer que seja $a_2 \in A_2$, nós temos $a_1 < a_2$, então existe um único número a que gera esta partição. [DUGAC, p.45]

²⁶ $\sup(A_1)$ = supremo do conjunto A_1 e $\inf(A_2)$ = ínfimo do conjunto A_2 .

Esta propriedade IV ficou conhecida como a *Essência da continuidade*, e provocou uma discussão entre Cantor e Dedekind.

No final de 1876, depois de um intervalo de dois anos sem se corresponderem, parece que o ressentimento de Dedekind em relação a Cantor esmoreceu [FERREIRÓS, p.350, 1993] e ele lhe envia alguns trabalhos já publicados, abrindo caminho assim para uma reconciliação. Cantor, então, faz alguns comentários sobre as propriedades relativas aos números reais.

Vejamos o que Cantor escreve sobre estas propriedades em uma carta para Dedekind datada de 17 de maio de 1877:

Agradecendo vivamente sua resposta, devo reconhecer que a página 25 de seu escrito sobre os números irracionais você enunciou, sob os números I, II, III e IV, propriedades que são completamente características para o domínio de todos os números reais, de tal modo que *nenhum* outro sistema de valores de números reais possa ter como aquele lá, todas estas propriedades.

Contudo, permita, lhe peço, fazer esta observação: a ênfase que você coloca em diversos lugares do seu trabalho, *diretamente* sobre a propriedade IV, como constituindo a essência da continuidade, não pode dar lugar a equívocos, que não poderiam produzir-se, na minha opinião, a respeito da sua teoria, não fosse este predomínio dado a IV (como constituindo a essência própria). Em particular, você diz no prefácio que o axioma indicado por mim é inteiramente equivalente àquele que você apresentou na § 3 como a essência da continuidade. Mas você compreende para esta mesma propriedade que, à página 25, é dada sob o número IV; ora, esta propriedade pertence também ao sistema dos números inteiros, que pode, no entanto ser considerado como um protótipo da descontinuidade.

No interesse de um assunto que se tornou caro a mim também, peço-lhe, se tiver tempo, examinar mais de perto minhas ressalvas.

P.S. Esclareço da maneira seguinte porque insiste particularmente em IV: é nesta propriedade que reside o que distingue o domínio completo dos números do domínio dos números racionais; e, no entanto parece-me, pelas razões ditas acima, que não pode atribuir à propriedade IV o nome empregado por você: “Essência da continuidade”. (cf. anexo)

É difícil acreditar que Cantor realmente tivesse alguma dúvida de que a propriedade IV fosse a que realmente definia a “essência da continuidade” desde que estivesse junta com as outras três propriedades. Considerando que Cantor e Dedekind estavam sem se corresponder há dois anos, podemos pensar que o principal motivo desta carta seria uma tentativa de reiniciar a relação entre eles criando alguma polêmica sobre o assunto.

Cantor teve seu objetivo alcançado, pois, no dia seguinte, Dedekind lhe envia uma resposta dizendo que eles correm o risco de discutir mais sobre as palavras que sobre as coisas e

volta a afirmar que “os domínios que possuem as propriedades I e II são ditos contínuos se eles possuem também a propriedade IV”. Logo depois, Cantor responde a esta carta dizendo estar inteiramente de acordo com Dedekind e reconhecendo que o desacordo era superficial e aproveita para pedir que ele avaliasse se um método de demonstração usado por ele era aritmeticamente rigoroso.²⁷ Esta questão será objeto do capítulo 5.

2.3 RELAÇÃO ENTRE AS SÉRIES TRIGONOMÉTRICAS E OS NÚMEROS TRANSFINITOS DE CANTOR

Joseph **Fourier** (1768 – 1830) afirmou em seu livro Teoria Analítica do Calor (*Théorie Analytique de la Chaleur*), publicado em 1822, que uma função qualquer pode ser representada por meio das séries trigonométricas²⁸, apesar disso ele não se preocupou em demonstrar a convergência da série, pois para ele era suficiente ver, em casos particulares, que a série convergia para os valores da função correspondente. [CAVAILLÉS, p.26, 1938]

est nulle. On obtient par-là l'équation suivante (p), qui sert à développer une fonction quelconque en une suite formée de sinus et de cosinus d'arcs multiples;

$$\pi Fx = \frac{1}{2} \int Fx dx + \cos. x \int Fx \cos. x dx + \cos. 2x \int Fx \cos. 2x dx + \text{etc.} + \sin. x \int Fx \sin. x dx + \sin. 2x \int Fx \sin. 2x dx + \text{etc.} \quad (P)$$

Ilustração 1: Fragmento do texto escrito por Fourier, e republicado por Gaston Darboux, em 1890, onde, na página 256, Fourier afirma que a equação (p) serve para desenvolver uma função qualquer em uma seqüência formada por senos e cossenos. Disponível em <http://visualiseur.bnf.fr/CadresFenetre?O=NUMM-29061&I=286&M=chemindefer>. Acessado em 24 de janeiro de 2009.

Somente em 1829, Peter **Lejeune-Dirichlet** (1805 – 1859) deu as condições necessárias para que uma função, definida no intervalo $[-\pi; \pi]$, precisaria ter para admitir uma representação por série de Fourier, naquele intervalo. Segundo ele, se uma função é contínua em todos os

²⁷ Esta carta se encontra na seção 5.2.1.

²⁸ Essas séries ficaram conhecidas por Séries de Fourier e estão definidas na seção 2.1.

pontos deste intervalo ou se é descontínua, em somente um número finito de pontos e limitada, então ela pode ser representada por meio de uma série de Fourier. [NASCIMENTO JÚNIOR, p.17]

Considerando que uma função qualquer podia então ser representada por uma série trigonométrica, Heine começa a pesquisar em que condições esta representação seria única e enuncia o seguinte teorema que foi publicado, em 1870, no *Jornal de Crelle*:

Uma função $f(x)$, contínua em geral²⁹, mas não necessariamente finita, pode ser representada **somente de uma maneira** por uma série trigonométrica da forma:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin(nx) + b_n \cos(nx)], \text{ se a série é sujeita a condição de ser uniformemente}$$

convergente. As séries representam a função em geral de $-\pi$ até π .

Como já foi dito, Cantor era assistente de Heine e o encorajou a prosseguir nas suas pesquisas e estudar o seguinte problema: dada uma função arbitrária representada por duas séries trigonométricas, ambas convergindo para a mesma função f , serão elas iguais? Em que condições esta representação é necessariamente única?

Cantor inspirado na tese escrita por Bernard **Riemann** (1826 – 1866), com o título *Sobre as maneiras de representar uma função por uma série trigonométrica*³⁰ [RIEMANN, 1854], responde a estas questões tentando mostrar que o teorema enunciado por Heine continuava

²⁹ A expressão ‘em geral’ refere-se a qualquer intervalo contínuo com possíveis exceções em um número **finito** de pontos. “É claro que não podemos esperar que a série de Fourier da função convirja para o valor da função em cada ponto. Se considerarmos duas funções que diferem apenas em um conjunto finito de pontos, as integrais que definem os seus coeficientes de Fourier serão iguais e, portanto, as duas funções terão a mesma série de Fourier”. [RUDIN, p.197]

³⁰ Apesar deste artigo ter sido escrito em 1854 (*Habilitationsschrift*) somente foi publicado postumamente, em 1867.

verdadeiro para um número **infinito** de pontos, onde as funções não são contínuas no intervalo $[-\pi, \pi]$, desde que satisfaçam certas condições.

Cantor pensou que se existisse apenas um número finito de pontos de acumulação dentro do intervalo considerado, onde a função não era contínua, a unicidade do teorema poderia ser preservada. Mesmo se este número de pontos de acumulação fosse em número infinito, ainda assim o teorema de Bolzano-Weierstrass³¹ garantiria a existência de pelo menos um ponto de acumulação. Cantor demonstrou, no artigo publicado em 1871, que se este número de pontos de acumulação fosse finito, o teorema continuaria valendo. Este argumento pode se repetir um número finito de vezes, com níveis mais elevados de condensação de pontos de exceção e o resultado continuaria válido.

O que Cantor estava buscando era uma condição para que os pontos de exceção se encontrassem de tal maneira que seus pontos de acumulação estivessem espalhados de uma forma discreta entre os números reais. Tentando solucionar esse problema, Cantor fez um estudo de como as grandezas numéricas finitas ou infinitas podem se comportar. [CANTOR, 1871]

A seqüência $P^{(0)}, P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(v)}, \dots$ foi escrita por Cantor, inicialmente para v finito.

Ele enunciou o seguinte resultado:

Uma função *descontínua* $f(x)$, que não é nula ou indeterminada sobre um *sistema de pontos* P de v -ésima espécie no intervalo $[0, 2\pi]$ de *toda* espécie, mas igual a 0 para todos os outros valores de x , não pode ser desenvolvida por uma série trigonométrica.

Este teorema inspirou Cantor em relação a existência de conjuntos para os quais $P^{(v)}$ não era vazio para qualquer número finito v . Neste caso um infinito-ésimo (infinitieth) conjunto derivado P^∞ poderia existir e deste modo presumivelmente possuir seu próprio conjunto derivado $P^{\infty+1}$, e assim por diante. [GRATTAN-GUINNESS, p. 85, 2000]

A seguir, Cantor estendeu então a sua seqüência de conjuntos derivados, nas suas tentativas de obter conjuntos, cada vez mais gerais, em que o teorema da unicidade das séries trigonométricas fosse válido, e não como uma tentativa de generalizar o conjunto dos números inteiros.

$$P^{(0)}, P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(\infty)}, P^{(\infty+1)}, \dots, P^{(\infty.2)}, \dots, P^{(\infty.3)}, \dots, P^{(\infty^2)}, \dots, P^{(\infty^3)}, \dots, P^{(\infty^\infty)}, \dots, P^{(\infty^{\infty})}, \dots$$

Cantor descobriu a seqüência na tentativa de analisar a estrutura de conjuntos complicados de números reais, e não, como é às vezes dito, tentando generalizar os números naturais. Isto não quer dizer que ele não chegou a examinar a seqüência como uma generalização dos números naturais. Ele fez. Mas a seqüência resultou de tentativas de considerar funções complicadas definidas nos números reais (aqueles com conjuntos de pontos excepcionais), não do estudo do infinito ou de uma tentativa de generalizar os números naturais.³²

Somente mais tarde esta teoria foi além das suas aplicações em análise, e através de um estudo mais abstrato, foi possível, utilizando a aritmética transfinita, examinar cardinalidade e ordinalidade de conjuntos.

A princípio, Cantor chamou esses índices de “*símbolos do infinito*” com o objetivo de identificar e distinguir um conjunto derivado do outro. Somente mais tarde o novo símbolo ω foi timidamente considerado, por alguns matemáticos, como um número, com o mesmo status que os números finitos e colocado no lugar do já conhecido ∞ .

Este novo símbolo foi criado por Cantor, com o objetivo de enfatizar que o número ordinal transfinito é completo, isto é, traz dentro de si o conjunto por inteiro. O infinito potencial representado pelo símbolo ∞ era inconveniente para os seus propósitos.

³¹ Todo conjunto limitado de números reais tem pelo menos um ponto de acumulação.

³² Cantor discovered the sequence in attempting to analyze the structure of complicated sets of real numbers, not, as is sometimes said, by attempting to generalize the natural numbers. That is not to say that he did not come to view the sequence as a generalization of the natural numbers. He did. But the sequence arose from attempts to consider complicated functions on the real numbers (those with complicated sets of exceptional points), not from a study of the infinite or an attempt to generalize the natural numbers.[LAVINE, p.41]

É importante salientar que mesmo com o fortalecimento dos conceitos envolvidos na sistematização dos números transfinitos, cardinais e ordinais, alguns matemáticos da escola construtivista, se negavam a aceitar a definição de qualquer coisa que utilizasse o infinito na sua construção.

A obra de Fourier fez com que muitos matemáticos comesçassem a se preocupar mais com funções que fossem mal comportadas e tivessem infinitas descontinuidades ou oscilações. Isso gerou a criação de algumas funções muito interessantes que são usadas até hoje, nas aulas de cálculo e análise, como exemplos de funções “diferentes” das funções habituais.

Para se ter uma idéia das funções esdrúxulas que apareceram neste período, daremos um exemplo de uma função criada por Riemann que é limitada, integrável, mas descontínua em um conjunto denso de números racionais.

Considere x , uma variável real e denote por (x) , a diferença entre x e o inteiro mais próximo, ou zero se x estiver no meio entre dois inteiros consecutivos.

Temos que (x) é uma função de uma variável, com descontinuidades nos pontos $x = n + \frac{1}{2}$, onde n é um inteiro (positivo, negativo ou zero) e o intervalo $\left]-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right[$ seu conjunto imagem.

Além disso, (vx) , onde v é um inteiro, é descontínua nos pontos $vx = n + \frac{1}{2}$ ou seja, para

$$x = \frac{1}{v} \left(n + \frac{1}{2} \right).$$

Riemann definiu $f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\nu x)}{\nu^2}$, onde o fator $\frac{1}{\nu^2}$ foi acrescentado para garantir a convergência para todos os valores de x , com exceção daqueles que têm a forma $x = \frac{p}{2n}$, onde p é ímpar e p e n são primos entre si. [JOURDAIN, Philip. In: CANTOR, p. 9, 1915.(27) e (28) na lista 1.9]

$$\text{Nestes pontos, } f(x^+) = f(x) - \frac{1}{2n^2} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right) = f(x) - \frac{\pi^2}{16n^2} \text{ e}$$

$$f(x^-) = f(x) + \frac{1}{2n^2} \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots \right) = f(x) + \frac{\pi^2}{16n^2}.$$

No entanto, o número de descontinuidades as quais $|f(x^+) - f(x^-)| = \left| \frac{\pi^2}{8n^2} \right| \geq \sigma$

é sempre finito, pois $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi^2}{8n^2} = 0$. [DAUBEN, p. 14, 1990]

Utilizando o resultado que uma função descontínua é Riemann integrável se o conjunto de seus pontos de descontinuidade formam um **grupo integrável** [CAVAILLÈS, p.58,1938] temos como consequência que, $f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\nu x)}{\nu^2}$ é Riemann integrável a despeito do número infinito de descontinuidades em um conjunto denso.

2.4 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA DA UNICIDADE PARA AS SÉRIES TRIGONOMÉTRICAS

Com o objetivo de demonstrar o teorema da unicidade, Cantor prova inicialmente o seguinte teorema:

Duas séries trigonométricas:

$$\frac{1}{2}b_0 + \sum [a_n \operatorname{sen}(nx) + b_n \cos(nx)] \text{ e } \frac{1}{2}b'_0 + \sum [a'_n \operatorname{sen}(nx) + b'_n \cos(nx)]$$

que, **para todos os valores de x**, convergem e tem a mesma soma, tem os mesmos coeficientes.

Cantor demonstrou que se a diferença entre as duas séries acima é zero, isto é,

$$\frac{1}{2}(b_0 - b'_0) + \sum [(a_n - a'_n) \operatorname{sen}(nx) + (b_n - b'_n) \cos(nx)] = 0, \text{ implica que } b_0 = b'_0, \quad a_n = a'_n \text{ e}$$

$b_n = b'_n$, logo as séries são iguais.

No artigo *Extensão de um teorema da teoria das séries trigonométricas* [CANTOR, 1871,(6) da lista 1.9], Cantor faz a extensão do **Teorema de Heine**. O enunciado deste teorema que amplia o teorema de Heine é o seguinte:

TEOREMA: Se uma equação tem a forma:

$$(1) \quad 0 = C_0 + C_1 + \dots + C_n + \dots$$

onde $C_0 = \frac{1}{2}d_0$ e $C_n = c_n \operatorname{sen}(nx) + d_n \cos(nx)$ é satisfeita para todos os valores de x, com

exceção dos pontos que correspondem aos pontos de um sistema derivado de v-ésima espécie no intervalo $[-\pi, \pi[$, em que v designa um número inteiro tão grande quanto se queira, teremos:

$$d_0 = 0, \quad c_n = d_n = 0.$$

Demonstração: Nesta demonstração, como se verá, consideraremos P não somente o sistema dado de v-ésima espécie de pontos excepcionais no intervalo $[-\pi, \pi[$, mas o sistema produzido sobre a reta infinita inteira pela repetição periódica.

Consideremos agora a função:

$$(2) \quad F(x) = C_0 \frac{x^2}{2} - C_1 - \frac{C_2}{4} - \dots - \frac{C_n}{n^2} - \dots$$

Resulta da natureza do sistema P de v-ésima espécie que deve existir um intervalo $]\alpha, \beta[$ onde não se encontra nenhum ponto deste sistema; para todos os valores de x compreendidos neste intervalo teremos então, por causa da convergência de nossa série (1), que:

$$\lim(c_n \sin(nx) + d_n \cos(nx)) = 0 \text{ e, por conseguinte, } \lim c_n = 0 \text{ e } \lim d_n = 0$$

A função F goza então das seguintes propriedades [RIEMANN, § 8, 1854]:

1^o) Ela é contínua para todos valores de x .

2^o) $\lim \frac{F(x + \alpha) + F(x - \alpha) - 2F(x)}{\alpha\alpha} = 0$, se $\lim \alpha = 0$, para todos os valores de x , exceto aqueles que correspondem aos pontos do sistema P.

3^o) Temos: $\lim \frac{F(x + \alpha) + F(x - \alpha) - 2F(x)}{\alpha} = 0$, se $\lim \alpha = 0$, para todos os valores de x sem exceção.

Mostraremos agora que $F(x) = cx + c'$. Para isto consideraremos primeiramente um intervalo qualquer $]p, q[$ onde exista somente um número finito de pontos do sistema P; sejam $x_0, x_1, \dots, x_n$ estes pontos escritos segundo sua ordem de grandeza.

Podemos dizer que $F(x)$ é linear no intervalo $]p, q[$; pois $F(x)$, por causa das propriedades 1^a e 2^a, é função linear dentro de cada um dos intervalos obtidos na divisão de $]p, q[$ pelos pontos $x_0, x_1, \dots, x_n$; com efeito, não existem pontos excepcionais em nenhum destes intervalos, as conclusões aplicadas no artigo (ver Jornal de Borchardt, t. 72, p. 159) tem aqui toda sua força. Resta então demonstrar a identidade destas funções lineares.

Faremos isto para duas funções vizinhas e as escolheremos dentro dos intervalos $]x_0, x_1[$ e $]x_1, x_2[$.

Seja em $]x_0, x_1[$, $F(x) = kx + l$ e em $]x_1, x_2[$, $F(x) = k'x + l'$.

Por causa da primeira propriedade temos que $F(x_1) = kx_1 + l$, pois para valores suficientemente pequenos de α :

$$F(x_1 + \alpha) = k'(x_1 + \alpha) + l'$$

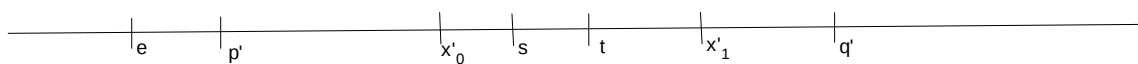
$$F(x_1 - \alpha) = k(x_1 - \alpha) + l$$

Temos assim, por causa da terceira propriedade: $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{(k'-k)x_1 + l' - l + \alpha(k'-k)}{\alpha} = 0$, para $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha = 0$, só é possível se $k = k'$ e $l = l'$.

Em resumo, podemos enunciar o resultado seguinte:

(A) “Seja $]p, q[$ um intervalo qualquer, onde exista somente um número finito de pontos do sistema P, $F(x)$ será linear neste intervalo.”

Consideramos a seguir um intervalo qualquer $]p', q'[$ que contém somente um número finito de pontos $x'_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_n$ do primeiro sistema derivado P'; dissemos inicialmente que dentro de cada intervalo parcial obtido na divisão $]p, q[$ pelos pontos $x'_0, x'_1, x'_2, \dots, x'_n$, por exemplo em $]x'_0, x'_1[$, a função $F(x)$ é linear.



Cada um destes intervalos parciais contém na verdade, em geral, um número infinito de pontos de P, de sorte que o resultado (A) não pode ser aplicado imediatamente; mas cada intervalo $]s, t[$ compreendido dentro dos limites de $]x'_0, x'_1[$ contém somente um número finito de

pontos de P (porque de outro modo existiria ainda entre x'_0 e x'_1 outros pontos do sistema P') e por conseguinte a função é linear em $]s, t[$ por causa de (A). Mas como podemos aproximar a vontade os pontos extremos s e t dos pontos x'_0 e x'_1 , podemos concluir sem esforço que a função contínua $F(x)$ é também linear em $]x'_0, x'_1[$.

Depois de ter demonstrado para cada um dos intervalos parciais de $]p', q'[$, obtemos o seguinte resultado pelo mesmo raciocínio que nos conduziu ao resultado (A):

(A') Seja $]p', q'[$ um intervalo qualquer que contém somente um número finito de pontos do sistema P', $F(x)$ é linear nesse intervalo.

A demonstração se obtém da mesma forma. Pois, uma vez estabelecido que $F(x)$ é função linear em um intervalo qualquer $]p^k, q^k[$, que contém somente um número finito de pontos do k-ésimo sistema P^k derivado de P, resulta como na passagem de (A) para (A'), que $F(x)$ é também função linear dentro de um intervalo qualquer $]p^{k+1}, q^{k+1}[$ que contém somente um número finito de pontos do (k+1)-ésimo sistema P^{k+1} .

Concluimos assim, por um número finito de deduções sucessivas, que $F(x)$ é linear em todo intervalo que contém somente um número finito de pontos do sistema P^v . Mas o sistema P, sendo de v-ésima espécie, como supomos, um intervalo $]a, b[$ compreendido a vontade na reta, conterá somente um número finito de pontos de P^v . $F(x)$ é então linear em todo intervalo $]a, b[$ escolhido a vontade e segue daí, como é fácil ver que $F(x)$ toma a forma: $F(x) = cx + c'$ para todos os valores de x.

Tomando $F(x) = cx + c'$ e reagrupando os termos de (2), temos que:

$$(3) \quad C_0 \frac{x^2}{2} - cx - c' = C_1 + \frac{C_2}{4} + \dots + \frac{C_n}{n^2} - \dots$$

Reescrevendo este resultado como:

$$(4) \quad C_0 \frac{x^2}{2} - cx - c' = \sum \frac{(a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx)}{n^2},$$

como $\sum \frac{(a_n \operatorname{sen} nx + b_n \cos nx)}{n^2}$ tem um período de 2π , o lado esquerdo da equação (4) tem que ser também periódico e isto somente acontece se $C_0 = 0$ e $c = 0$. O que reduz a nossa equação (4) a:

$$(5) \quad -c' = C_1 + \frac{C_2}{4} + \dots + \frac{C_n}{n^2} + R_n,$$

uma equação para qual, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe um número inteiro m tal que para todos os valores de $n > m$, $|R_n| < \varepsilon$, para todo valor de x . Assim, por causa disso, a convergência é uniforme, podemos empregar o resultado de Weierstrass sobre convergência uniforme e multiplicar cada termo de (1) por $\cos n(x-t)dx$ e integrando de $-\pi$ a π concluir que

$$c_n \operatorname{sen}(nx) + d_n \cos(nx) = 0,$$

em conseqüência, que $c_n = 0$ e $d_n = 0$. Assim estabelecendo que a representação do zero por uma série trigonométrica convergente para todos os valores de x , só é possível se todos os coeficientes da série (1) forem identicamente nulos. E o teorema da unicidade de Cantor fica demonstrado.

Podemos enunciar este mesmo teorema da seguinte forma:

Dada uma função $f(x)$, definida em um intervalo $A = [0, 2\pi]$, se as expansões de Fourier $S, S', S'', \dots$ que tal função admite neste intervalo, para qualquer ponto x nele contido, convergem sempre ao mesmo valor, exceto para um conjunto infinito de pontos $x \in B$, $B \subset A$ e B é de primeiro tipo e de n -espécie, então tais expansões têm os mesmos coeficientes. [NASCIMENTO JÚNIOR, p. 20]

Nesta época Cantor ainda não tinha percebido a existência de infinitos diferentes. Foi a partir daí que ele, na tentativa de caracterizar os conjuntos enumeráveis e contínuos, conjecturou que o segundo poderia ser “maior”.

Depois de seu sucesso em aplicar conjuntos de primeiro tipo para o teorema da unicidade da representação das séries trigonométricas, Cantor ficou intrigado pelas razões que levavam à validade dos resultados. A prova continuava válida para conjuntos infinitos contáveis que anteriormente tinham sido abandonados e que tinham os pontos de exceção distribuídos de uma maneira cuidadosamente específica. Contudo, tais pontos poderiam ocorrer numa quantidade infinita de vezes, e este fato originou uma questão em sua mente, que diz respeito a relação entre conjuntos infinitos, como os números naturais, e conjuntos contínuos como os reais.³³

Apesar de sabermos que entre dois números racionais sempre se pode obter outro racional bastando para isso pegar a média aritmética entre eles, o conjunto dos números racionais não é contínuo, isto é, apresenta buracos e Cantor então, pensou que somente um infinito maior poderia cobrir estas falhas. Devemos lembrar que Dedekind já tinha vislumbrado esta possibilidade no seu livro escrito em 1872, quando escreve que o conjunto dos números reais é **mais rico** em pontos que o conjunto dos números racionais, mas ele não levou a idéia adiante.

Começa então uma briga que Cantor ia ter que enfrentar para mostrar que, ao contrário do que a maioria dos matemáticos pensava, poderiam existir infinitos diferentes.

Para se ter uma idéia das dificuldades que Cantor teria para convencer os matemáticos de sua época que sua teoria estava certa, podemos citar o fato ocorrido com Weierstrass, em um curso de verão, realizado em 1874. Depois de já conhecer o resultado obtido por Cantor, que o conjunto dos números reais era não-enumerável, ele diz as seguintes palavras: “Duas magnitudes infinitamente grandes não são comparáveis, elas podem sempre ser consideradas como iguais”.

[FERREIRÓS, p.360, 1993]

³³ After his success in applying first species sets to the uniqueness theorem for trigonometric series representations, Cantor must have been intrigued by the reasons for the validity of the result. The proof had permitted countably infinite sets for which representation was given up, with the points of exception being distributed in a carefully specified way. Nevertheless, such points could occur infinitely many times, and this fact must have raised an allied question in his mind concerning the relation between infinite sets like the natural numbers, and continuous sets like the reals. [DAUBEN, p.49, 1990]

3 NÚMEROS TRANSFINITOS

Este capítulo tem como objetivo familiarizar o leitor com a teoria dos números transfinitos e para isso começaremos com um breve resumo do conceito de infinito.

A princípio, abordaremos como o infinito era pensado do ponto de vista filosófico, e que, com Cantor, se fundiu à matemática de tal modo que, atualmente, os filósofos estudam matemática e os matemáticos estudam filosofia com o objetivo de desvendar os seus mistérios.

A seguir, enfatizaremos o que são os números transfinitos propriamente ditos e suas propriedades.

3.1 DEFINIÇÃO DE INFINITO

Quando se estudam os fundamentos da matemática, a compreensão do infinito é de vital importância. Apesar de a grande maioria dos matemáticos, entre eles Kronecker, serem finitistas, a partir do final do século XIX, surgiram aqueles que acreditavam no infinito. Não aquele **infinito potencial**, aristotélico, mas um infinito verdadeiro, que existe em sua totalidade, sem necessidade da noção da passagem do tempo. Este infinito, também chamado **infinito efetivo**, simplesmente existe e não há dúvidas de que seu defensor maior foi Georg Cantor.

No *Grundlagen* [(18) da lista 1.9], seção 5, Cantor escreve o seguinte: ... afirmo que, se não fosse ela mesma [a natureza humana] em muitos aspectos infinita, a sólida fé e certeza no ser absoluto, que sabemos estar todos unidos, seria inexplicável.

Como poderíamos acreditar num Deus absoluto, com poderes ilimitados, onisciente e onipresente, se nosso entendimento fosse restrito a fatos finitos?

O infinito matemático começou a ser estudado pelos gregos, no Papiro de Rhind, em 1650 a.C., mas os matemáticos antigos, hindus, chineses, babilônios e egípcios estudavam somente

problemas práticos do dia-a-dia. A transição do prático para o intelectual, onde o conhecimento é o motivo principal só ocorreu por volta do século VI a.C.

Partiremos de **Aristóteles** (384 - 322 a.C.) que interpreta o infinito, como indeterminado, assumindo um caráter negativo, significando o que não pode ser percorrido ou o que se pode percorrer, mas não de todo, isto é, o infinito potencial. Aristóteles não aceitava a idéia de um infinito real positivo, ou seja, completo. Para ele, são infinitos o tempo, o contínuo, aquilo de onde provêm todos os seres, as grandezas matemáticas. Consciente das dificuldades desse conceito, afirma que tanto os que o admitem como os que o rejeitam se vêem envolvidos numa série inextricável de absurdos e de impossibilidades. Os Paradoxos de Zenão³⁴, que datam de meados do século V a.C., são um exemplo disto.

O infinito tem, para Aristóteles, razão de parte e não de todo, pois a matéria, por exemplo, é parte do todo (como o bronze é parte da estátua). Fica, deste modo, no âmbito da causa material e é compreendido como indefinido e indeterminado. Aristóteles não usou o termo infinito para designar a suprema perfeição, a positividade do ato puro. A negatividade e indeterminação do conceito impediam-no de conciliar a perfeição do ato e a plenitude de vida com o conceito grego de apeíron (ἄπειρον); aquele que não tem princípio nem fim é como que a fonte originária indiferenciada de que tudo nasce. É o princípio e elemento primordial, incorruptível e, por isso, divino.

Para Aristóteles, ser infinito era uma “privação, não uma perfeição”.

Aristóteles foi o primeiro a pontuar dois sentidos diferentes para o infinito: o sentido forte ou quantitativo, significando literalmente tamanho, comprimento ou duração infinita e o sentido fraco, compreendendo a divisibilidade infinita de um comprimento finito.

No livro *Physics VI*, temos o seguinte texto: Existem dois sentidos em que comprimento e tempo, e geralmente qualquer coisa contínua, são chamadas “infinitas”: elas são chamadas assim em respeito a sua divisibilidade ou em respeito as suas extremidades [tamanho].³⁵

Para **Descartes** (1596 – 1650), só Deus é verdadeiramente infinito. A revolução filosófica que coloca o homem como pensamento e liberdade, no centro da Filosofia, concebe o infinito como perfeição e potência intensas. O racionalismo, coordenando a ordem lógica e a ordem real, sucumbe à tentação de derivar logicamente o finito do infinito.

O Deus cartesiano é infinito, imutável, independente, onisciente, criador e conservador. É Deus que garante a objetividade do mundo; existe uma luz interior dada por Ele, que dá confiança e certeza, pois é impossível que Deus seja mentiroso e enganador.

Nossa consciência de Deus, do infinito, essa percepção que o homem pode ter da divindade e da perfeição é como “a marca do artista em sua obra”.

Quase 2000 anos depois de Aristóteles, Carl Friederich **Gauss** (1777 –1855) expressou o mesmo ponto de vista dele, numa carta a seu amigo Heinrich Schumacher, datada de 1831:

Eu tenho que protestar de novo, veementemente, pelo seu uso de infinito como alguma coisa completa; isto não é permitido na matemática. O infinito é uma maneira de falar, significando um limite, no qual certas razões podem ficar tão pequenas quanto desejadas, enquanto a outras é permitido crescer indefinidamente.

Nesta carta Gauss faz menção também ao infinitamente pequeno: uma grandeza pode ser subdividida indefinidamente. Essa noção está relacionada ao conceito de continuidade do espaço. Por exemplo, um segmento de reta pode ser subdividido ao meio, cada metade subdividida ao meio e cada parte subdividida novamente ao meio, e assim indefinidamente. Portanto, é bastante

³⁴ Ver apêndice D.

³⁵ For there are two senses in which length and time and generally anything continuous are called “infinite”: they are called so either in respect of divisibility or in respect of their extremities [= size]. [apud, WALLACE, p.63, 2003]

razoável e geometricamente intuitiva essa idéia de subdivisão indefinida, produzindo um processo infinito. Neste caso temos um exemplo de **infinito potencial**.

O padre tcheco, Bernhard **Bolzano** (1781 – 1848), até tentou no seu livro, editado pela primeira vez em 1830, *Paradoxos do Infinito* [BOLZANO, 1950], introduzir uma nova visão do infinito, mas, como aconteceu em várias outras ocasiões com outras teorias matemáticas, parece que o mundo ainda não estava maduro o suficiente para entender este conceito que traz, dentro de si, idéias tão paradoxais como “a parte pode ser igual ao todo”, contrariando as idéias aristotélicas que reinavam até então. Quase 50 anos depois de Bolzano, Cantor ainda teve de brigar muito para ver suas idéias reconhecidas pelos matemáticos de sua época.

Para ilustrar como as idéias de Bolzano eram similares as de Cantor e Dedekind, resumimos abaixo parte de sua obra.

Bolzano afirma que a maioria das declarações paradoxais que aparecem no domínio da matemática são proposições que contêm a idéia do infinito ou que precisam dela para sua prova. Por isso, logo na § 2 ele tenta tornar precisa a idéia que o termo “infinito” denota.

Para ele as palavras *finito* e *infinito* se opõe pela junção do prefixo *in*, indicando negação; além disso, Bolzano acrescenta que a idéia do infinito vem da idéia do finito pela junção de novos elementos, o que para ele é uma razão para rejeitar a aplicação destas idéias para conjuntos, que devem ser vistos como **unidades** e não como um aglomerado de objetos distintos.

Bolzano propõe uma investigação rigorosa das circunstâncias que nos levam a dizer se um conjunto é finito ou infinito e que nos dará informações sobre a natureza do infinito como tal.

Na seção 13, ele dá como exemplo de conjunto infinito o seguinte: fixando nossa atenção sobre qualquer verdade escolhida aleatoriamente e que vamos chamar de proposição A, nós podemos enunciar uma outra verdade, que vamos chamar de proposição B, que diz que a primeira

proposição é verdadeira; assim a proposição B é diferente de A, e de B, tiramos uma proposição C, que diz que a proposição B é verdadeira e assim por diante. Esta seqüência de proposições é então semelhante à seqüência de números, ou seja, possui uma multiplicidade maior que todo número, logo é infinita. Por exemplo:

Proposição A – A neve é branca.

Proposição B – A proposição “A neve é branca” é verdadeira.

Proposição C – A proposição “A proposição “A neve é branca” é verdadeira”, é verdadeira, e assim sucessivamente.

O agregado de todas estas proposições, cada uma relacionada a sua antecessora, tendo a última como seu próprio tema, e a veracidade dela como sua própria afirmação, consiste em um conjunto de elementos que é maior que qualquer conjunto finito particular³⁶. Constatamos então que as proposições A, B, C etc são sempre diferentes e em número infinito.

Neste mesmo livro, na “Introdução histórica” feita por Donald A. Steele, ele mostra que Bolzano antecipou as idéias que Dedekind e Cantor viriam a ter e mostra que é comum conjuntos infinitos estarem em correspondência biunívoca com subconjuntos próprios.

Steele chama de *holomerismo* [p.25], a definição dada por Bolzano, quando um conjunto S de entidades contém um subconjunto próprio s tal que, por meio de uma relação fixa, cada membro de S corresponde a exatamente um de s e, por meio da relação inversa, cada membro de s corresponde a exatamente um de S. Ele deixa claro que, apesar do holomerismo ocorrer somente entre dois conjuntos infinitos, Bolzano não teve a intenção de estabelecer um critério de equinumerosidade.

³⁶ The aggregate of all these propositions, every one of which is related to its predecessor by having the latter for its own subject, and the latter's truth for its own assertion, comprises a set of members which is greater than any particular finite set.[BOLZANO, p. 85, 1850]

Bolzano cita três exemplos de holomerismo:

- i. S compreende todos os naturais e s o quadrado entre eles, dada pela relação $y = x^2$.
- ii. s compreende os números reais $0 < x < 5$ e S os números reais $0 < y < 12$ dada pela relação $12x = 5y$.
- iii. S compreende todos os pontos de um corpo humano, e s todos os pontos de um certo dedo; a correspondência sendo efetuada por uma transformação geométrica conveniente.

Apesar de sua obra matemática ter sido injustamente desconsiderada por seus contemporâneos, Bolzano chegou mais próximo das idéias da matemática atual do que Cauchy e Gauss, que insistiam que não poderia existir um infinito completo na matemática; acreditavam que o infinitamente grande ou pequeno indicava apenas a potencialidade de Aristóteles, uma incompletude do processo em questão.

Ele analisa com profundidade o uso da conjunção “e”, e nos dá três exemplos:

- O Sol, a Terra e a Lua interagem uns com os outros.
- A rosa e a concepção da rosa são entidades inteiramente distintas.
- Os nomes Sócrates e filho de Sophroniscus designam uma e mesma pessoa.

Podemos dizer que o sujeito destas sentenças é um *agregado de objetos bem-definidos, ou uma composição completa de membros bem definidos*. Todo objeto arbitrário A pode ser unido com outros objetos arbitrários B, C, D,...para formar um agregado. A, B, C, D...representam cada um, objetos distintos e podemos afirmar que, em nenhuma das proposições, A é idêntico a B, A é idêntico a C, B é idêntico a C podem ser verdadeiras. Pois se A fosse idêntico a B, seria um absurdo falar em um agregado composto de A e B.

Existem agregados que contêm os mesmos membros, mas que se apresentam de formas diferentes, como por exemplo, um copo inteiro e um copo quebrado. O que muda é seu modo de

combinação (*Art der Verbindung*) ou seu arranjo (*Anordnung*). Neste parágrafo parece estar a origem dos tipos ordenados de Cantor, que ressalta a importância da disposição com que os elementos estão organizados.

Os agregados em que a arrumação (permutação) de seus membros, não produz nenhuma mudança essencial, serão chamados de conjunto (*Menge*), e o agregado cujos membros são considerados como particulares (*Einheiten*) de uma dada espécie A é chamado de “multitude” (*Vielheit*) de A.

O estudo rigoroso de séries, convergentes e divergentes, veio acabar com paradoxos do tipo citado abaixo, onde a comutatividade, ou a associatividade deixam de valer:

A série: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots - \frac{(-1)^n}{n} + \dots = \ln 2$. Se multiplicarmos os 2 lados da equação por $\frac{1}{2}$, obtemos: $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots = \frac{1}{2} \ln 2$. Adicionando os termos das duas séries verticalmente, vemos que algumas parcelas se cancelam, enquanto outras se somam e obtemos o seguinte resultado:

$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots = \frac{3}{2} \ln 2$. Mas esta é a série inicial com os termos rearrumados. Logo, podemos concluir que $1 = \frac{3}{2}$.

Foi este tipo de problema que Bolzano quis resolver quando se considera cada termo da série como objetos particulares, ou quando se considera a série como um todo (séries convergentes).

Ainda no *Grundlagen* [(18) da lista 1.9], §7, Cantor faz comentários sobre a obra de Bolzano:

Bolzano é possivelmente o único para quem os números infinitos próprios são legítimos, ou quando menos o único que os discute com amplitude: contudo não estou absolutamente de acordo com seu

modo de tratá-los, que não lhe permite dar uma definição correta, e, por exemplo, considero inconsistentes e equivocados os parágrafos 29 – 33 de seu livro. Para chegar a uma verdadeira conceituação dos números infinitos determinados faltam ao autor seja o conceito de *potência*, seja uma noção precisa de *enumeração*. É verdade que em algumas passagens podemos encontrar, escondidos sob a forma de casos particulares, os embriões de um ou de outro, mas, a meu ver, o autor não os leva a uma plena clareza e determinação, e assim como se explicam muitas incongruências (e inclusive alguns erros) em sua obra, por outro lado valiosa.

A definição de Dedekind para conjuntos tinha pontos em comum com a definição dada por Bolzano. Ele começa definindo uma coisa (Ding) como “todo objeto (Gegenstand) de nosso pensamento”. E o denomina **a**, e escreve que **a** = **b** se “tudo que podemos pensar de **a** podemos pensar de **b**” e reciprocamente. Se as diferentes coisas **a**, **b**, **c**,... são consideradas juntas sob um mesmo ponto de vista, então diremos que eles formam um conjunto **S** e chamaremos **a**, **b**, **c**,... os elementos de **S**. [DEDEKIND, 1888, apud: DUGAC, p. 82, 1976]

3.2 DEFINIÇÃO DOS NÚMEROS ORDINAIS E CARDINAIS TRANSFINITOS

Para entendermos o que são os números transfinitos, inicialmente devemos fazer a distinção entre ordinais e cardinais transfinitos. A idéia é análoga aos ordinais e cardinais finitos, apesar de, neste caso, vermos, mais adiante, que essas duas definições se confundem.

Segundo a teoria cantoriana, os números ordinais são identificados com conjuntos onde não se leva em consideração a natureza de seus elementos, mas se pressupõe uma ordem predeterminada deles, enquanto que o conceito de número cardinal é obtido de um conjunto qualquer, quando, além da natureza de seus elementos, se abstrai também a sua ordem. É por esse motivo que a Teoria dos Conjuntos e a Teoria dos Números acabam se misturando. Mais tarde, na §3.2.8, essa identificação entre conjuntos e números ficará bastante explícita.

Ao sistema formado por todos os números ordinais e cardinais, Cantor chamou de Ω (ômega, última letra do alfabeto grego) e $\aleph$ (tav, última letra do alfabeto hebreu), respectivamente.

3.2.1 Definições de conjunto³⁷, segundo Cantor

Na obra de Cantor, a definição de conjunto foi se modificando com o passar dos anos. Ele, porém, nunca usou axiomas (Teoria Axiomático dos Conjuntos) para caracterizar a Teoria dos Conjuntos, ao contrário de Zermelo que não definiu o que é um conjunto, mas sim suas propriedades, por meio de axiomas.

- Por conjunto eu entendo, em geral, toda quantidade que pode ser pensada como **um**, isto é, qualquer domínio de elementos definidos que, por meio de uma lei, podem ser limitados em um **todo**. [(18) da lista 1.9]

- Devemos pensar o conjunto como uma coisa em si, independente da natureza de seus elementos e da ordem eventual na qual se apresentam seus elementos. [(24) da lista 1.9, apud CHARRAUD, p.128]

- Por um conjunto (agregado) entendemos qualquer coleção completa M de objetos definidos e separados de nossa intuição ou nosso pensamento. Esses objetos são chamados elementos de M. [(27) da lista 1.9]

Finalmente, em 28 de julho de 1899, numa carta para Dedekind ele escreve o seguinte:

- Se, ..., a totalidade dos elementos de uma multiplicidade pode ser pensada “existindo simultaneamente”, de tal modo que seja possível pensar nela como “um só objeto”, eu a nomeio uma *multiplicidade consistente* ou um “conjunto”³⁸.

Nesta mesma carta, Cantor definiu as *multiplicidades inconsistentes* como aquela em que, ao contrário das multiplicidades consistentes, a existência simultânea de *todos* seus elementos conduz a uma contradição, de tal modo que é impossível conceber esta multiplicidade como uma unidade, como um “objeto acabado”, e por isso não pode ser considerada como um conjunto.

³⁷ Em alemão, Cantor usou o termo MENGE (quantidade) e também INBEGRIFF derivada da palavra BEGRIFF (conceito), o conjunto é visto como um sistema de objetos que obedecem a um conceito ou propriedade.

³⁸ Si, ..., la totalité des éléments d'une multiplicité peut être pensée comme « existant simultanément », de telle sorte qu'il soit possible de la concevoir comme « un seul objet », je la nomme une *multiplicité consistante* ou un « ensemble ». [CAVAILLÈS, p. 238, 1962]

3.2.2 Concepção de conjunto de objetos *bem definidos*, segundo Cantor

Em um de seus artigos *Sobre os conjuntos infinitos e lineares de pontos* [(16) da lista 1.9], Cantor define um sistema bem definido quando seus elementos, seguindo os princípios lógicos do terceiro excluído, podem ser considerados determinados, de tal forma que:

1) Um objeto qualquer pertencente a este sistema, tendo sido escolhido, pode ser olhado como intrinsecamente determinado (*intern bestimmt*) se ele pertencer ou não ao sistema em questão.

2) Dados dois objetos pertencentes ao conjunto, podemos olhar como intrinsecamente determinados se eles são iguais ou não, malgrado as diferenças que podem se apresentar na maneira como eles são apresentados.³⁹

Um exemplo que podemos citar é o que se refere ao conjunto dos números transcendentais. Nós podemos desconhecer se um dado número pertence ou não a este conjunto, mas este fato já está intrinsecamente determinado. Outro exemplo interessante se refere aos números primos, pois dado um número ímpar muito grande qualquer, não é imediato determinar se ele é um número primo ou não.

3.2.3 Axiomas de Zermelo para a Teoria dos Conjuntos

Em 1904, Ernst **Zermelo** (1871-1956) foi o primeiro a usar o *Axioma da Escolha* explicitamente, com o objetivo de demonstrar o Teorema da Boa-Ordenação. Ele apresenta em um artigo na *Mathematische Annalen* 59, uma teoria de conjuntos totalmente abstrata na qual o conceito de conjunto não é definido; ele não diz o que são conjuntos, mas como eles são manipulados matematicamente. Neste mesmo periódico, número 65, num artigo intitulado

³⁹ Je dis qu'un ensemble d'éléments appartenant à une sphère abstraite quelconque, est *bien défini* quand, par suite du principe logique du troisième exclu, on peut le considérer déterminé de telle façon que 1^o un objet quelconque appartenant à cette sphère abstraite étant choisi, l'on puisse regarder comme *intrinsèquement* déterminé s'il appartient ou non au système en question et que 2^o deux objets appartenant à l'ensemble étant donnés l'on puisse regarder comme *intrinsèquement* déterminé s'ils sont égaux ou non, malgré les différences qui peuvent se présenter dans la manière dont ils sont donnés. [CANTOR, *Acta Math.* 2, p. 363, 1882]

*Pesquisas sobre os fundamentos da teoria dos conjuntos*⁴⁰, Zermelo observa como a teoria criada por Cantor e Dedekind se reduz a algumas definições e a sete “princípios” ou “axiomas” aparentemente independentes uns dos outros.[DUGAC, p. 98]

Para isso, ele criou o seguinte sistema axiomático para a teoria dos conjuntos que mais tarde ficou conhecido como ZF (ZERMELO-FRAENKEL⁴¹):

1. **Axioma da Determinação.** Se para os conjuntos S e T , $S \subseteq T$ e $T \subseteq S$, então $S = T$; isto é, conjuntos que contêm os mesmos membros são iguais.
2. **Axioma dos Pares.** Para quaisquer dois elementos a e b , existe o conjunto $\{a, b\}$ que os contém e nada além.
3. **Axioma da Separação.** Sempre que uma função proposicional $\varepsilon(x)$ é definida para todos os elementos de um conjunto M , M possui um subconjunto M_ε contendo como elementos precisamente aqueles elementos x de M para os quais $\varepsilon(x)$ é verdade.
4. **Axioma do Conjunto-Potência.** Todo conjunto T tem um conjunto potência, que é o conjunto que contém exatamente os subconjuntos de T .
5. **Axioma da União.** Todo conjunto T tem um conjunto união, que é o conjunto que contém exatamente para membros os membros de T .

Dos axiomas anteriores define-se o **conjunto-vazio** como aquele que não contém nenhum membro e demonstra-se que só existe exatamente um conjunto deste tipo que denotaremos por $\emptyset$.

6. **Axioma da Infinitude.** Existe no mínimo um conjunto Z com as seguintes propriedades:

⁴⁰ *Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I*, 1908.

(i) $\emptyset \in Z$

(ii) se $x \in Z$, também $\{x\} \in Z$

E finalmente:

7. **Axioma da Escolha.** Se T é um conjunto de conjuntos não-vazios, dois a dois disjuntos, então existe um subconjunto da união de T que tem exatamente um membro em comum com cada membro de T .

Outra versão para este axioma é: Para todo conjunto S existe uma função f que associa a cada subconjunto não-vazio A de S um único membro $f(A)$ de A .

Intuitivamente podemos dizer que um elemento é “escolhido” de cada subconjunto A de S . Se o conjunto S é finito o axioma é trivial. Mas se S for infinito não podemos dizer o mesmo.

Precisamos de uma regra para especificar um elemento em cada subconjunto A de S . O Axioma garante a existência da *função escolha* f mesmo quando esta regra não existe, por isso, mesmo parecendo auto-evidente para Cantor, o Axioma da Escolha foi combatido fervorosamente por matemáticos importantes como Emile **Borel** (1871–1856), Henri **Lebesgue** (1875 – 1941), Bertrand **Russell** (1872 – 1970) e Edwin **Wilson** (1879 – 1964)⁴² por causa de seu caráter não construtivo.

Todo raciocínio em que se supõe que uma escolha arbitrária pode ser feita um número infinito não-enumerável de vezes... [está] fora do domínio da matemática.[BOREL, 1905, apud MOORE, p.85]

⁴¹ Abraham Fraenkel, matemático alemão, aperfeiçoou o sistema axiomático feito por Zermelo com o objetivo de evitar os paradoxos na Teoria dos Conjuntos. Além disso foi o primeiro a publicar uma biografia de Cantor. [FRAENKEL, 1930]

⁴² **Borel**, matemático francês, que mesmo sendo contra o Axioma da Escolha o utilizou para demonstrar que *Todo conjunto infinito A possui um subconjunto infinito enumerável*. [BOREL, 1898]

Lebesgue, matemático francês, formulou a teoria da medida em 1901 e generalizou o conceito de *integral de Riemann* para funções descontínuas, que ficou conhecida como *integral de Lebesgue*.

Russell, matemático e lógico galês, criador da teoria dos tipos. Para mais detalhes ver § 4.2.

Wilson, matemático e lógico americano, era professor no Instituto de Tecnologia de Massachussetts, em 1908. [MOORE, p. 175]

Moore escreve que é uma ironia histórica que a maioria dos matemáticos que se opuseram ao Axioma da Escolha o tivessem utilizado implicitamente em suas pesquisas. Ainda, segundo ele, isto ocorreu principalmente entre os matemáticos que estavam perseguindo a teoria cantoriana. [MOORE, p. 64]

Quando acrescentamos este último axioma ao sistema ZF, este passa a se chamar ZFC, isto é, Zermelo-Fraenkel, mais o Axioma da Escolha (Axiom of Choice).

Nas duas demonstrações que Cantor fez para mostrar que o conjunto dos números reais não era enumerável, ele, sem perceber, utilizou o fato de poder fazer infinitas escolhas. Para ele parecia óbvia esta possibilidade e por isso simplesmente o aplicava sem se preocupar com a sua prova.

Além de Cantor, vários matemáticos usavam o Axioma da Escolha inconscientemente em vários ramos da matemática como, por exemplo, na teoria dos números algébricos, na análise real, na topologia do conjunto de pontos e na teoria de conjuntos.

Presume-se que a primeira alusão a este princípio esteja contida em um artigo de Giuseppe Peano, de 1890, sobre uma prova de existência para um sistema de equações diferenciais ordinárias, onde ele escreve:

Entretanto, desde que não se possa aplicar infinitas vezes uma lei arbitrária a qual fazemos corresponder (“on fait correspondre”) a uma classe um indivíduo dessa classe, temos formado aqui uma lei definida a qual, sob suposições apropriadas, atribuímos a cada classe de um determinado sistema um indivíduo dessa classe.

Mais comme on ne peut pas appliquer une infinité de fois une loi arbitraire avec laquelle à une classe α on fait correspondre un individu de cette classe, on a formé ici une loi déterminée avec laquelle à chaque classe α , sous des hypothèses convenables, on fait correspondre un individu de cette classe:

Ilustração 2: Trecho do texto citado, intitulado Demonstração da integrabilidade das equações diferenciais ordinárias. [PEANO, p.210, 1890]

Em 1902, o matemático italiano Beppo **Levi** (1875 – 1961), no artigo cujo título é A respeito da teoria dos agregados (*Intorno alla teoria degli aggregati*), lidando com a afirmação que a união de um conjunto t de conjuntos não-vazios tem um cardinal maior ou igual ao cardinal de t , observou que sua prova dependia da possibilidade de selecionar um único elemento em cada elemento de t , que nada mais é que o Axioma da Escolha.

Para mais detalhes sobre o Axioma da Escolha, ir ao apêndice A.

3.2.4 Definição de *potência* de um conjunto

O geômetra suíço, Jakob **Steiner** (1796-1863), foi quem inspirou Cantor quando este, alguns anos mais tarde definiu o conceito de “potência”. Esta expressão foi usada por Steiner para dizer que duas figuras geométricas são tiradas uma da outra por coordenação projetiva, de modo que a cada elemento de uma figura, corresponda um e somente um elemento da outra.

Eu tomei emprestada a palavra *potência* de J. Steiner que a empregou em um sentido todo especial, entretanto próximo para exprimir que duas figuras estão coordenadas uma a outra projetivamente de tal modo que, para todo elemento de uma figura, corresponda um e somente um elemento da outra.⁴³

Cantor definiu dois conjuntos como sendo **equipotentes** quando existe uma função biunívoca entre eles. Quando isto ocorre dizemos que os dois conjuntos possuem a mesma potência.

Para conjuntos finitos, a noção de potência (*Mächtigkeit*) corresponde a de número ordinal (*Anzahl*) que é equivalente ao conceito de número cardinal (*Zahal*).

Dois conjuntos finitos têm a mesma potência se e somente se o número de seus elementos é o mesmo. Um subconjunto próprio de um conjunto finito sempre tem um número ordinal menor

⁴³ J’ai emprunté le mot *puissance* à J. Steiner qui l’emploie dans un sens tout spécial, cependant voisin pour exprimer que deux figures sont coordonnées l’une à l’autre projectivement de telle sorte qu’à tout element de l’une correspond un et un seul élément de l’autre .[CANTOR, 1879, apud CAVAILLÉS, 1938]

que o número ordinal do conjunto original. Este não é o caso quando tratamos de conjuntos infinitos. Veremos mais adiante que, apesar do conjunto dos números naturais excluindo o zero estar contido no conjunto dos números naturais com o zero, os números ordinais que os representam são os mesmos, além de possuírem a mesma potência.

3.2.5 Conceito de números *finitos e infinitos*

Existem várias definições com significados diferentes, sobre o que são os **números finitos**. A mais usual é: o número que está relacionado ao conjunto vazio ou que é equipotente ao conjunto $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ para algum inteiro positivo n .

Cantor definia **conjuntos finitos** da seguinte maneira (1887):

- É um conjunto M que surge de um elemento original, através da adição sucessiva de novos elementos, de tal modo que o elemento original pode ser obtido de M , removendo-se sucessivamente os elementos na ordem contrária.

Outras definições para conjuntos finitos:

- Um conjunto é finito quando não possui nenhum subconjunto próprio equivalente a ele mesmo.
- Um conjunto I é chamado finito, e mais estritamente **indutivo**, se existe um inteiro n tal que I contenha exatamente n membros.

No *Beiträge*, Cantor define que dois agregados têm o mesmo **número cardinal**, quando e somente quando, são equipotentes um com o outro. Ele não vê paradoxo nenhum no fato de um conjunto e um subconjunto próprio deste conjunto possuírem o mesmo número cardinal, como por exemplo, o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números pares. É exatamente esta característica que Richard Dedekind vai usar para definir conjuntos infinitos.

Um conjunto A é infinito-dedekindiano se algum subconjunto próprio B de A é equipotente a A ; caso contrário, A é finito-dedekindiano. [MOORE, 1982, p.22].

No livro *Do mundo fechado ao universo infinito*, Alexandre Koyré [1986] escreve que: Vemos, pois, com toda clareza, que a diferença entre o infinito e o finito não é uma diferença entre “mais” e “menos”, não é uma diferença quantitativa, e sim qualitativa, e ainda que estudada por matemáticos é, fundamentalmente, uma diferença metafísica.

Poderíamos acrescentar a essa idéia, a distinção entre o infinito potencial e o infinito efetivo, o primeiro se aproximando mais qualitativamente do finito do que do infinito.

Para conjuntos finitos, os conceitos de número ordinal e número cardinal se equivalem e temos, por exemplo, que o conjunto $\{1, 2, 3\}$, o conjunto $\{2, 3, 1\}$ e o conjunto $\{a, b, c\}$ têm o número ordinal e o número cardinal exatamente igual a 3. Podemos observar que, para um conjunto finito com n elementos, independente da ordem de seus elementos, o esquema é sempre o mesmo: primeiro, segundo, terceiro, ..., enésimo membro, concluindo sempre com o mesmo n .

3.2.6 Diferença entre os números ordinais e cardinais transfinitos

Cantor percebeu que dois conjuntos infinitos, que possuíam a mesma quantidade de elementos **não** tinham um número ordinal único que os representasse. Além disso, ele percebeu que dois conjuntos com um número infinito de elementos, como, por exemplo, os naturais e os reais, poderiam ter um número cardinal diferente para os representar, isto é, ele percebeu que existiam infinitos diferentes. Mais que isso, ele criou toda uma aritmética transfinita para operar (somar, subtrair, multiplicar,...) com estes números.

Ao número ordinal que representa o conjunto dos números naturais **por completo**, ele chamou de ω , que é maior do que qualquer número finito. O sucessor de ω , similar a aritmética finita é o número $\omega + 1$, que segue como uma coisa natural, quando mais um elemento é acrescentado ao conjunto já definido. Nem todo número transfinito tem um antecessor, neste caso

ele é chamado de **número limite**. Podemos citar como exemplo de número limite o próprio ω , ou qualquer múltiplo dele.

Mas o que aconteceria se, ao invés do elemento ser acrescentado ao final do conjunto, ele fosse acrescentado no início?

Observe que para conjuntos infinitos o conjunto $\{1, 2, 3, 4, \dots, 0\} = \omega + 1$ é diferente do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} = 1 + \omega = \omega$, ou seja, a ordem é fundamental.

No exemplo citado na § 3.2.4, temos que $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} - \{0\} = \{1, 2, 3, \dots\} \subset \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$, e o número ordinal relativo aos dois conjuntos é ω , apesar de o primeiro conjunto ter um elemento a menos que o segundo.

3.2.7 Princípios de geração para a construção dos números ordinais transfinitos

Com o objetivo de formar números ordinais, Cantor inventou três regras, que ele chamou de “princípios de geração” e que aparecem pela primeira vez no artigo Fundamentos de uma Teoria Geral de Conjuntos [(18) da lista 1.9]:

- **Primeiro princípio de geração** – princípio de adição de uma unidade a um número já formado.
- **Segundo princípio de geração** – um novo número que olhamos como o limite dos primeiros, ou seja, é definido como imediatamente superior a todos estes números.

Por exemplo: $1, 2, 3, 4, \dots, \omega, \omega + 1, \omega + 2, \omega + 3, \dots, \mathbf{2\omega}, 2\omega + 1, 2\omega + 2, 2\omega + 3, \dots, \mathbf{3\omega}, 3\omega + 1, 3\omega + 2, \dots$ e assim por diante.

Os números $\omega, 2\omega$ e 3ω que estão em negrito, são exemplos de números obtidos por este princípio.

É interessante observar a analogia que Cantor fez dos números irracionais, considerados como limite de seqüência de racionais, e dos números gerados por este princípio.

Os números transfinitos são, em um certo sentido, como novos irracionais e de fato o melhor método, a meu ver para definir os números irracionais finitos é... eu posso mesmo dizer em princípio, o mesmo que meu método para introdução dos números transfinitos. Podemos dizer absolutamente: os números transfinitos ficam ou caem com os irracionais finitos.⁴⁴

Um número α da segunda classe numérica (a primeira classe é a do conjunto dos números naturais) pode ser representado somente de uma maneira, na forma:

$$\alpha = k_0\varpi^{\alpha_0} + k_1\varpi^{\alpha_1} + \dots + k_r\varpi^{\alpha_r} \quad \text{onde } \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_r, \text{ são números da primeira ou segunda classe tal que } \alpha_0 > \alpha_1 > \dots \geq \alpha_r \geq 0 \text{ enquanto } k_0, k_1, \dots, k_r \text{ são números da primeira classe diferentes de zero.}$$

- **Terceiro princípio de geração** – Princípio da limitação (*Hemmungsprinzip*), produz uma quebra na sucessão dos transfinitos, mudando sua potência. Este princípio encerra a classe anterior e gera uma nova classe de ordinais que tem a potência da classe anterior.

Cantor observou que apenas o primeiro e segundo princípio de geração não seriam suficientes para sair do enumerável; somente com o terceiro princípio, uma nova potência poderia aparecer.

Por exemplo: 1, 2, 3, 4, // Primeira classe: é formada pelos números finitos. A sua potência é $\aleph_0$.

A segunda classe, é formada pelos números ordinais que possuem a potência $\aleph_0$ da primeira classe. Ao símbolo ω , foi acrescentado o índice zero, com o objetivo de distinguir os vários ômegas que aparecerão no início de cada nova classe. É um teorema do *Beiträge* [CANTOR, 1897, §16] que a potência da segunda classe, descrita abaixo, é $\aleph_1$.

$\omega_0, \omega_0 + 1, \omega_0 + 2, \dots, 2\omega_0, 2\omega_0 + 1, 2\omega_0 + 2, \dots, 3\omega_0, 3\omega_0 + 1, 3\omega_0 + 2, \dots$

⁴⁴ Les nombres transfinis sont dans un certain sens même de *nouvelles irrationalités* et en fait la meilleure méthode à mes yeux pour définir les nombres irrationnels finis est... je pourrais même dire dans le principe la même que ma méthode pour l'introduction des nombres transfinis. On peut dire absolument: les nombres transfinis restent ou tombent avec les irrationnels finis..[CANTOR, 1887, apud CAVAILLÈS, 1962, p.87]

Generalizando o teorema de Cantor citado acima, podemos dizer que: os números ordinais da n -ésima classe, que começa com ω_{n-2} , têm a potência $\aleph_{n-2}$ e a potência dessa classe é $\aleph_{n-1}$, e assim por diante.

Por exemplo, os números ordinais da terceira classe, que começa com ω_1 têm a potência $\aleph_1$ da segunda classe. A potência da terceira classe é $\aleph_2$, e assim por diante.

3.2.8 Observações sobre números cardinais transfinitos e potência

Como vimos, historicamente os números ordinais transfinitos apareceram primeiro como expoentes de conjuntos derivados; depois no *Grundlagen* [CANTOR, 1883] e no *Principien* [CANTOR, 1884] aparece a definição de potência de um conjunto.

Somente muito mais tarde, em 1895, em seu artigo *Beiträge* [CANTOR, 1895], Cantor formaliza totalmente os números cardinais ou potência de M , definindo como o *conceito geral o qual, por meio de nossa ativa faculdade de pensamento surge do agregado M quando nós abstraímos a natureza de seus elementos e a ordem em que eles são dados*; só então ele discute este assunto completamente. Esse trabalho e sua segunda parte, somente publicada em 1897, pode ser considerado como sua última grande obra. A partir daí sua saúde foi ficando cada vez mais frágil e, apesar de Cantor continuar a se corresponder com outros matemáticos, ele não escreveu mais nenhum artigo relevante para sua teoria dos transfinitos.

Algumas observações são importantes na definição de número cardinal dada por Cantor. A primeira diz respeito ao que ele denomina **agregado**, significando um conjunto **por completo**, todos os seus membros pensados como um todo. Foi exatamente neste ponto que houve uma diferença qualitativa, como já mencionado, no conceito do infinito, pois o infinito até então, não podia ser pensado como um todo (infinito efetivo), mas apenas como algo em potencial, que vai se formando aos poucos e por isso, num dado instante, ele traz a idéia de finitude. Os conceitos

de infinito potencial e tempo estão atrelados, ao contrário do infinito efetivo que independe do instante em que ele é pensado. O conceito de infinito potencial vem desde a época de Aristóteles e perdurou por dois mil anos até que a idéia cantoriana fosse admitida.

A segunda observação é sobre a natureza dos elementos do conjunto que na sua teoria inicial, só dizia respeito a pontos da reta. Em 1887, no artigo, Comunicação sobre a teoria dos transfinitos [(24) da lista 1.9], Cantor rompe com os conjuntos de pontos e cria um novo domínio abstrato em que os elementos são libertados de sua realidade física.

Finalmente, é bom chamar atenção para o fato de Cantor usar um processo psicológico na sua definição: “*nossa ativa faculdade de pensamento*”. Este fato foi duramente criticado por Gottlob **Frege**⁴⁵ (1848 – 1925) em seu livro Fundamentos da Aritmética (*Grundlagen der Arithmetik*, 1884). Ele escreve: *A abstração não pode ser um meio para justificar uma matemática rigorosa, é um conceito por demais psicológico.*

Fugindo da definição dada por Cantor, podemos dizer que a questão da cardinalidade é um invariante em relação à mudança de ordem de seus elementos.

Russell [1974] escreve que é um curioso acidente histórico o fato dos cardinais terem aparecido inicialmente como uma abstração dos ordinais, vindo a serem estudados por si só, independente dos ordinais, apenas gradativamente.

Frege usa uma base puramente lógica para definir os números cardinais. A definição dada por ele era totalmente independente dos ordinais. Para isso, Frege divide os conjuntos em classes; conjuntos que pertencem à mesma classe são equivalentes e conjuntos de classes diferentes não podem ser equivalentes.

O cardinal de um conjunto S é a classe (conjunto) de todos os conjuntos que são equivalentes a S . A definição de conjuntos equivalentes (equipotentes) era a usada por Cantor.

Assim, o número $3 = \{\{a,b,c\}, \{1, 2, 3\}, \{\text{maçã, uva, limão}\}, \{\text{Ana, Júlia, Pedro}\}, \{\text{amarelo, azul, verde}\}, \dots\}$. Do mesmo modo a classe formada pelos números naturais, inteiros, racionais, algébricos, pares, ímpares, primos, tem a cardinalidade $\aleph_0$ do infinito enumerável.

Não podemos confundir a definição de conjunto-potência (conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto) com a potência de um conjunto. Para conjuntos finitos, vale a equivalência que dois conjuntos, que possuem conjuntos-potência equivalentes, também são equivalentes. Por exemplo, um conjunto finito com cardinalidade três possuirá sempre oito subconjuntos, ou seja, seu conjunto-potência terá sempre cardinalidade $2^3 = 8$.

Com os cardinais transfinitos, isto pode não acontecer. Por exemplo, a conjectura de Luzin afirma que $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_1}$, ou seja, temos a mesma potência para os conjuntos-potências de conjuntos que têm potências distintas.

Fraenkel faz uma comparação interessante entre jogadores de xadrez e matemáticos. Para os primeiros, não importa o que ‘significa’ um bispo ou um peão, mas sim como operar com eles. Com os matemáticos, acontece a mesma coisa, não importando muito a definição dos números cardinais, mas como operar com eles.[FRAENKEL, p. 59, 1961]

Voltando a teoria cantoriana, a este duplo ato de abstração (natureza e ordem), Cantor denota o cardinal ou potência de M com uma barra dupla sobre a letra M . Assim, temos que M denota o agregado, $\overline{M}$ o seu tipo ordinal e $\overline{\overline{M}}$ o seu número cardinal.

Apesar de alguns matemáticos, entre eles, Cantor, usarem os conceitos de número cardinal e potência como se fossem sinônimos, estes dois conceitos não são exatamente iguais.

A cardinalidade é um conceito mais amplo e em uma Teoria dos Conjuntos onde o Axioma da Escolha não é válido, dados dois conjuntos infinitos não-enumeráveis, nem sempre é

⁴⁵ Matemático e lógico alemão, um dos fundadores da lógica simbólica moderna. Para mais detalhes ver § 4.2.

possível construir uma correspondência entre eles e desta forma a lei da tricotomia⁴⁶ não é satisfeita e podemos ter dois cardinais transfinitos $\mathbf{m}$ e $\mathbf{n}$, não comparáveis. Em outras palavras, podemos dizer que existem cardinais transfinitos que não são alefs, como König havia sugerido para o conjunto dos números reais, como veremos na seção 3.5.

Cantor definiu uma ordem entre os cardinais do seguinte modo:

Se o conjunto S é equivalente a um subconjunto do conjunto T e T não é equivalente a nenhum subconjunto de S , então o cardinal $s = \overline{S}$ do conjunto S é dito menor que o cardinal $t = \overline{T}$ do conjunto T . Em símbolos, $s < t$, ou $\overline{S} < \overline{T}$. [FRAENKEL, p.66, 1961]

Neste trabalho, vamos considerar, como Cantor, que o Axioma da Escolha é válido e deste modo usaremos os conceitos de potência e número cardinal indistintamente.

3.2.9 Operações e propriedades dos números cardinais transfinitos

Para todos cardinais transfinitos k_i e k_j ($k_i < k_j$) e n um número finito, e levando em consideração que Cantor definiu a operação de adição como a união disjunta dos conjuntos relativos aos cardinais dados. Temos:

- i. $k_i + n = k_i$, somar um número finito a um transfinito não o altera.
- ii. $k_i + k_i = k_i$, somar dois cardinais transfinitos iguais, dá como resultado ele próprio.
- iii. $k_i + k_j = k_j$, a soma de dois cardinais diferentes resulta no maior.
- iv. $n \cdot k_i = k_i$

O produto de dois cardinais transfinitos representados pelos conjuntos M e N é igual ao número cardinal do produto cartesiano $M \times N$.

Se $M = \emptyset$ então $M \times N = N \times M = \emptyset$

⁴⁶ Dados dois elementos quaisquer a e b pertencentes a um conjunto M , uma das três possibilidades é sempre verdadeira: $a > b$, $a = b$ ou $a < b$.

- v. $k_i \cdot k_i = k_i$, o produto de dois cardinais transfinitos iguais, dá como resultado ele próprio.

Neste caso, temos em particular, o Teorema de Cantor, que diz que o plano e a reta são equivalentes.

Além disso, temos que a união enumerável de conjuntos enumeráveis ainda é enumerável, ou seja, $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$.

- vi. $k_i \cdot k_j = k_j$, o produto de dois cardinais diferentes resulta no maior.

Adição e multiplicação de cardinais são operações em que valem as propriedades comutativa e associativa. Também vale a propriedade distributiva.

vii. Potenciação

Seja $\mathcal{M}(m)$ o conjunto tendo número cardinal m . Nós formamos novos conjuntos $\mathcal{M}((k, m))$ a partir dele, substituindo, por um elemento fixo arbitrário $k \in \mathcal{K}$ todo elemento m de $\mathcal{M}$ pelo par de elementos (k, m) . Os conjuntos $\mathcal{M}_k = \mathcal{M}((k, m))$ assim obtidos são mutuamente excludentes para os diferentes k 's, e seu produto combinatório representa a potência m^t , em que t é a cardinalidade do conjunto $\mathcal{K}$.

O produto combinatório é formado de tal modo que, em $\mathcal{K}$, todo elemento k é substituído por um elemento arbitrário de $\mathcal{M}_k$, isto é, por um par arbitrário de elementos (k, m) . Aqui os m 's não precisam ser diferentes para diferentes k 's, porque, para diferentes k 's, a diferença de pares de elementos já é cuidada pelo pré-fixado k . Os conjuntos $\mathcal{A}((k, m))$ que se originam deste modo constituem os elementos do produto combinatório dos $\mathcal{M}_k$'s.

Todo $\mathcal{A}((k, m))$ pode também ser descrito assim:

Para todo elemento k de $\mathcal{K}$ nós associamos um elemento arbitrário m de $\mathcal{M}$. Temos aqui um processo que é análogo à construção de uma função $y = f(x)$, pois a função é também definida por uma correspondência de certos valores y com valores de x . A esta associação de elementos m com os elementos de $\mathcal{K}$ Cantor chamou de uma “cobertura” (*covering-Belegungsmenge*) do conjunto $\mathcal{K}$ com o conjunto $\mathcal{M}$. O conjunto de todas tais coberturas do conjunto $\mathcal{K}$ com o conjunto $\mathcal{M}$ é chamado o conjunto cobertura $\mathcal{K}|\mathcal{M}$. A potência de tal cobertura representa o número cardinal m^t . [KAMKE].

Vejamos alguns exemplos⁴⁷:

1. $\mathcal{K} = \{1, 2\}$ e $\mathcal{M} = \{1, 2, 3\}$ onde $t = 2$ e $m = 3$. O conjunto cobertura, será: $\{(1, 1), (2, 1)\}; \{(1, 1), (2, 2)\}; \{(1, 1), (2, 3)\}; \{(1, 2), (2, 1)\}; \{(1, 2), (2, 2)\}; \{(1, 2), (2, 3)\}; \{(1, 3), (2, 1)\}; \{(1, 3), (2, 2)\}; \{(1, 3), (2, 3)\}$. Que tem exatamente a potência 3^2 .

2. Conjunto-potência (conjunto de todos os subconjuntos de um conjunto) de um conjunto T de potência t [FRAENKEL, p.112, 1961]

Podemos pensar um subconjunto $T_0 \subseteq T$ como uma cobertura de T em um conjunto de dois elementos, digamos $\{1, 0\}$ ou $\{\text{sim}, \text{não}\}$ que relaciona se aquele $t \in T$ pertence (sim ou 1) ou não pertence (não ou zero) a T_0 . Reciprocamente, qualquer cobertura define um certo subconjunto de T . Assim, o conjunto-potência pode ser visto como o conjunto-cobertura $(T | \{1, 0\})$ que tem cardinalidade 2^t .

⁴⁷ Algumas alterações foram feitas nestes exemplos em relação ao original com o objetivo de manter o padrão usado por Kamke na sua definição. Fraenkel troca a ordem dos conjuntos e além disso chama o conjunto cobertura de conjunto inserção (insertion-set). A notação usada por Kamke está mais de acordo com a proposta original de Cantor usada na segunda parte do *Beiträge* [p.95, 1955]

3. Conjunto-potência de um conjunto enumerável - Potência do conjunto dos números reais. [FRAENKEL, p.115, 1961]

Considere o conjunto com 10 elementos, digamos $M = \{0, 1, 2, \dots, 9\}$ e a seqüência (a_k) , com $a_k \in M$ e $k \in \mathbb{N}$, formando as frações decimais $0, a_1 a_2 a_3 \dots a_k \dots$

O conjunto de todas as coberturas $(\mathbb{N} | M)$ nos dá todos os números reais $0 \leq x \leq 1$ e sua potência é, por definição $10^{\aleph_0}$. O fato de alguns números aparecerem repetidos, como por exemplo, $0,49999\dots$ e $0,50000\dots$ não interfere na potência do não-enumerável, pois este fato só ocorre para um conjunto enumerável e da aritmética transfinita sabemos que $\aleph + \aleph_0 = \aleph$. Além disso, o resultado restrito ao intervalo $[0, 1]$ também não é problema, pois já vimos que qualquer segmento de reta tem a mesma potência que a reta inteira.

A ocorrência do 10 nesta fórmula deriva de um fato biológico e não matemático: o uso da notação decimal de acordo com a quantidade de nossos dedos das mãos. Poderíamos ter usado qualquer base, como por exemplo, o sistema binário, assim:

$$2^{\aleph_0} = \aleph = n^{\aleph_0} . (n > 1)$$

Observações finais:

Se tentarmos definir subtração e divisão de números cardinais transfinitos procedendo como se fossem finitos, isto é, definindo a diferença $n - m$, ou o quociente $\frac{n}{m}$ como solução, se esta existir, da equação $m + x = n$, ou $mx = n$ ($m \neq 0$), não teremos sucesso, pois, no domínio dos cardinais transfinitos, estas equações podem ter uma quantidade infinita de soluções. Vejamos os seguintes exemplos:

$$a + x = a; x \text{ pode ser } 1; 2; 3; \dots \text{ pois } a + 1 = a + 2 = a + 3 = \dots = a$$

$$a \cdot x = a, x \text{ pode ser } 1; 2; 3; \dots \text{ pois } a \cdot 1 = a \cdot 2 = a \cdot 3 = \dots = a$$

Para cardinais finitos, o conjunto-potência **não é** o próximo cardinal, em contraste com a Hipótese do Contínuo, onde temos, por exemplo, que se ela é verdadeira $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ e $2^{\aleph_1} = \aleph_2$ e entre $\aleph_1$ e $\aleph_2$ não existe nenhum outro cardinal. Para cardinais finitos, por exemplo, 2^2 e 2^3 , entre o 4 e o 8, existem os cardinais 5, 6 e 7.

A princípio poderíamos pensar, então, que isto seria um indicativo que a Hipótese do Contínuo poderia ser falsa, se já não tivesse sido provada a sua indecidibilidade.

3.2.10 Diferença entre os *tipos* ordinais e os *números* ordinais transfinitos

Vamos primeiro definir o que é uma ordenação em um dado conjunto M:

Definição 1: Um conjunto M é dito ser **simplesmente ordenado**, se todos seus elementos forem ordenados por alguma regra tal que, dados quaisquer dois elementos, um pode sempre ser dito preceder o outro. Para quaisquer a, b e c distintos pertencentes ao conjunto simplesmente ordenado M, temos as seguintes propriedades:

- (i) $a < b$ ou $b < a$.
- (ii) Se $a < b$ e $b < c \Rightarrow a < c$.

Os conjuntos podem ser ordenados de diversos modos, desde que sejam satisfeitas as condições acima. Não é obrigatório que seja respeitada a ordem de grandeza, que é, a ordem mais usada e por isso a mais conhecida das pessoas em geral. Por exemplo, uma maneira de ordenar os números inteiros é dada por: $\{-1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\}$.

Definição 2: Um conjunto M é **bem-ordenado** se é simplesmente ordenado e além disso possui a seguinte propriedade:

- (iii) Qualquer subconjunto não-vazio de M tem um menor elemento.

O conjunto dos números inteiros e o conjunto dos racionais, considerando-se a ordem de grandeza não são bem-ordenados, no entanto, o conjunto dos números inteiros, com a ordem dada no exemplo acima se torna bem-ordenado.

Para os números racionais, Cantor [(8) da lista 1.9, §4] fez a seguinte boa-ordenação.

Sejam os números racionais $\frac{p}{q}$, na forma irredutível (p e q inteiros positivos com o máximo divisor comum igual a 1) e consideremos a soma do numerador com o denominador $p + q = N$.

Para cada valor $\frac{p}{q}$ tem-se um valor determinado N e reciprocamente, para cada valor N tem-se

sempre um número finito de quantidades $\frac{p}{q}$. Se imaginamos agora os números $\frac{p}{q}$ arrumados na

ordem onde os valores menores de N precedem aqueles onde N tem um valor maior, seguindo a ordem de grandeza se estes valores forem iguais, os menores na frente dos maiores. Vemos que

cada um dos números $\frac{p}{q}$ ocupa um lugar perfeitamente determinado em uma seqüência simplesmente infinita.

Todo número racional está incluído na formação da figura; a cada número racional podemos associar um número inteiro conforme se percorre a trajetória assinalada com as setas. Deste modo, o conjunto dos números racionais é enumerável. Podemos considerar o número 0 na posição 1, iniciando a seqüência.

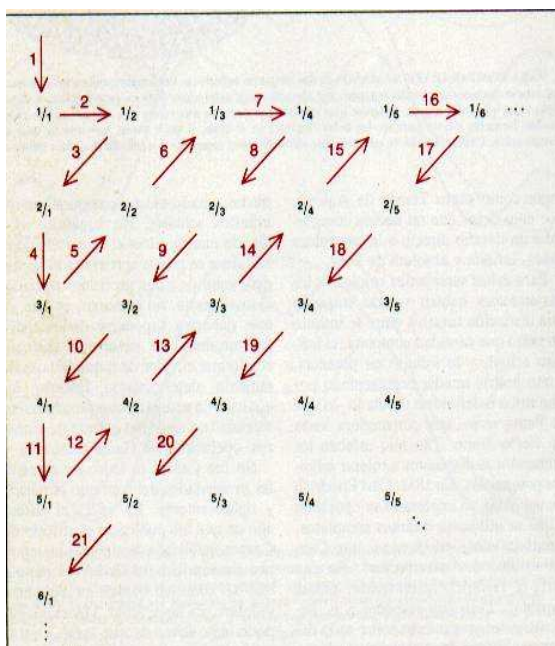


Ilustração 3: Boa-Ordenação dos racionais dada por Cantor.

Temos então, $\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, 3, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4, 5, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{2}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{2}, 6, \frac{1}{7}, \dots\right\}$ formando um conjunto

bem-ordenado. Os racionais negativos podem ser inseridos logo depois do seu correspondente positivo.

Zermelo percebeu que alguns matemáticos juntavam a noção de boa-ordenação com um arranjo espaço-temporal. Assim, ele deu uma nova definição, puramente formal, que não tinha nada a ver com um arranjo. O termo remanescente de **a**, usado por ele, tem o sentido de resto, o que sobra da seqüência do elemento **a** em diante.

Definição 2*: Um conjunto **M** é **bem-ordenado** se existe uma família $\mathcal{M}$ de subconjuntos de **M** tal que para cada **a** em **M** existe um único membro $\mathcal{R}(\mathbf{a})$ de $\mathcal{M}$, chamado o remanescente de **a**, e todo subconjunto não-vazio **P** de **M** contém um único elemento **p**, tal que **P** é um subconjunto de $\mathcal{R}(\mathbf{p})$.

Vejamos um exemplo considerando M o conjunto dos números inteiros com a ordem dada acima: $M = \{-1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\}$ e $\mathcal{M} = \{M, \{1, -2, 2, -3, 3, \dots\}, \{-2, 2, -3, 3, -4, 4, \dots\}, \{-3, 3, -4, 4, \dots\}, \{3, -4, 4, -5, 5, \dots\}, \dots\}$. Para o subconjunto P de M vamos escolher o conjunto $P = \{3, 4, 5\}$ e podemos observar que para $a = 3$ temos que P está contido em $\mathcal{R}(3)$ e é o único elemento em que isso acontece. Notamos que o elemento a é sempre o **menor** elemento do conjunto P com a ordem definida no conjunto M .

No *Grundlagen* [(18) da lista 1.9], ainda trabalhando com conjuntos de pontos que se correspondem biunivocamente com a reta real, Cantor define um conjunto **bem-ordenado** como qualquer conjunto **bem definido** no qual os elementos são arrumados em uma sucessão definida, tal que exista o primeiro elemento do conjunto, e para todos os outros elementos exista um sucessor, a menos que ele seja o último elemento da sucessão.

O agregado M não precisa necessariamente ser bem-ordenado, por isso, Cantor chama de **tipo ordenado** o caso mais geral, onde os elementos podem estar dispostos numa ordem parcial.

Por exemplo, o conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$ no intervalo $]0, 1[$ ordenados pela magnitude não são bem ordenados, e Cantor chamou de η seu tipo ordinal, isto é, $\overline{\mathbb{Q}} = \eta$ e $\overline{\overline{\mathbb{Q}}} = \aleph_0$. Segue daí que o conjunto dos números racionais contidos nos intervalos $]0, 1]$, $[0, 1[$ e $[0, 1]$ têm tipos ordinais $\eta + 1$, $1 + \eta$ e $1 + \eta + 1$ respectivamente e um único número cardinal, a saber $\aleph_0$.

Cantor demonstrou, no *Beiträge* [1895], que se temos um agregado M , tal que:

- $\overline{\overline{M}} = \aleph_0$;
- M não possui nenhum elemento que seja o menor e nem o maior;
- M é denso em toda parte;

Então o tipo ordenado de M é η , isto é $\overline{M} = \eta$.

Voltando ao conjunto dos números racionais, se considerarmos uma ordem em que os denominadores vão crescendo, teremos o conjunto bem-ordenado

$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \dots\right\}$ cujo tipo ordinal é igual ao número ordinal ω . Se arrumarmos o

conjunto em que os numeradores vão crescendo temos o conjunto também bem-ordenado

$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, \dots, \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \frac{2}{9}, \dots, \frac{2}{n}, \dots, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{7}, \frac{3}{8}, \dots, \frac{3}{n}, \dots\right\}$, cujo número ordinal é ω^2 .

Vemos então que, dependendo da ordem considerada, temos vários tipos ordenados para o conjunto dos números racionais. Esta regra vale para qualquer conjunto infinito.

Dado um tipo ordinal α , designaremos por $^*\alpha$ o tipo ordenado de α , com a ordem invertida, de modo que $^*(^*\alpha) = \alpha$.

Os tipos ordinais têm a desvantagem de serem incomparáveis em geral, isto é, não vale a lei da tricotomia, por esta razão eles não são chamados de números. Somente os **tipos ordinais bem-ordenados** são chamados de **números ordinais**.

Dois conjuntos M e N são definidos como **similares** se existe uma correspondência biunívoca que respeita a ordem de seus elementos, a saber, $f(e) < f(e')$ se $e < e'$. Neste caso denotamos por $M \approx N$. Um exemplo disso pode ser visto nos conjuntos $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$, $N = \{2, 1, 4, 3, 6, 5, \dots\}$ e $Q = \{1, 3, 5, \dots, 2, 4, 6, \dots\}$ em que os dois primeiros são similares, ao contrário do conjunto Q .

Vemos claramente uma mudança na estrutura deste terceiro conjunto. Nos dois primeiros conjuntos, apenas o primeiro elemento não é sucessor de nenhum número, enquanto no terceiro conjunto, dois números não são sucessores: o número 1 e o número 2.

Uma observação que pode ser feita sobre os números ordinais transfinitos é que se dois conjuntos são similares, como definido por Cantor, então os números ordinais que os representam são iguais.

Se α e β são números ordinais, ou são iguais (similares) ou um deles é semelhante a um segmento inicial do outro. Digamos que β é semelhante a um segmento inicial de α , então β é similar a um elemento de α ou, em outras palavras, α é uma continuação de β .

Podemos dizer que as expressões $\beta \in \alpha$, $\beta \subset \alpha$ ou α é continuação de β são equivalentes e escrevemos: $\beta < \alpha$. Ou seja, dois números ordinais são comparáveis, isto é, vale a lei da tricotomia.

Podemos também concluir que todo conjunto de números ordinais é bem-ordenado. Por exemplo, o conjunto formado pelos ordinais ω , $\omega + 2$ e 2ω está escrito na ordem crescente.

$\omega = \{1, 2, 3, 4, \dots\} = \{2, 1, 3, 4, \dots\}$, por outro lado, $\omega \subset \omega + 2 \subset 2\omega$. Vejamos: ω é semelhante a um segmento inicial de $\omega + 2 = \{1, 2, 3, \dots, 1', 2'\}$ que é continuação de ω . Além disso temos que $\omega + 2$ é semelhante a um segmento inicial de $2\omega = \{1, 2, 3, \dots, 1', 2', 3', \dots\}$ que é continuação de $\omega + 2$.

Podemos escrever então: $\omega < \omega + 2 < 2\omega$.

O “conjunto” de todos os números ordinais denotado por Ω gerou o **Paradoxo de Burali-Forti**⁴⁸, a seguir:

Considerando a sucessão inteira de todos os números ordinais Ω , e sabendo que Ω é um conjunto bem-ordenado então Ω possui um número ordinal β correspondente a ele.

$$\beta = \text{ord}(\Omega)$$

⁴⁸ Cesare Burali-Forti (1861 – 1931) – matemático italiano, assistente de G. Peano na Universidade de Turim.

Consideremos agora o segmento $s(\beta)$, o conjunto de todos os ordinais menores que β .
Observemos que:

(1) Como $s(\beta)$ consiste de todos os elementos de Ω que precedem β , $s(\beta)$ é um segmento inicial de Ω .

(2) $\beta = \text{ord}(s(\beta))$, logo $\text{ord}(s(\beta)) = \beta = \text{ord}(\Omega)$

Portanto Ω é semelhante a um de seus segmentos iniciais, o que contradiz o teorema que diz que “um conjunto bem-ordenado não pode ser semelhante a um de seus segmentos iniciais”. [LIPSCHUTZ, p. 264]

Esse paradoxo ficou conhecido como Paradoxo de Burali-Forti, porque ele publicou um artigo em 1897 comentando sobre ele, no entanto, em 1895, o próprio Cantor já havia discutido este assunto e o comunicado a Hilbert no ano seguinte. [FRANKEL, p.8, 1973]

No final do século XIX, Cantor, consciente dos paradoxos gerados por sua teoria com os sistemas Ω e $\aleph$, representando respectivamente todos os ordinais e todos os cardinais, “criou”, para além dos números transfinitos, um INFINITO ABSOLUTO, que englobava tudo que é tão grande, que não poderia ser aumentado e que estaria relacionado ao poder de Deus. Cantor negou a existência do “conjunto” de todos os ordinais e o denominou de MULTIPLICIDADE INCONSISTENTE ou ABSOLUTAMENTE INFINITA. A hipótese de reunir todos os seus elementos conduz a uma contradição, de modo que é impossível considerar estas multiplicidades como uma ‘unidade’.

Tanto no exemplo dos conjuntos M , N e Q como no exemplo dos números racionais, vimos que um mesmo número cardinal pode corresponder a vários tipos ordinais, que, em sua totalidade, constituem uma “classe de tipos” (Typenklasse) particular. A recíproca não é verdadeira, isto é, os vários tipos ordinais, que pertencem a mesma classe, têm todos o mesmo

número cardinal ou potência. Assim, temos que as classes são determinadas pelo número cardinal que é comum a todos os tipos que pertencem àquela classe.

Cantor denotou estas classes de tipos por $[a] = T(a)$, em que a é um cardinal qualquer e definiu a segunda classe numérica $Z(\aleph_0)$ como sendo a totalidade $\{\alpha\}$ de todos os tipos ordenados α dos **conjuntos bem-ordenados** de cardinalidade $\aleph_0$, ou seja, $Z(\aleph_0)$ é o conjunto de todos os **números ordinais** de cardinalidade $\aleph_0$. Temos que, $Z(\aleph_0) \subset T(\aleph_0)$, isto é, podemos observar que $Z(a)$, a classe dos números ordinais que possuem a potência a , está contida na classe dos tipos ordinais $[a]$. A classe mais estudada por Cantor é a $Z(\aleph_0)$ dos números ordinais que têm a potência do infinito enumerável, e como já vimos (cf. §3.2.7) a potência da segunda classe numérica é o segundo menor número cardinal transfinito $\aleph_1$.

Na realidade, a classe numérica $Z(\aleph_\sigma)$, ordenada de acordo com a magnitude de seus ordinais, tem o cardinal $\aleph_{\sigma+1}$ e o tipo ordinal $\omega_{\sigma+1}$. [Fraenkel, p. 221, 1961]

3.2.11 Teorema da Boa-Ordenação

Todo conjunto $\mathcal{M}$ pode ser bem-ordenado.

Assim como bem ordenamos os inteiros e os racionais, inventando uma ordem diferente da ordem de grandeza, este teorema afirma que isso é sempre possível para qualquer conjunto.

Cantor tinha a intuição que todo conjunto poderia ser bem-ordenado e apresentou o seguinte argumento:

Se um conjunto M é dado, retire um elemento m_0 e coloque na **primeira posição**. Então escolha um elemento arbitrário m_1 , em $M - \{m_0\}$, e coloque na **segunda posição**. Então selecione de qualquer maneira um elemento em $M - \{m_0, m_1\}$ e designe-o para a **próxima posição**. Continue deste modo. Se o processo terminasse antes que o conjunto M tivesse acabado,

teríamos um subconjunto não-vazio de M e poderíamos novamente retirar um elemento deste subconjunto e colocá-lo depois de todos os elementos já escolhidos. Este processo poderia assim continuar e chegar ao fim somente quando o conjunto M tiver sido usado inteiramente.

Este argumento, apenas torna plausível a possibilidade de todo conjunto ser bem-ordenado. Percebemos claramente, observando as palavras em negrito acima, que Cantor tinha esta visão espaço-temporal para arrumar os elementos do conjunto segundo uma boa-ordenação. Além disso, podemos ver também o uso implícito do Axioma da Escolha.

É bom observar, que para Cantor, tanto a Tricotomia dos Cardinais (1878) como o Princípio da Boa-Ordenação (1883) também eram considerados como intuitivos e auto-evidentes, não necessitando desta maneira de nenhuma demonstração. O que ele não percebeu é que na realidade estas duas proposições eram equivalentes ao Axioma da Escolha.

Na seção 3 do *Grundlagen*, ele afirma que *podemos sempre colocar todo sistema bem definido sob a forma de um sistema bem ordenado*⁴⁹ e usa este princípio não só para definir as operações com os números ordinais, mas também para obter suas propriedades como a associatividade e a não comutatividade.

Somente em 1915, Friedrich **Hartogs** (1874 – 1943), em um artigo intitulado Sobre o problema da boa-ordenação (*Über das Problem der Wohlordnung*), publicado no *Mathematische Annalen*, volume 76, número 4, provou a equivalência entre a Tricotomia dos Cardinais e o Axioma da Escolha. Até então se achava que a Tricotomia era uma proposição mais fraca.

Na realidade, o Teorema da Boa-Ordenação, o Axioma da Escolha e a Tricotomia dos Cardinais são axiomas equivalentes [MOORE, p.167, 1982]. Considerando-se um deles como axioma do sistema, os outros podem ser demonstrados. Foi o que Zermelo fez, em 1904, no *Mathematische Annalen*, volume 59, quando foi o primeiro a demonstrar o Teorema da Boa-

Ordenação usando pela primeira vez, explicitamente, o Axioma da Escolha. Para ver uma demonstração do Teorema da Boa-Ordem ir ao apêndice B.

A idéia de Zermelo em basear a demonstração do Teorema da Boa-Ordenação no Axioma da Escolha não foi sua. Em seu artigo, ele escreve que esta idéia foi do matemático alemão Erhard **Schmidt** (1876 – 1959).

Do Teorema da Boa-Ordenação podemos inferir que todo número cardinal é um alef, e temos, em particular, que o **contínuo** pode ser bem-ordenado, embora tenha sido impossível produzir uma boa-ordenação específica para o contínuo. Surge a questão: Qual é o alef que corresponde à potência do contínuo?

A demonstração deste teorema gerou uma discussão filosófica sobre a questão da existência dos objetos matemáticos independente de sua construtibilidade, isto é, o fato de existir uma boa-ordem para os números reais não nos garante a existência de sua construção.

Em 1965, Salomon **Feferman**, usando os resultados obtidos por Cohen [1963a, 1963b, 1964], demonstrou que o conjunto dos números reais não possui uma boa-ordenação construtível. Mais precisamente: Nenhum conjunto definível, bem-ordenado, do contínuo, pode ser provado existir partindo dos axiomas de Zermelo-Fraenkel junto com o Axioma da Escolha e da Hipótese do contínuo generalizada⁵⁰.

3.2.12 Relação entre os números ordinais e os números cardinais transfinitos

Com o objetivo de relacionar os números cardinais aos números ordinais, Cantor define os números cardinais como os números ordinais que **não têm** a mesma cardinalidade que qualquer

⁴⁹ « on peut toujours mettre tout système bien défini sous la forme d'un système bien ordonné. » [Acta Math. 2, p.395]

⁵⁰ No set-theoretically definable well-ordering of the continuum can be proved to exist from the Zermelo-Fraenkel axioms together with the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis. [FEFERMAN, p.325]

ordinal menor. Assim, o número ordinal ω_0 fica relacionado com o número cardinal $\aleph_0$, pois qualquer ordinal menor que ω_0 é finito e logo diferente dele.

A notação dos números cardinais transfinitos não aconteceu tão naturalmente como o parágrafo acima parece sugerir. Em junho de 1886, aparece a primeira notação que depende dos tipos ordenados; se α denota o tipo ordenado de um conjunto, então α^* denota a potência deste conjunto. Por exemplo, ω^* denota a primeira potência transfinita, o menor cardinal transfinito que está relacionado ao número ordinal ω . Temos assim a seguinte igualdade:

$$\omega^* = \omega + 1 = \omega + 2 = \dots = \omega^2 = \dots$$

O conjunto de todos os números ordinais cuja potência era ω^* compreendia o que Cantor chamou de a segunda classe numérica (II) e foi denotada por Ω .

A idéia de colocar um asterisco sobre o número ordinal não durou muito, pois se mostrou pouco prática, já que seriam necessários uma infinidade de símbolos diferentes para cada nova potência. Em novembro deste mesmo ano, Cantor passou a representar ω^* por v_1 e Ω , a potência da segunda classe numérica, por v_2 .

Somente dois anos depois, Cantor resolveu adotar a barra sobre o conjunto, como já tinha feito para denotar o tipo ordenado de um conjunto. Deste modo, a potência do número ordinal ω passava a ser denotada por $\bar{\omega}$.

Somente em 13 de dezembro de 1893, numa carta a **Vivanti** [MESCHKOWSKI, p.508, 1965], com o objetivo de não usar as tradicionais letras gregas, ele decide pelo uso do alef, primeira letra do alfabeto hebreu e que tem um valor simbólico muito forte: as palavras Deus

(Eloim - א ל ה י ך) e um (ehad - א ת ז) começam por esta letra. Como se pode observar, o hebraico é lido da direita para a esquerda.

Cantor escreveu então: $\overline{\omega} = \overline{\omega+1} = \overline{\omega+2} = \dots = \overline{\alpha} = \aleph_1$, podemos perceber que ele ainda não usou o $\aleph_0$ para denotar a potência do enumerável.

Somente, em julho de 1895, quase dez anos depois de ter publicado o *Grundlagen*, na primeira parte do *Beiträge*, Cantor decide denotar o primeiro número cardinal transfinito por $\aleph_0$ e faz menção a $\aleph_\omega$, prometendo provar sua existência.

Para definir o cardinal $\aleph_\omega$, precisamos lembrar algumas definições já mencionadas anteriormente:

- $Z(\aleph_0)$ é a coleção de todos os números ordinais α tal que $\omega_0 \leq \alpha < \omega_1$; em que ω_1 é o menor ordinal cujo número cardinal não é igual a $\aleph_0$.
- $\aleph_1 = \text{card}(\omega_1) = \text{card}(Z(\aleph_0))$
- ω_{ω_0} é o menor ordinal que não pertence a nenhuma classe $\Omega_n = Z(\aleph_n)$ com n um número finito, isto é, n pertence a primeira classe numérica.

Definimos, então, $\aleph_\omega = \aleph_{\omega_0} = \text{card}(\omega_{\omega_0})$ como o $\sum_{v=1,2,3,\dots} \aleph_v$; temos assim que $\aleph_{\omega_0}$ é igual a

$\text{card}(\bigcup_{n<\omega} \Omega_n) = \text{card}(\{\beta: \beta < \omega_{\omega_0}\})$; em outras palavras, $\aleph_{\omega_0}$ é caracterizado como a potência da

classe cumulativa $[\omega_0]$. [HALLETT, 1986]

Estes números ficaram conhecidos como cardinais inacessíveis e sua existência só pode ser garantida, postulando-a como um novo axioma para o sistema.

A definição atual para números cardinais é análoga à definição de Cantor e utiliza os números ordinais. Consiste em considerar um número cardinal como um número ordinal α tal que se β é um número ordinal equivalente a α , isto é, $\text{card } \alpha = \text{card } \beta$ então $\alpha \leq \beta$. Os números

ordinais com essa propriedade são chamados de números iniciais. Assim, se X é um conjunto, então $\text{card } X$, o número cardinal de X ou potência de X , é o menor número ordinal equivalente a X . [HALMOS].

Em uma carta para Dedekind, datada de 28 de julho de 1899, Cantor faz um resumo de sua teoria dos transfinitos abordando os números ordinais, sua relação com os cardinais e definindo as multiplicidades inconsistentes.

...Como você sabe, já faz alguns anos eu cheguei a uma seqüência bem ordenada das potências ou números cardinais transfinitos, os quais denominei de “Alefs”:

$$\aleph_0, \aleph_1, \dots, \aleph_{\omega_0}, \dots, \aleph_{\omega_1}, \dots$$

$\aleph_0$ significa a potência do que costumeiramente se entende por conjuntos “enumeráveis” e $\aleph_1$ é o número cardinal imediatamente superior a $\aleph_0$ ao qual se segue imediatamente $\aleph_2$, e assim sucessivamente; $\aleph_{\omega_0}$ é a totalidade de todos os $\aleph$ seguintes (isto é, superiores) e é igual a

$$\lim_{\nu \rightarrow \omega_0} \aleph_\nu,$$

etc.

A grande questão era saber se, além dos alefs, há outras potências de conjuntos que não sejam alefs. Já faz dois anos que estou de posse de uma prova de que não há outras potências [além dos alefs], de tal forma que, por exemplo, o contínuo linear-aritmético possui um alef determinado na qualidade de ser número cardinal [ou potência]; uma vez que partamos do conceito de uma multiplicidade (um sistema, uma coleção) de coisas, então se torna indispensável para mim diferenciar as multiplicidades (sempre considero multiplicidades determinadas).

A saber, uma multiplicidade pode ser arranjada (constituída) de tal forma, que a hipótese da “conjuntividade” [agrupamento] de seus elementos leve a uma contradição, o que implica que é impossível que tal multiplicidade seja compreendida como uma “unidade”, como uma “coisa terminada”. Tais multiplicidades denomino de absolutamente infinitas ou multiplicidades inconsistentes.

Como facilmente se vê [uberzeugt], a “coleção de todas as coisas pensáveis”, por exemplo, é uma coleção de tal tipo; posteriormente, outros exemplos serão apresentados.

Se, no entanto, a totalidade dos elementos de uma multiplicidade pode ser pensada, sem contradição, como “sendo unidos”, de tal forma que é possível conceber sua união como uma coisa, chamo (tal multiplicidade) de “consistente” ou “conjunto”. (Em francês e italiano, tal conceito é dado apropriadamente pelas expressões ensemble e insieme).

.....
Os números cardinais, aos quais, nesse sentido, se associam os números transfinitos do sistema Ω , chamo de “Alefs”, e o sistema de todos os alefs chamo de $\aleph$ (Tav, última letra do alfabeto hebraico).

[MESCHKOWSKI, p. 443, 1967 - tradução de Walter G. do Nascimento Jr.]

3.2.13 Teorema de Cantor

Este teorema foi demonstrado por Cantor, no primeiro volume das Atas da Associação dos Matemáticos Alemães (*Comptes rendus de l'Association des mathématiciens allemands - Euvres completes*, p. 278) e diz o seguinte:

Se M é um conjunto qualquer de número cardinal $\mathfrak{a}$, podemos sempre deduzir um outro conjunto M' , cujo número cardinal $\mathfrak{a}'$ é maior que $\mathfrak{a}$.

Outra maneira de propor este teorema é a seguinte:

Para todo conjunto M , o conjunto $P(M)$ ⁵¹ de todos os subconjuntos de M tem um número cardinal maior que M .

Podemos simplesmente formular que $2^{\mathfrak{a}} > \mathfrak{a}$ para qualquer $\mathfrak{a}$.

Demonstração do Teorema de Cantor:

Se o conjunto M é finito, com n elementos, a demonstração é trivial, pois sabemos que a quantidade de subconjuntos de M é exatamente 2^n que certamente é maior que n , para qualquer n natural.

Suponhamos então que M é infinito e vamos considerar o conjunto $P(M)$ de todos os seus subconjuntos. Será que existe uma correspondência biunívoca entre M e $P(M)$?

Vamos considerar que a resposta seja afirmativa. Neste caso existem dois tipos de elementos de M : o primeiro tipo é formado por elementos que estão relacionados a conjuntos de $P(M)$ que o possuem como elemento, por exemplo, o conjunto universo; o segundo tipo é formado por elementos que se relacionam a conjuntos que não o possuem como elemento, por exemplo, o conjunto vazio. Este segundo tipo forma um conjunto que vamos chamar de Normal.

Como consideramos a existência de uma relação biunívoca, existe um elemento de M que se corresponde ao conjunto Normal. Este elemento pertence ou não ao conjunto Normal? Se ele pertence, pela definição do conjunto Normal, ele não está relacionado a ele; mas se ele não

pertence ao conjunto Normal com o qual está relacionado, então, por definição, pertence ao conjunto Normal.

Esta contradição é gerada exatamente pela afirmação de que existe uma correspondência biunívoca. Concluímos que esta correspondência só pode ser injetora (relaciona cada elemento de M com seu conjunto unitário, por exemplo), mas não sobrejetora. Logo, $P(M)$ tem um número cardinal maior que o número cardinal de M .

Podemos concluir daí que, assim como os ordinais, as potências também não têm um máximo.

As “potências” representam apenas uma generalização necessária dos números cardinais finitos. Não existe nada que seja o maior dos números cardinais transfinitos, além disso, eles possuem a mesma realidade dos números cardinais finitos. A única diferença está na relação entre eles, ou seja, sua teoria dos números é parcialmente diferente do tipo da que encontramos na região do finito.[LAVINE, p.102, 1994]

Assim como Ω , o sistema $\aleph$ de todos os números cardinais também é um exemplo de multiplicidade inconsistente como já definido, um “conjunto” tão grande que não pode ser pensado como uma unidade. A totalidade dos alefs não pode ser concebida como um conjunto determinado e acabado.

Em uma carta, de 28 de agosto de 1899, endereçada a Dedekind, Cantor observa que a consistência das multiplicidades finitas é uma verdade indemonstrável (Axioma da Aritmética) e igualmente a consistência das multiplicidades aos quais ele atribui os alefs como números cardinais é o Axioma da Aritmética Transfinita Ampliada.

Hahnenklee, 28 de agosto de 1899

... Deve-se interrogar, donde eu sei que as multiplicidades bem ordenadas ou seqüências às quais eu atribuo os números cardinais

$$\aleph_0, \aleph_1, \dots, \aleph_{\omega_0}, \dots, \aleph_{\omega_1}, \dots$$

são realmente “conjuntos” no sentido da palavra que foi explicada, ou seja “multiplicidades consistentes”. Não seria concebível que estas multiplicidades sejam “inconsistentes”, mas que contradição há supor “uma existência simultânea de todos os elementos” ainda não se observou? A

⁵¹ A letra P foi escolhida aqui em referência ao conjunto das partes; alguns autores usam a letra C, em homenagem a Cantor, e outros usam a letra U em referência a palavra alemã *Untermenge* (subconjunto).

minha resposta é que esta questão pode ser estendida igualmente às multiplicidades finitas, e que, se pensarmos exatamente, conduz-se então ao resultado: mesmo para as multiplicidades finitas, não há demonstração da sua “consistência”. Em outros termos: o fato “da consistência” das multiplicidades finitas é uma verdade simples, indemonstrável, é “o axioma da aritmética” (no antigo sentido da palavra). E, do mesmo modo, “a consistência” das multiplicidades às quais atribuo como números cardinais os alefs, é “o axioma da aritmética transfinita ampliada”. (cf. anexo)

Cantor afirma que o sistema $\aleph$ não é um conjunto e faz a demonstração em outra carta para Dedekind, datada de 31 de agosto de 1899 [CAVAILLÈS, p.244, 1937] e conclui, então, que dois sistemas equivalentes são ambos consistentes ou ambos inconsistentes.

A terminologia INCONSISTENTE elimina os conjuntos incômodos e poupa Cantor dos tormentos das antinomias, que deveriam ser resolvidos dentro de uma inteligência divina.

O que mais preocupava Cantor na virada do século eram os problemas internos de sua teoria dos conjuntos, como o(a):

- Estabelecimento de uma boa-ordem sobre o contínuo, ou mais geralmente, saber se todo conjunto pode ser bem-ordenado.

O Teorema da Boa-Ordenação demonstrado por Zermelo (cf. 3.2.11 e apêndice B), em 1904, veio resolver este problema parcialmente já que, na sua demonstração, Zermelo usou o Axioma da Escolha que não era bem aceito por muitos matemáticos.

- Comparabilidade dos alefs.

Considerando-se o Teorema da Boa-Ordenação como verdadeiro, isto implicava que todos os conjuntos podiam ser bem-ordenados e por isso tinham um número ordinal correspondente; isso significava que eles pertenciam a alguma classe na seqüência dos ordinais e conseqüentemente este conjunto estava relacionado a algum alef. Dados dois conjuntos quaisquer M e N se seus números ordinais pertencessem à mesma classe então

$\text{card}(M) = \text{card}(N)$, caso contrário, o conjunto cujo ordinal que ocupasse uma classe anterior possuiria um número cardinal menor.

- Cardinalidade do contínuo.

Este problema não foi resolvido durante sua vida.

Ainda considerando o Teorema da Boa-Ordenação como verdadeiro, podemos afirmar que ao conjunto dos números reais, cuja potência chamamos de $\mathfrak{c}$, corresponde um alef. Mas qual a posição de $\mathfrak{c}$ na sequência $\aleph_0, \aleph_1, \dots, \aleph_{\omega_0}, \dots, \aleph_{\omega_1}, \dots$? Essa questão só será respondida considerando-se a veracidade ou não da Hipótese do Contínuo. No caso afirmativo, temos que a potência do contínuo ocupa a segunda posição, isto é, $\mathfrak{c} = \aleph_1 = 2^{\aleph_0}$; nos outros casos essa posição vai depender de algum outro axioma do sistema.

Podemos perceber neste caso a independência dos Axiomas da Escolha e da Hipótese do Contínuo. Existem sistemas em que ambos são válidos e outros em que um dos axiomas é válido e o outro não.

3.2.14 Potência e tipo ordenado do contínuo

No *Beiträge* [CANTOR, p.96, 1915, (27) da lista 1.9], Cantor demonstra que $2^{\aleph_0}$ é a potência do contínuo, obtendo deste modo, de uma maneira mais simples, outra prova que a potência do contínuo é maior que a potência do conjunto dos naturais como ele já havia mostrado no seu artigo *Sobre uma propriedade do sistema de todos os números algébricos reais* [(7) da lista 1.9] de uma maneira mais complexa. Neste caso, basta usar o Teorema de Cantor, citado na seção anterior, que diz que $2^a > a$ para qualquer a , então, em particular, $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$.

Para demonstrar que $2^{\aleph_0}$ é a potência do contínuo, Cantor, mostrou que esta igualdade vale para o intervalo $[0, 1]$.

Usando a definição de potência de cardinais definido na § 3.2.9 (ex. 3), todo número real, neste intervalo, pode ser escrito no sistema binário na forma $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{f(i)}{2^i}$, em que $f(i) = 0$ ou 1 , é uma função de $\mathbb{N} \rightarrow \{0;1\}$; obtemos, assim, exatamente $2^{\aleph_0}$ números reais neste intervalo. Cantor chama a atenção que todos os números nesse intervalo são representados de maneira única, com exceção dos números do tipo $x = \frac{2^{\nu} + 1}{2^{\mu}} < 1$ que são representados duas vezes. Isso não traz grandes problemas, pois o conjunto formado por estes valores de x é enumerável.

Com o objetivo de completar a demonstração de Cantor para **toda a reta real**, criamos uma função biunívoca, relacionando o intervalo $]0; 1[$ com a reta e assim obtemos dois conjuntos que possuem a mesma potência. Exemplo de uma função que faz esta correspondência, é a função tangente definida no intervalo aberto $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $y = \operatorname{tg} x$ é monotonicamente crescente e assume todos os valores reais.

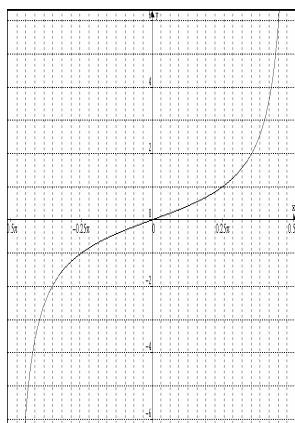


Ilustração 4: Gráfico da função tangente, definida no intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, feito com o programa Graphmath.

O fato de considerarmos o intervalo aberto ou fechado, isto é, acrescentarmos um conjunto com apenas dois elementos não interfere na potência do contínuo. Esta equivalência já tinha sido demonstrada por Cantor, quase 20 anos antes, em 1877, no artigo *Uma contribuição à teoria dos conjuntos*. [CANTOR, *Acta Math.*2, p. 322, (8) da lista 1.9]

Podemos usar também a aritmética transfinita em que $\mathfrak{c} + 2 = \mathfrak{c}$.

Além disso, dois intervalos, independente de seu comprimento, ou seja, independente do valor de seus pontos extremos, também mantêm sua potência. Em geral, para transformar o intervalo $[a, b]$ no intervalo $[a', b']$, usamos a seguinte função biunívoca:

$$f(x) = \frac{a'-b'}{a-b}x + \frac{ab'-a'b}{a-b}, \text{ para o nosso caso particular, temos } f(x) = \frac{1}{\pi}x + \frac{1}{2}, \text{ que transforma o}$$

$$\text{intervalo } \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\text{ no intervalo }]0,1[.$$

Cantor percebeu que somente a potência não era suficiente para caracterizar o contínuo e para fugir da intuição tinha que dissociar a aritmética transfinita da topologia. Era necessário definir o contínuo, como um **tipo transfinito**, independente de qualquer consideração geométrica.

Segundo a definição de Dedekind, o contínuo é um conjunto ordenado, sem saltos (denso) nem lacunas (todo corte é determinado por um elemento).

Uma das propriedades do contínuo é ser **INEXTENSÍVEL**, isto é, qualquer corte satisfaz a seguinte condição: é determinado por um elemento do conjunto, que é o último da primeira classe ou o primeiro da segunda classe. Os números racionais não satisfazem essa condição, são **não**-inextensíveis, ou seja, são extensíveis.

Todo número racional corresponde a um corte, mas nem todo corte corresponde a um número racional. Esta propriedade que nem todos os cortes produzem números racionais consiste na incompletude ou descontinuidade do domínio de todos os racionais.

Um número irracional é o valor de um ponto no qual um corte divide a reta numerada em um conjunto A e um conjunto B que não têm maior nem menor elemento respectivamente.

O corte mais famoso, e que sempre é citado como exemplo é o que considera como ponto de corte o valor de x , positivo, tal que $x^2 = 2$, que é um número sabidamente não racional.

É esta definição que cria o CONTINUUM, isto é, o conjunto de todos os números reais e transforma a reta numerada em reta real.

Galileu, Leibniz e Bolzano propunham que a continuidade da reta numérica estava baseada na densidade dos números racionais, mas sabemos que esta condição não é suficiente. Cantor acreditava que as propriedades do contínuo decorriam do Axioma de Arquimedes⁵² e da cardinalidade do contínuo.

Um exemplo de um conjunto que tem a potência do contínuo, mas não é contínuo nem conexo, é o Conjunto Ternário de Cantor. Este conjunto não é denso em nenhum intervalo, é fechado, perfeito e todos os seus pontos são pontos de acumulação. Além disso, por incrível que possa parecer, possui medida nula.

Este exemplo nos dá uma prova que a potência de um conjunto não tem nada a ver com suas propriedades geométricas, como, por exemplo, sua medida.

⁵² Dados dois segmentos A e B, considerando-se o comprimento de A menor que o comprimento de B, sempre é possível se obter um segmento maior que B traçando-se A um número suficiente de vezes. Algebricamente podemos escrever que num espaço arquimediano se $a < b$ então podemos escrever que $n.a > b$ para algum n suficientemente grande.

O Conjunto de Cantor $z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \dots + \frac{c_n}{3^n} + \dots$ em que os coeficientes c_n , podem ser 0 ou 2 e no qual a série pode ser **composta** de um número finito ou infinito de membros, foi definido por Cantor, no *Grundlagen*. [1883, p.407].

Consideremos um conjunto M , não necessariamente bem-ordenado. Ele será contínuo e terá o tipo ordenado θ , se tiver as seguintes propriedades:

- É um conjunto perfeito.
- Contém um conjunto S enumerável, denso em M .

Cantor mostrou que estas duas condições eram suficientes para caracterizar o tipo ordinal θ do continuum linear. [CANTOR, p.134, 1955, original de 1895]

O tipo ordinal para o intervalo aberto $]0,1[$ ele denominou de λ , de modo que o intervalo fechado $[0;1]$ tem o tipo ordinal $1 + \lambda + 1 = \theta$.

Em um artigo, publicado em março de 1882 [(16) da lista 1.9], Cantor argumenta que, em espaços de dimensão maior que 1, movimentos contínuos são possíveis em espaços de onde foram retirados conjuntos densos, tendo a propriedade de ser enumerável, ou seja, se considerarmos um conjunto G_n , de dimensão $n \geq 2$, e retirarmos um conjunto M , como por exemplo, o sistema de pontos cujas n coordenadas são números algébricos, o conjunto $A = G_n - M$ não deixa de ser contínuo e conexo. Em outras palavras, dois pontos quaisquer N e N' do conjunto A podem sempre ser ligados por uma linha contínua em que, todos os seus pontos pertencem ao conjunto A , de modo que não contenha um só ponto de M .

Cantor de alguma maneira sentia que a natureza do mundo material possuía uma ligação com estas estruturas que tinham, como exemplo principal, na sua teoria, a distinção entre o

discreto e o contínuo. Em uma carta para Kurd **Lasswitz**⁵³, com a data de 15 de fevereiro de 1884, Cantor diz acreditar que, no seu artigo, *Grundlagen*, ele tenha solucionado o desafio de determinar as várias valências ou potências de conjuntos presentes em toda a Natureza (na medida que possamos conhecê-las).[DAUBEN, p.291, 1990]

Em outro artigo no *Acta Mathematica* 7 [(23) da lista 1.9], datado de 1885, Cantor afirma que a potência da matéria seria a primeira, a do enumerável, já a segunda potência, a do contínuo, pertenceria ao éter.

Não se deve dizer que *outros* (tipos de) matéria não poderiam ter sido criadas (ou mesmo que não foram criadas) pelo Criador, mas só que aqueles dois substratos parecem ser suficientes para explicar todas as *aparências percebidas até aqui observadas* (na Natureza)⁵⁴.

Além disso, no artigo de 1887 [(24) da lista 1.9], ele escreve:

Em certo sentido pode-se examinar todo tipo de ordem como um composto de *matéria e forma*; as unidades diferenciadas conceitualmente contidas nela constituem a matéria enquanto que a ordem entre elas é o correspondente à forma⁵⁵.

Cantor chegou a essas conclusões, baseando-se em autores como Faraday, Ampère, Weber e Cauchy. Mas foi Leibniz sua principal fonte de inspiração e que o induziu a chamar os componentes últimos da matéria de MÔNADAS: sem extensão, perfeitamente comparáveis aos pontos matemáticos e se dividiam em mônadas corporais, com potência equivalente ao cardinal transfinito $\aleph_0$ e mônadas de éter, relacionadas ao $\aleph_1$.

Cantor acrescentou que esta dicotomia entre matéria e éter estava perfeitamente de acordo com os princípios da física contemporâneos, prevalecendo a opinião de que as duas potências estavam perfeitamente adequadas para explicar todas os fenômenos da natureza, conhecidos naquele tempo.

⁵³ Kurd **Lasswitz** (1848 – 1910) – cientista alemão e escritor de livros de ficção científica.

⁵⁴ It ought not to be said that *other* (kinds of) matter could not have been created (or even that they have not been created) by the Creator, but only that those two *substrates* seem to be sufficient to *explain* all the *perceived appearances thus far observed* (in Nature). [DAUBEN, p.295, 1990]

3.3 HIPÓTESE DO CONTÍNUO

3.3.1 Enunciado e consequências da Hipótese do Contínuo

Com a descoberta que existiam infinitos diferentes, Cantor levantou uma conjectura, que seria o germe do que ficou conhecido mais tarde como a Hipótese do Contínuo⁵⁶, e diz que conjuntos lineares de pontos consistiriam de apenas duas classes. A primeira incluiria todos os espaços que podem ser dados sob a forma de uma função de v , na qual v percorre todos os inteiros positivos. A segunda classe é formada por aqueles conjuntos que são redutíveis à forma de uma função de x , em que $0 \leq x \leq 1$ é um valor real. Correspondendo a estas duas classes, temos somente duas potências do infinito para conjuntos lineares (1877).

Alguns anos mais tarde, em uma carta de Cantor para Dedekind, com a data de novembro de 1882, ele escreve o seguinte teorema, que ficou conhecido como **Teorema das Duas Classes**: Todo subconjunto infinito de $\mathbb{R}$ ou é enumerável ou tem a potência do contínuo, que vamos denotar pela letra **c**. Esta foi a formulação original da Hipótese do Contínuo.

Outra versão para a Hipótese do Contínuo é: $\mathbb{R}$ tem a potência da segunda classe numérica, pois já sabemos que Cantor demonstrou que a segunda classe numérica é a menor potência que segue depois da potência da primeira classe numérica.

Usando a notação dos alefs, de 1895, a Hipótese do Contínuo fica assim:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 = c$$

Isso significa que, nestas circunstâncias, a potência do contínuo vem logo depois da potência do infinito enumerável.

⁵⁵ In a certain sense these order types may be regarded as a composite of *matter* and *form*; the conceptually distinct units contained therein comprise the *matter*, while the order of these elements corresponds to their *form*. [CANTOR, 1887, apud DAUBEN, p.293, 1990]

Esta afirmação pode ser estendida, afirmando-se que o conjunto de todas as funções reais tem a potência da terceira classe numérica, ou seja, $2^{\aleph_1} = \aleph_2$. Deste modo, o conjunto das funções reais teria a próxima potência depois de $\aleph_1$.

Fazendo uma generalização temos a **Hipótese do Contínuo Generalizada** que afirma que: Para todo cardinal infinito $\mathbf{m}$, não existe nenhum $\mathbf{n}$ tal que $\mathbf{m} < \mathbf{n} < 2^{\mathbf{m}}$. [MOORE, p. 334]

Na notação dos alefs fica: $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$.

Considerando-se então que a Hipótese do Contínuo seja verdadeira, a seqüência dos cardinais transfinitos ficaria assim: $\mathbf{a}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{f}$,..., onde $\mathbf{a}$ é a potência dos números **algébricos**, $\mathbf{c}$ é a potência do **contínuo** e $\mathbf{f}$ é a potência das **funções** reais no intervalo $[0,1]$, não existindo nenhuma potência entre um número cardinal e outro.

Para a demonstração que a potência do conjunto das funções, é maior que a potência do contínuo $\mathbf{c}$, usamos o famoso **método diagonal**, inventado por Cantor, em um artigo intitulado *Sobre uma questão fundamental da teoria das multiplicidades* [(25) da lista 1.9], publicado em 1891.

Vejamos esta demonstração a seguir:

Que esse conjunto tem pelo menos a potência $\mathbf{c}$ é óbvio, basta considerar as funções $f(x) = k$, onde k é uma constante no intervalo $[0, 1]$. Falta provar que o conjunto das funções não é equivalente ao contínuo.

Suponhamos que ele seja equivalente ao contínuo, então é possível criar uma função biunívoca entre as funções $f(x)$ e os pontos z no intervalo $[0, 1]$. Denote por $f_z(x)$ a função relacionada ao número z . Agora construa uma função $g(z)$ no intervalo $0 \leq z \leq 1$, com a

⁵⁶ O termo ‘problema do contínuo’ foi introduzido no prefácio da Dissertação de F. Bernstein (1901). A expressão ‘hipótese do contínuo’ é devida a Hausdorff (1908). [GRATTAN-GUINNESS, p. 116, 2000]

propriedade que, para todo ponto z , $g(z) \neq f_z(z)$. Como $g(z)$ é também uma função definida no intervalo $[0, 1]$, ela tem que coincidir com uma função $f_u(x)$; portanto, em particular, $g(u) = f_u(u)$. Isto, entretanto não pode acontecer pela definição de $g(z)$. Logo, a suposição que o conjunto de nossas funções é equivalente ao contínuo leva a uma contradição.[KAMKE]

Em uma das várias cartas a Mittag-Leffler, Cantor diz ter trabalhado um longo tempo no problema do contínuo, mas sem sucesso. No período de maio de 1883 a novembro de 1884 ele descreve com detalhes sua mudança de idéia em afirmar e negar a validade da Hipótese do Contínuo.

No artigo intitulado *Sobre a potência dos conjuntos perfeitos de pontos* [(20) da lista 1.9)], extraído de uma dessas cartas, começam as tentativas públicas de Cantor para demonstrar a Hipótese do Contínuo. Neste artigo ele se limita aos conjuntos de pontos lineares e prova o teorema que todos os conjuntos perfeitos de pontos têm a potência do contínuo. Para demonstrar a Hipótese do Contínuo, Cantor tem que mostrar então que a potência dos conjuntos perfeitos de pontos é a da segunda classe. Ainda neste artigo, em uma nota de rodapé, Mittag-Leffler escreve que: O Sr. Ivar **Bendixson** (1861 – 1935)⁵⁷ a convite de Cantor provou este teorema abrangendo o caso de um conjunto perfeito de n dimensões.

Um outro teorema, que trazia um resultado bastante promissor, originalmente formulado por Cantor, no *Grundlagen*, continha um erro que foi detectado por Bendixson; no artigo *Sobre os conjuntos infinitos e lineares de pontos. Parte VI* [(21) da lista 1.9], Cantor reformulou esse teorema que, atualmente, é conhecido como Teorema de Cantor-Bendixson: Todo subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$ pode ser decomposto em um conjunto perfeito e um conjunto enumerável.[MOORE, p.35]

Em novembro de 1884, Cantor tenta sem sucesso publicar o artigo *Princípios de uma teoria dos tipos ordinais* [(22) da lista (1.9)], que somente seria publicado no AM 124, em 1970, muito depois de sua morte. A justificativa do editor, Mittag-Leffler, para a não publicação deste artigo foi exatamente a falta de um resultado concreto sobre o problema do contínuo.

Ao contrário de Cantor, Gödel achava que a Hipótese do Contínuo era falsa e que existiria uma infinidade de infinitos do tipo-Zenão⁵⁷, aninhados entre $\aleph_0$ e $\mathfrak{c}$, e que, mais cedo ou mais tarde um princípio seria encontrado provando isto.[WALLACE, p. 305, 2003]

Cantor pressupunha existir uma ‘teoria dos conjuntos’ única, exatamente como uma teoria única para os números reais.

Em contraposição, Alonzo **Church** (1903 – 1995) questionava que poderia existir mais de uma segunda classe numérica em diferentes universos do discurso, exatamente como existiam geometrias diferentes, mas consistentes.

Três décadas depois, Fraenkel elaborou esta analogia entre Geometria e Teoria dos Conjuntos; a Geometria absoluta, também chamada Geometria neutra, que corresponde à Geometria Euclidiana, sem o Quinto postulado, estaria relacionada com o sistema ZF. A Geometria Euclidiana corresponderia a ZF com o Axioma da Escolha e as geometrias não-euclidianas estariam relacionadas ao sistema ZF com algum princípio que negasse o Axioma da Escolha.[MOORE, p.248]

No ano 2000, Hugh **Woodin** [2001], apresentou uma conferência, mostrando um sistema axiomático, em que a Hipótese do Contínuo era falsa. Assumindo o Máximo de Martin, ele faz

⁵⁷ Matemático sueco que influenciado pelas idéias de Cantor estudou Teoria dos Conjuntos, Fundamentos da Matemática e Topologia de conjunto de pontos. Deu um exemplo de um conjunto perfeito e desconexo, diferente do Conjunto Ternário, criado por Cantor, que tem essas mesmas propriedades.

⁵⁸ Para mais detalhes ir ao apêndice D.

com que o número $\aleph_1$ seja “pequeno” o suficiente, de modo que o contínuo seja $\aleph_2$. Ou seja:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_2.$$

3.3.2 Tentativas para demonstrar a Hipótese do Contínuo

As tentativas de Cantor em demonstrar a Hipótese do contínuo geraram um dos mais profundos trabalhos em teoria dos conjuntos.

Consideremos as seguintes identidades:

(1) $\mathfrak{c}$ como a potência do conjunto de todos os números reais, isto é, $\overline{\mathbb{R}} = \mathfrak{c}$.

(2) $\aleph_1$ como o conjunto-potência de $\aleph_0$, isto é, $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$, em que $\aleph_1$ é a potência da segunda classe numérica.

(3) A potência de $\mathbf{Z}(\aleph_0)$ como a mesma do conjunto de todos os **tipos** ordenados que têm potência $\aleph_0$, isto é, $\overline{\overline{\mathbf{Z}(\aleph_0)}} = \overline{\overline{T(\aleph_0)}}$.

O problema é que Cantor não conseguiu provar a conexão entre essas três identidades.

De (1) e (2) temos que, se considerarmos a potência do contínuo como a potência da segunda classe numérica, então, $\aleph_1 = 2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ que é a Hipótese do Contínuo. Vamos ver a seguir onde entra a terceira afirmação.

No *Beiträge* [CANTOR, 1897, apud 1915], Cantor foi capaz de deduzir duas coisas:

(a) Não existe maneira de $\mathfrak{c}$ ser maior que $2^{\aleph_0}$, isto é, $\mathfrak{c} \leq 2^{\aleph_0}$.

(b) Se existir algum infinito maior que $\aleph_0$, mas menor que $\mathfrak{c}$, este conjunto tem que ser o não-enumerável $\mathbf{Z}$, da segunda classe numérica ($\aleph_1$).

Se Cantor conseguisse provar que (2) e (3) eram equivalentes, isto é, que $\overline{\mathbf{Z}} = 2^{\aleph_0}$, então por (b) ele provaria que **não** existe conjunto intermediário entre $\aleph_0$ e $\mathfrak{c}$, o que acarretaria que $\mathfrak{c} = \aleph_1$. [WALLACE, p.300, 2003]

É importante lembrar que $Z(\aleph_0)$, conjunto dos ordinais de potência $\aleph_0$ é um subconjunto de $T(\aleph_0)$ conjunto dos tipos ordinais, já que somente pertencem ao primeiro conjunto os tipos ordenados que são bem-ordenados e que Cantor chamou de números ordinais, ou seja, $\overline{\overline{Z(\aleph_0)}} \leq \overline{\overline{T(\aleph_0)}}$.

Em [HAUSDORFF, 1957, 1ª ed. de 1914]⁵⁹ temos o seguinte teorema:

O conjunto dos tipos contáveis $T(\aleph_0)$ tem a cardinalidade do continuum, isto é, $\overline{\overline{T(\aleph_0)}} = \aleph = c$.

Demonstração: O limite superior da cardinalidade do conjunto das diversas ordens (permutações) de um conjunto A com a elementos é $2^{a \cdot a}$. Pois (A, A) , que tem cardinalidade $a \cdot a = a^2$, é o conjunto de todos os pares (a, b) de iguais ou distintos elementos de A ; e o conjunto ordenado P (permutações) é um subconjunto de (A, A) . Existem $2^{a \cdot a}$ subconjuntos de (A, A) e assim no máximo $2^{a \cdot a}$ conjuntos ordenados, ou distintas ordens de P .

Por exemplo, para um conjunto finito de n elementos, o número de ordens distintas é:

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n < 2^{n \cdot n}$$

Todo tipo α tem um número cardinal definido a . Os vários tipos de cardinalidade a formam a classe de tipos $T(a)$; para obter esta classe, precisamos somente ordenar um conjunto fixo A de cardinalidade a de todos os modos possíveis, onde ordenações diferentes, claro, não necessariamente nos dão tipos distintos.

A classe dos tipos de cardinalidade finita $T(n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ sempre contém somente um tipo n . Mas os tipos pertencentes a $T(\aleph_0)$ nós já conhecemos uma quantidade infinita, a saber, ω , $\omega + 1$, $\omega + 2$, ..., $\omega + \omega$, ω^* , η entre outros. Os tipos $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$ e $\{2, 1, 3, 4, \dots\}$ por exemplo, são iguais a ω .

Como visto acima, existem no máximo $2^{\aleph_0 \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \aleph$ tipos contáveis distintos, isto é, $\overline{T(\aleph_0)} \leq \aleph = c$.

Por outro lado, seja $\xi = \omega^* + \omega$ o tipo ordenado $\{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ dos inteiros em sua ordem natural, e considere $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ uma seqüência de números naturais, e tome $\alpha = a_1 + \xi + a_2 + \xi + a_3 + \xi + \dots$ um tipo, obviamente contável, determinado pela seqüência $\mathbf{a}$. Se nós pudermos mostrar que α , um de cada vez, determina a seqüência $\mathbf{a}$, isto é, que existe uma correspondência biunívoca entre $\mathbf{a}$ e α , então nós provamos também que existem pelo menos $\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph = c$ tipos contáveis distintos e, pelo Teorema da Equivalência, que existem precisamente $\aleph$ deles.

Assim, nós temos que provar que se $\beta = b_1 + \xi + b_2 + \xi + b_3 + \xi + \dots$ e $\alpha = \beta$ então $a_1 = b_1$; $a_2 = b_2$;..... Isto segue da seguinte afirmação:

- i. Se $A_1 + A_2 \cong B_1 + B_2$, e se A_1 e B_1 são finitos e A_2 e B_2 não tem primeiro elemento, então $A_1 \cong B_1$ e $A_2 \cong B_2$.

Pela aplicação de similaridade, um elemento $b_1 \in B_1$ não pode ser imagem de um elemento $a_2 \in A_2$ porque b_1 tem somente uma quantidade finita de elementos que o precedem (e possivelmente nenhum), enquanto uma quantidade infinita de elementos precedem a_2 . Analogamente nenhum b_2 pode corresponder ao a_1 .

Assim, o a_1 tem que corresponder ao b_1 , e a_2 ao b_2 .

- ii. Se $A_1 + A_2 \cong B_1 + B_2$, e se A_1 e B_1 são do tipo ξ , então $A_2 \cong B_2$.

Aqui novamente, nenhum b_1 pode corresponder a um a_2 , desde que o conjunto dos elementos que precedem a_2 contém um subconjunto (A_1) sem último elemento, enquanto o conjunto dos elementos que precedem b_1 é do tipo ω^* e não tem nenhum subconjunto sem

⁵⁹ Também em FRAENKEL, p.147, 1961.

último elemento (exceto é claro o conjunto vazio). Novamente, conseqüentemente A_1 tem que ser aplicado sobre B_1 e A_2 sobre B_2 .

Por (i), conseqüentemente, segue de $a_1 + \xi + \dots = b_1 + \xi + \dots$ que:

$a_1 = b_1$; $\xi + a_2 + \xi + \dots = \xi + b_2 + \xi + \dots$, e então, por (ii), que $a_2 + \xi + \dots = b_2 + \xi + \dots$, então novamente que $a_2 = b_2$, e assim por diante.

Por exemplo, as seqüências (2, 1, 5, ...) e (1, 2, 5, ...) geram os seguintes tipos ordenados que claramente **não** são similares:

$$(a_1, a_2, \xi, a_3, \xi, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, \xi, \dots) \quad \text{e} \quad (b_1, \xi, b_2, b_3, \xi, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, \xi, \dots)$$

3.4 NOÇÕES SOBRE O INDECIDÍVEL

Inicialmente vamos definir alguns conceitos que aparecerão no texto a seguir.

Sistema formal é uma coleção finita de símbolos e regras precisas para manipulação desses símbolos, com o objetivo de formar certas combinações, chamadas **teoremas**.

Em um sistema formal, todo teorema é uma verdade, mas, em 1931, Gödel descobriu que a recíproca não é verdadeira, isto é, nem toda verdade é um teorema.

Um sistema formal é dito **consistente**, livre de contradições quando, dada uma declaração A , temos que ou A é verdadeira ou não- A é verdadeira; se ocorrer das duas serem verdadeiras dizemos que o sistema é **inconsistente**.

Um sistema formal é **completo**, quando todas as afirmações que são verdadeiras (em algum mundo imaginável) e que podem ser expressas como cadeias bem formadas do sistema, são teoremas, isto é, podem ser provadas.

Quando existirem afirmações dentro de um sistema formal que não podem ser nem provadas nem refutadas, chamaremos essas afirmações de **indecidíveis** e diremos que o sistema é **incompleto**.

O Teorema da Incompletude de Gödel para um sistema formal qualquer, grande o suficiente para conter a aritmética⁶⁰, diz o seguinte:

Existe uma declaração A em Z tal que nem A nem não-A podem ser provadas dos axiomas de Z.

A Hipótese do Contínuo é um exemplo de uma proposição indecidível: sua negação, bem como sua afirmação são compatíveis com a Teoria dos Conjuntos.

Em 1938, Kurt Gödel provou a consistência tanto do Axioma da Escolha como da Hipótese do Contínuo Generalizada, ou seja, todo modelo com os postulados usuais da teoria dos conjuntos, tem um submodelo em que ambos, o Axioma da Escolha e a Hipótese do Contínuo são verdadeiros.

Em 1963, Paul Cohen provou que a negação da Hipótese do Contínuo Generalizada pode também ser acrescentada a ZFS (Zermelo-Fraenkel-Skolem) sem trazer contradições.

Atualmente existem sistemas axiomáticos alternativos nos quais a Hipótese do Contínuo e/ou o Axioma da Escolha não são válidos. Cohen foi capaz de provar que, mesmo acrescentando o Axioma da Escolha aos axiomas de ZFS, ainda assim a Hipótese do contínuo Generalizada não poderia ser provada, o que estabelece que o Axioma da Escolha e a Hipótese do Contínuo são independentes.

As provas de Gödel e Cohen, juntas, estabelecem o que é agora conhecido como a INDEPENDÊNCIA da Hipótese do Contínuo, significando que ela ocupa um lugar semelhante

ao Axioma das Paralelas em relação à Geometria e não pode ser provada nem refutada dos axiomas da teoria dos conjuntos tida como padrão. O mesmo ocorre para o Axioma da Escolha que é tão vital para as demonstrações de Cantor que envolvem o Argumento Diagonal.

3.5 TOPOLOGIA DA RETA

A reta ou qualquer intervalo dela são os exemplos mais simples quando se pensa num espaço topológico contínuo. Para Cantor, o contínuo se caracterizava como um conjunto topologicamente perfeito e conexo.

É importante observar que o fato de um conjunto ser perfeito, e por isso, ter a potência do contínuo não significa que este conjunto seja contínuo. Esta é uma condição necessária mas não suficiente; é essencial que o conjunto seja conexo. Como já dissemos anteriormente, o Conjunto Ternário de Cantor é um exemplo de conjunto perfeito, que tem a potência do contínuo, mas não é contínuo.

Com o objetivo de mostrar que todo número cardinal tinha que ser um alef, e que nenhum conjunto poderia estar fora da coleção $\aleph$ de todos os números cardinais, era necessário mostrar que todos os conjuntos poderiam ser bem-ordenados, incluindo o contínuo. Cantor aceitava o Axioma da Escolha e o Teorema da Boa-Ordenação como dogmáticos e que, portanto, dispensavam demonstrações.

Quando, em 1904, J. König apresentou uma demonstração que a cardinalidade do contínuo não era um alef, Cantor de algum modo sentiu que Deus não permitiria que seus erros fossem revelados desta maneira.[KOVALEWSKY, G. 1950, apud DAUBEN p.248]

A seguir, um esboço de como foi a demonstração dada por König de que a potência do contínuo não é um alef [FERREIRÓS, p.459, 2004]:

⁶⁰ Contém pelo menos os números naturais e as operações de adição e multiplicação.

König demonstrou que a soma a de uma sucessão crescente de cardinais transfinitos satisfaz a desigualdade $a^{\aleph_0} > a$. Além disso, como $\aleph_{\beta+\omega} = \aleph_\beta + \aleph_{\beta+1} + \dots$ então deve cumprir a desigualdade $\aleph_{\beta+\omega}^{\aleph_0} > \aleph_{\beta+\omega}$ (1)

Continuando, König apelava para uma equação da aritmética dos cardinais transfinitos, demonstrada por Bernstein $\aleph_\alpha^{\aleph_0} = \aleph_\alpha \cdot 2^{\aleph_0}$ (2)

Supondo então que o cardinal do contínuo $c = 2^{\aleph_0}$ fosse um alef, digamos $c = \aleph_\beta$, poderíamos substituir na equação (2) $\aleph_\alpha$ por $\aleph_{\beta+\omega}$ e obtermos:

$\aleph_{\beta+\omega}^{\aleph_0} = \aleph_{\beta+\omega} \cdot 2^{\aleph_0} = \aleph_{\beta+\omega} \cdot \aleph_\beta = \aleph_{\beta+\omega}$ que contradiz o resultado (1) de König. Portanto, conclui ele, o suposto cantoriano de que o cardinal do contínuo é um alef resulta contraditório.

Rapidamente, provou-se que havia um erro nesta demonstração, baseado no que Gerhard Kowalewsky, que apresentou a sessão onde König leu seu artigo, Dauben, afirmando que Zermelo encontrou o erro no dia seguinte ao da Conferência, escreveu: Menos de um dia depois do fato, Zermelo demonstrou que König usou o resultado de Bernstein de maneira imprópria. [DAUBEN, p.249, 1990]

Além disso, Ferreirós [2004] afirma que, segundo Purkert [2002], Hausdorff mandou uma carta a Hilbert, datada com o dia 29 de setembro de 1904, onde chega à conclusão de que o erro na demonstração de König estava na tese de Bernstein, já que sua equação, demonstrada por indução transfinita, provavelmente não era válida para ordinais limite. E este era precisamente o caso que König aplicava ao resultado, já que ele substitui $\aleph_\alpha$ por $\aleph_{\beta+\omega}$, em que o índice ω designa um ordinal limite.

Considerando que o erro na demonstração de König foi descoberto antes do término do Congresso, a versão impressa da conferência de König conclui somente que $2^{\aleph_0}$ não pode ser

igual a qualquer $\aleph_{\beta+\omega}$ e provisoriamente, se a fórmula de Bernstein é correta para ordinais limite então $2^{\aleph_0}$ não pode ser um alef. [DAUBEN, p.247, 1990]

3.6 NOÇÕES SOBRE OS INFINITESIMAIS

Por mais paradoxal que possa parecer, Cantor se opunha à idéia de que os infinitesimais pudessem realmente existir; o seu argumento era que o conceito de infinitesimal ia de encontro ao Princípio Arquimediano, que afirma que se $a < b$ sempre existe um número natural n tal que $n.a > b$.

Apesar de Cantor pregar a ‘liberdade’ da matemática, ele foi incapaz de aceitar uma nova teoria onde tal Princípio não fosse satisfeito.

Usar os números transfinitos para justificar os infinitesimais era para Cantor, segundo Dauben, uma atitude irresponsável e, sob nenhuma circunstância, poderia ser rigorosamente justificada.

Matemáticos do século XIX inventaram um substituto técnico para os infinitesimais: a chamada teoria dos limites. Tão completo foi o triunfo dos limites que alguns matemáticos falaram do banimento dos infinitésimos em sua disciplina.

Em 1960, entretanto, o “fantasma” dos infinitesimais dominou o caminho dos matemáticos e tornou-se completamente real, graças ao trabalho do lógico Abraham Robinson da Universidade de Yale⁶¹. Desde então, vários métodos têm se juntado ao método de Robinson que faz uso dos infinitesimais.

Edward Nelson da Universidade de Princeton criou um tipo de análise não-standard conhecida pelo nome de TEORIA INTERNA DOS CONJUNTOS (IST). Nelson adotou um novo significado para definir infinitesimais. Ele acrescentou três axiomas ao conjunto dos axiomas já existentes na maioria dos sistemas matemáticos como, por exemplo, o de Zermelo-Fraenkel. Com esses axiomas, ele

⁶¹ Para mais detalhes consultar o artigo *Non standard Analysis* escrito por Martin Davis e Reuben Hersh; Scientific American, Junho de 1972.

introduz um novo termo, *standard* e não é surpresa nenhuma que os infinitesimais estejam na categoria dos *não-standard*.

Nelson define um infinitesimal como um número que fica entre zero e qualquer número *standard* positivo, tão pequeno quanto possamos conceber, ou seja, $0 < x < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$.

É fato que dois números concretos (números que expressam uma quantidade) não podem diferir por um infinitésimo. A consequência disso é que ambos os extremos de um intervalo infinitesimal não podem ser nomeados por números concretos, logo um intervalo infinitesimal não pode ser “capturado” através de uma medida. Os infinitesimais permanecem além do alcance da observação.

Dessa discussão travada, vimos claramente que pontos do espaço ou tempo marcados com números concretos são pontos isolados. Uma trajetória e seu intervalo de tempo associado são, de fato, densamente envolvidos por regiões infinitesimais.

Semelhante ao Teorema de Bolzano-Weierstrass, temos o seguinte resultado na análise não-standard: “todo conjunto infinito limitado possui um número não-standard”. Isso significa que uma sequência infinita convergente de números arrasta junto de si um membro desta sequência que está dentro dos limites de uma distância infinitesimal. Neste ponto, todos os que se sucedem serão números não-standard agrupados.[McLAUGHLIN, 1994]

4 NÚMEROS TRANSFINITOS: INVENÇÃO OU DESCOBERTA?

Os números são criações livres do espírito humano.
Dedekind [1872]

4.1 CRIAÇÃO NO CAMPO DA MATEMÁTICA

Há pessoas que pensam que os objetos matemáticos, não só da geometria, mas também da aritmética, tenham existência própria e ao matemático cabe simplesmente descobrir os seus segredos. A essa Escola filosófica em que os objetos matemáticos ‘existem’ sem necessidade do Homem dá-se o nome de Realismo (Platonismo). Inspirados na filosofia de Platão, as pessoas que aceitam essa corrente de pensamento consideram as entidades matemáticas como ideais, independentes do espaço e tempo físicos, são eternas, imutáveis e universais. As verdades matemáticas são certas e necessárias, independem do mundo sensível, que se mostra como o inverso, incerto e relativo. Deste modo as entidades ideais matemáticas são reais e precisam ser descobertas.

Um exemplo que podemos citar para esclarecer o ponto de vista platônico é o de Hermite, quando afirma que acredita que os números e funções da análise não são produtos arbitrários de nosso espírito; ele acredita que eles existam fora de nós com o mesmo caráter de necessidade dos objetos da realidade objetiva; nós os descobrimos e os estudamos como fazem os físicos, químicos e zoólogos. Hermite diz: “Parece-me que os inteiros têm uma existência fora de nós mesmos, que se impõe com a mesma necessidade predeterminada como o sódio ou o potássio”.⁶²

Podemos dar outros exemplos de grandes descobertas: os números irracionais como o **pi**, representado pela letra grega π , e o número **neperiano** representado pela letra **e**, que definem

⁶² It seems to me that the integers have an existence outside ourselves which they impose with the some predetermined necessity as sodium or potassium.[WALLACE, p. 62, 2003]

respectivamente a razão entre o perímetro e o diâmetro de uma circunferência e o $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$;

na geometria, o famoso **Teorema de Pitágoras** que diz que a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa e o **Teorema Angular de Tales** o qual afirma que a soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é 180° . Em um livro sobre fractais o próprio Benoit **Mandelbroit** (1924 -) relata que não esperava encontrar tantas propriedades que o fractal criado por ele apresentou.

O mesmo aconteceu com os números transfinitos de Cantor que independente da sua vontade, encerravam verdades de que ele próprio duvidava, como a indicada na igualdade $\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{m}$, que pode ser interpretada como a descoberta que a linha e o plano têm a mesma cardinalidade: “Absurda questão, declararam os matemáticos berlinenses, pois duas variáveis independentes não podem se reduzir a uma”. [CAVAILLÈS, p.52, 1938] Este exemplo nos mostra como a intuição, aqui no sentido usual, como um conhecimento imediato e claro, sem recorrer ao raciocínio, nem sempre é boa conselheira.

Retomando o tópico acerca do realismo das entidades matemáticas, o oposto a isso é também defendido. Existem pessoas que consideram que a Matemática, na realidade, trabalha com modelos que o **homem cria** para interpretar o que está a sua volta e, para isso, lança mão dos sistemas formais⁶³ com seus axiomas e regras, não representativos de uma realidade ideal. Deste modo, o Teorema Angular de Tales deixa de ser válido nas geometrias não-euclidianas⁶⁴, por exemplo.

Os adeptos dessa Escola Filosófica denominam-se **construtivistas**. Eles pensam as estruturas matemáticas como obra do Homem e, desta maneira, sua existência depende da nossa

⁶³ Ver seção 3.4.

para existirem. Assim, números, conjuntos, polígonos podem ser comparados a um unicórnio ou a uma sereia, por exemplo.

Em geral, um sistema axiomático pode ser interpretado de várias maneiras, ou seja, por vários modelos. É o que acontece nos modelos de Klein e Poincaré para a geometria hiperbólica⁶⁵.

Um sistema formal é chamado categórico (monomórfico) se tem um modelo e, além disso, todos os seus modelos são isomórficos um com o outro, isto é, se existe uma correspondência biunívoca entre os universos de quaisquer dois modelos tal que todas as relações e operações são preservadas.

Quando se constrói um sistema formal, devem-se levar em conta argumentos físicos e psicológicos na escolha dos axiomas; o que pode ser um bom modelo em um certo momento pode ser um mau modelo em outro momento. A maneira como entendemos o mundo vai ser o fator determinante para a escolha de um certo sistema axiomático que vai nos dar um modelo que se adapte a esta visão de mundo. Por exemplo, se a Terra fosse realmente plana como se pensava antigamente, a geometria euclidiana seria um modelo perfeito para estudá-la.

Conjeturas como o Axioma da Escolha e a Hipótese do Contínuo podem ser verdadeiras ou não, cada uma formando um modelo matemático distinto que pode ou não estar de acordo com o que nós chamamos de mundo sensível ou concreto.

Considerando o dito anteriormente, não se pode, entretanto, prescindir da consistência nas construções de modelos e interpretações. Vale citar:

Seria exagero, porém, supor que o matemático estaria completamente liberto de restrições em sua atividade. Não se pode comparar o matemático à Divindade criadora, tal como descrito pelos

⁶⁴ Geometrias em que o Quinto Postulado de Euclides, que afirma que para toda reta l e todo ponto P que não está sobre l existe uma única reta m passando por P e paralela a l , não é satisfeito. Dizemos que duas retas são paralelas se elas não tem ponto em comum.[GREENBERG, p.19]

⁶⁵ Nesta geometria o Quinto Postulado de Euclides é substituído por: Existe uma reta l e um ponto P que não está sobre l tal que pelo menos duas retas distintas paralelas a l passam por P . [GREENBERG, p. 187]

teólogos voluntaristas, que admitem não estar Ela, submetida a quaisquer peias (tão poderosa, que poderia transformar uma prostituta numa virgem – para usar um dos clássicos exemplos). Tenha a Divindade o poder que tiver, o matemático está sujeito ao requisito da consistência, não podendo criar autocontradições. [BARKER, p.98]

4.2 IDÉIAS GERAIS SOBRE A FILOSOFIA DA MATEMÁTICA

Na virada do século XIX para o XX, alguns paradoxos como o de Burali-Forti (1897) e o paradoxo de Russell (1905) vieram abalar os fundamentos da matemática e acarretaram o desenvolvimento de algumas correntes filosóficas que estavam latentes. No seu artigo, “*Formalism 64*”, apresentado no Congresso Internacional de Lógica, Metodologia e Filosofia da Ciência realizado em Israel, no ano de 1964, Abraham **Robinson** destaca o período de 1890 até 1940, como a Idade de Ouro da Filosofia da Matemática. Ele cita como as três principais correntes filosóficas construtivistas: o intuicionismo, o formalismo e o logicismo, embora essas filosofias tenham raízes que vêm de épocas bem anteriores à Idade de Ouro.

Os **intuicionistas** eram propensos ao finitismo e somente conjuntos finitos eram admitidos como objetos legítimos de estudo. Os objetos matemáticos são entidades mentais que NÃO EXISTEM independentes de nossa habilidade de dar uma prova de sua existência em um número finito de passos. Kronecker, J. H. Poincaré e L. E. J. Brouwer são seus representantes mais ilustres. Em uma frase famosa, Kronecker afirma que “*somente os inteiros são criados por Deus; todo o resto é obra do Homem*”. Seu grande sonho era basear toda a Análise matemática nos números inteiros e racionais vistos como razão de dois inteiros.

Esta teoria valoriza os sentidos e é indutivista, podemos citar duas propriedades:

- (1) Qualquer afirmação matemática ou teorema que é mais complicado ou abstrato que a aritmética dos inteiros tem que ser explicitamente derivada, isto é, construída da aritmética dos inteiros via um número finito de passos puramente dedutivos.

(2) Somente são provas válidas na matemática aquelas que são construtivas, com o adjetivo aqui significando que a prova dá um método de encontrar, isto é, uma construção para encontrar a entidade matemática que é concebida.

Deste ponto de vista, o Teorema da Boa-Ordenação⁶⁶ não é aceito pelos construtivistas, considerando-se que ele não dá a maneira de construir esta boa-ordenação; ele apenas afirma a existência de uma boa-ordenação para todo conjunto M, o mesmo acontecendo para o Axioma da Escolha e para toda a teoria cantoriana.

Poincaré rejeitava os axiomas de Zermelo, pois eles não eram auto-evidentes e não poderia ser mostrada sua consistência. Para ele uma quantidade infinita de elementos não poderia ser concebida como um conjunto, já que sua existência era apenas potencial no sentido que os elementos iam sendo acrescentados sem fim, não podendo existir juntos. Ele escreveu no artigo intitulado *La logique de l'infini*: Eu acredito que qualquer proposição que diz respeito a coleções infinitas não pode ser intuitivamente auto-evidente. [Poincaré, *Revue de Métaphysique et de Morale*, pp.481-482, 1909, apud Moore, p.163, 1982]

Outro exemplo é a prova por absurdo (*reductio ad absurdum*) que não é considerado um procedimento válido, já que depende logicamente da Lei do Terceiro Excluído, a qual diz que toda proposição matemática é, formalmente falando, ou verdadeira ou, se não é verdadeira, então é falsa. Os construtivistas rejeitam a Lei do Terceiro Excluído como axioma formal, principalmente porque não pode ser provada construtivamente, isto é, não existe nenhum procedimento de decisão pelo qual podemos verificar para alguma proposição P quando é verdadeira ou falsa.[WALLACE, p. 225, 2003]

⁶⁶ Ver seção 3.2.11.

Os resultados do intuicionismo foram desoladores e invalidaram grande parte da matemática clássica, já que nesta abundam proposições não construtivas no sentido intuicionista.[BABINI]

Do ponto de vista da Escola Formalista, a matemática devia ser olhada como um jogo puramente formal, sem conteúdo empírico algum, em que a única exigência era que seus axiomas não levassem a inconsistências. Elimina a intuição dos fundamentos da matemática.

A matemática, da perspectiva intuicionista, assim como toda ciência que parte de fatos dados, tem que ser suficientemente coerente. No caso da ciência, podemos dizer que ela toma seu ponto de partida de um conjunto de fatos dados suficientemente coerente.

Ela toma forma, entretanto, somente organizando este conjunto de fatos. Esta organização toma lugar através do *método axiomático*, isto é, constrói-se uma estrutura lógica de conceitos de modo que relações entre os conceitos correspondam a relações entre os fatos a serem organizados. Existe uma arbitrariedade na construção de tal estrutura de conceitos: nós, entretanto, exigimos: completude, independência e consistência.[ZACH, p.412]

Mas o Teorema da Incompletude de Gödel mostrava que a consistência de um sistema formal não poderia ser provada exceto por métodos mais poderosos que aqueles do próprio sistema.

Trazer para o primeiro plano as regras operatórias e deixar em segundo plano toda interpretação concreta dos objetos submetidos a esta regra faz com que o formalismo aponte para a liberdade absoluta na eleição desta interpretação e na eliminação de todo vínculo do tipo platônico, que mantenha atadas as mentalidades matemáticas a determinados “objetos”, por ideais que sejam.

Podemos ver um exemplo disso em um dos axiomas do sistema ZF que vai de encontro à definição dada por Cantor para conjuntos⁶⁷ e que possibilita o aparecimento de alguns paradoxos:

⁶⁷ Por conjunto eu entendo, em geral, toda quantidade que pode ser pensada como um, isto é, qualquer domínio de elementos definidos que **por meio de uma lei** podem ser limitados em um todo.[CANTOR, *Grundlagen*, 1883]

Para evitar os paradoxos na Teoria dos conjuntos, Zermelo e Fraenkel rejeitaram o princípio segundo o qual a toda condição enunciável corresponde um conjunto cujos elementos são os objetos que satisfazem àquela condição. Isto possibilitou Zermelo e Fraenkel eliminarem os paradoxos de Cantor e de Russell. Estes paradoxos só aparecem se for possível admitir que exista o conjunto de todos os cardinais e o conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos. [BARKER, p.121]

Ao sistema ZF, já definido no item 3.2.2, foi acrescentado o Axioma da regularidade ou fundação, que proíbe conjuntos tais que $x \in x$, o que evita a auto-referência.

Como Devlin [p.35] chama a nossa atenção: É fundamental para a teoria dos conjuntos o conceito de ser capaz de olhar qualquer coleção de objetos como uma entidade única. Antes de formar uma coleção de objetos, aqueles objetos têm que estar “disponíveis” para nós.

O logicismo foi criado por Frege, e Bertrand Russell foi um de seus maiores representantes. Os logicistas pretendiam que todos os conceitos matemáticos básicos pudessem ser definidos mediante recursos puramente lógicos; afirmavam que para a prova de todos os teoremas, nenhum axioma além dos axiomas da lógica e nenhuma regra de inferência além daquelas aceitas na lógica seriam necessários. Grosseiramente, poderíamos dizer que as verdades matemáticas estariam contidas nas verdades lógicas, ocasionando, assim a perda da autonomia da matemática.

O “princípio do círculo vicioso” diz que um elemento, cuja definição implica a totalidade dos elementos de um conjunto, não pode pertencer a este conjunto. Este princípio obrigou Russell a desenvolver uma *Teoria dos Tipos T*. Essa teoria, ao invés de ter somente uma espécie de variável, contém uma hierarquia enumerável de níveis de variáveis. Cada variável pertence a um nível e somente um. As fórmulas têm a forma ‘... $\in$...’ ou ‘... = ...’. O nível da variável do lado esquerdo é exatamente uma unidade menor do que a variável do lado direito, isto é, $x^i \in y^j$ é uma fórmula se e somente se $j = i + 1$ e $x^i = y^j$ é uma fórmula se e somente se $i = j$. Esta teoria evita as antinomias de Russell e Cantor.

Segundo A. Robinson, no artigo já citado, os fundamentos da matemática são baseados nos seguintes pontos ou princípios:

- Totalidades infinitas não existem em qualquer sentido da palavra, isto é, realmente ou idealmente. Mais precisamente, qualquer menção de totalidades infinitas é, literalmente sem sentido.
- No entanto, continuaremos a tratar este assunto da matemática “como usual”, isto é, agiremos como se totalidades infinitas realmente existissem.

4.3 IDÉIAS DE CANTOR SOBRE A FILOSOFIA DA MATEMÁTICA

Cantor, no *Grundlagen*[(18) na lista 1.9)], seção 8, distingue dois tipos de realidade: intra-subjetiva ou imanente, de dentro para fora (*in abstracto*) – dentro do entendimento humano; transubjetiva ou transcendente, de fora para dentro (*in concreto*) – dentro do mundo físico.

Para ele, os objetos matemáticos, especialmente o conceito de número, são do primeiro tipo, enquanto que os objetos da física são do segundo tipo e podem ser vistos como uma realidade passageira, a qual tem que ser considerada como um quadro de eventos e relações do mundo fora de nosso intelecto. Estas duas espécies de realidade estão sempre unidas e esta interconexão tem seu fundamento na unidade do *Todo* ao qual nós pertencemos.

Cantor preferia usar o termo **matemática livre** ao invés de **matemática pura** e dizia o seguinte: “a matemática é plenamente livre dentro de seu desenvolvimento e conhece uma só obrigação: seus conceitos devem ser não contraditórios”. Ele usava o termo “livre” na medida que não precisava se testar a realidade de seus conceitos.

Por outro lado, no início da primeira parte do *Beiträge* [CANTOR, 1895] ele coloca três citações que mostram uma atitude completamente contrária ao que ele defendia:

“Hypotheses non fingo.”⁶⁸

⁶⁸ “Não forjo hipóteses.” Isaac Newton.

“Neque enim leges intellectui aut rebus damus ad arbitrium nostrum, sed tanquam scribæ fideles ab ipsius naturæ voce latas et prolatas excipimus et describimus.”⁶⁹

“Veniet tempus, quo ista quæ nunc latent, in lucem dies extrahat et longioris ævi diligentia.”⁷⁰

A partir das citações, podemos inferir que Cantor, era platônico, apesar de defender a liberdade de criação; chegou a afirmar que a aritmética dos transfinitos tinha que ser como ele definiu, e não de outro modo, pois ele estava a serviço de Deus e apenas servia como intermediário de seus ensinamentos.

Na biografia escrita por Fraenkel [1930] encontramos: No entanto, não podemos ignorar que existe, na obra de Cantor, um certo desequilíbrio entre as teses da “liberdade” da matemática de uma parte e o fato de os objetos matemáticos serem dados.[apud CHARRAUD, p.154, 1994]

Em relação à segunda citação, em uma carta para Mittag-Leffler, datada de 23 de dezembro de 1883, Cantor reforça sua religiosidade e crença em que os objetos matemáticos são descobertos, dizendo-se um instrumento de Deus, assim como foram Euclides e Arquimedes.

Estou longe de atribuir minhas descobertas ao mérito pessoal, porque sou somente um instrumento de uma força maior, que continuará trabalhando depois de mim, do mesmo modo que se manifestou há milhares de anos em Euclides e Arquimedes...⁷¹

4.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Em uma primeira análise, podemos ver que, de modo algum, os números transfinitos “criados” por Cantor, que trazem a idéia de um infinito completo, poderiam ser aceitos pelos intuicionistas.

⁶⁹ “Não devemos dar arbitrariamente leis ao entendimento ou às coisas, mas recebamos como escribas fiéis e copiemos estas leis reveladas pela voz da natureza”. Francis Bacon

⁷⁰ “Tempo virá onde coisas hoje ocultas a vossos olhos serão trazidas à luz.” Coríntios, I

⁷¹ I am far from attributing my discoveries to personal merit, because I am only an instrument of a higher power, which will continue to work long after me, in the same way as it manifested itself thousands of years ago in Euclid and Archimedes. ...

Somente como Cantor fez, aceitando a idéia de uma força superior, seria possível conceber uma teoria em que, por exemplo, os teoremas da Boa-Ordenação e da Escolha fossem verdadeiros.

Como podemos ler em Nascimento Júnior [p. 160]:

O princípio da boa-ordem, em Cantor, é fruto da própria perspectiva teológica que perpassa a obra de Cantor, os conjuntos, quaisquer que estes sejam, estão bem ordenados no pensamento de Deus e, mesmo que a razão humana não compreenda como se dá tal boa ordenação, ela existe desde sempre na mente divina.

Por outro lado, é difícil acreditar que a matemática esteja ligada à fé. Pensar que existe um Deus todo poderoso que criou os entes matemáticos e cabe a nós apenas desvendar os seus mistérios é algo fora de cogitação, não é o que pretendemos defender aqui a respeito das idéias de Cantor e, sobretudo, acerca da natureza da matemática.

Deste modo, nos parece que a resposta mais adequada é acreditar no formalismo de Hilbert, e fazer como Zermelo e Fraenkel, montando um sistema formal, no qual é possível, através da axiomatização da teoria dos conjuntos, iniciada em 1904, construir a teoria dos números transfinitos, mesmo sabendo que sua consistência depende de sua incompletude. Assim, enunciados como a Hipótese do Contínuo e o Axioma da Escolha podem ser considerados como verdadeiros ou não.

5 CORRELAÇÃO E ANÁLISE DAS CARTAS DE CANTOR COM SEUS ARTIGOS E ALGUNS DESDOBRAMENTOS

Nosso objetivo neste capítulo será traçar um paralelo entre as cartas que Cantor escreveu, e os artigos que ele publicou. Daremos uma ênfase maior ao período que vai de 1872 até 1878, quando Cantor publica os dois artigos que discutem sobre a distinção entre as potências do enumerável e do contínuo e a igualdade entre a potências da reta e do plano.

Por meio da análise das cartas de Cantor, que são um meio de comunicação mais pessoal, tentaremos captar o clima que predominava no momento em que foram escritas, observando a receptividade, ou não, que os matemáticos que se correspondiam com ele, tinham em aceitar suas idéias que, naquela época, eram consideradas pela maioria deles bastante revolucionárias.

No final do século XIX, a Alemanha possuía a hegemonia em relação à pesquisa matemática e Nathalie Charraud [p. 35, 1994] escreve sobre o triunvirato berlinense formado por Weierstrass, Kummer e Kronecker. Quando, em 1883, já com 73 anos, Kummer se retira da vida acadêmica, alegando problemas de saúde, a disputa entre Weierstrass, que era analista, e Kronecker, que era algebrista, se intensifica. O primeiro apoiava o trabalho de Cantor, já o segundo o rejeitava e afirmava que todo cálculo que envolvesse o infinito era sem sentido.

Para Kronecker os números irracionais (algébricos), do tipo $\sqrt{2}$, ao invés de serem vistos como limite de seqüências, eram vistos como raízes de equações com coeficientes inteiros e bastava então juntar aos corpos dos racionais, as raízes dessas equações, para se obter um novo corpo⁷². Este ponto de vista construtivista é completamente diferente da visão de Weierstrass; Kronecker defendia que tudo que dizia respeito à análise podia ser reconduzido a construções de

⁷² Conjunto munido de duas operações, chamadas *adição* e *multiplicação*, que satisfazem a certas condições, chamadas os *axiomas de corpo*, como associatividade, comutatividade, elemento neutro e simétrico (adição) e inverso (multiplicação), além do axioma da distributividade. [LIMA, p.49, 1978]

ordem finitista, com a ajuda de algoritmos; é importante observar que desse modo os números transcendentais não estão incluídos nesse novo corpo.

Ainda com a análise das cartas vamos responder à questão: será possível detectar que, independentemente das suas correspondências, Cantor teria construído com tanto sucesso sua teoria?

Durante sua vida podemos perceber que as cartas de Cantor tinham principalmente quatro objetivos. A princípio suas cartas eram familiares e normalmente endereçadas a seu pai. Algumas destas cartas foram transcritas no primeiro capítulo deste trabalho e notamos que elas levavam palavras afetuosas, de um filho que foi estudar longe de casa, para seus familiares.

Mais tarde, suas cartas tinham o objetivo de expor suas idéias para os editores de jornais matemáticos como Felix **Klein** (1849 – 1925), editor do *Mathematische Annalen*, e ajudaram a documentar a maioria do desenvolvimento matemático e filosófico que ocorreu em uma das fases mais importantes de seu trabalho. No período que vai de 1882 a 1883, eles trocaram mais de 40 cartas. Depois disso, Cantor se correspondeu com o sueco **Mittag-Leffler**, editor do *Acta Mathematica* até 1885, mais tarde com Philip **Jourdain**⁷³ (1879 – 1919) que, em 1915, escreveu uma tradução para o inglês do artigo *Beiträge*, que até então só tinha sido traduzido para o francês. No prefácio dessa tradução, Jourdain agradece a ajuda que Cantor lhe deu por meio de uma longa correspondência mantida por eles sobre teoria dos agregados ocorrida muitos anos antes.⁷⁴

O terceiro objetivo de Cantor, era expor suas idéias que ainda não estavam totalmente prontas em sua cabeça. A troca de opiniões com outros matemáticos, amigos seus, era freqüente e

⁷³ cf. em GRATTAN-GUINNESS, 1972.

⁷⁴ In these notes and in the Introduction I have been greatly helped by the information that Professor Cantor gave me in the course of a long correspondence on the theory of aggregates which we carried on many years ago. [JOURDAIN, Philip. In: CANTOR, p. vi, 1915.(27) e (28) na lista 1.9]

muito fecunda e sem dúvida o ajudava a amadurecê-las, embora não abordassem somente assuntos voltados para a matemática. Dedekind era seu correspondente principal, mas podemos ainda citar Hermann **Schwarz** (1843 – 1921), Charles **Hermite** (1822 – 1901), Kurd **Lasswitz** (1848 – 1910) e Rudolf **Lipschitz** (1832 – 1903), entre outros. Finalmente, o último grande matemático com quem Cantor se correspondeu, na década de 18(90), foi David **Hilbert** (1862 – 1943).

Em 1872, Cantor enviou para Dedekind seu artigo recém escrito *Extensão de um teorema da teoria das séries trigonométricas* [(6) da lista 1.9], em que, logo na §1, ele define números irracionais, utilizando seqüências de números racionais. Por sua vez, Dedekind também enviou seu artigo *Continuidade e números irracionais* [DEDEKIND, 1872] em que definia os números reais como cortes na reta numérica, como exposto no capítulo 2.

Cantor demonstra sua alegria em poder compartilhar suas idéias com Dedekind, como mostra uma carta de 10 de outubro de 1873, na qual ele reconhece o estímulo e ensinamento que Dedekind lhe ofereceu.

Eu vos asseguro que nada pôde me alegrar mais que o interesse que tive em despertá-lo para certas questões de análise; permita-me ainda acrescentar que nada pôde me incitar mais a prosseguir meus esforços, e deixe-me pedir para continuar no futuro a me encaminhar suas observações.⁷⁵

O quarto objetivo de Cantor foi, por meio de suas cartas com datas a partir de 1883, depois da publicação do *Grundlagen*, explicar e divulgar sua nova teoria. Entre seus correspondentes podemos citar Constantin **Gutberlet** (1837 – 1928), Cardeal Baptist **Franzelin** (1816 – 1886) e Felix **Goldscheider**.

⁷⁵ Je tiens à vous assurer que rien ne peut me réjouir plus que l'intérêt que j'ai eu le bonheur d'éveiller chez vous pour certaines questions d'analyse ; permettez-moi d'ajouter que rien ne peut aussi m'inciter davantage à poursuivre mes efforts, et laissez-moi vous prier de continuer à l'avenir à me faire parvenir vos remarque. [CHARRAUD, p.53, 1994]

Em seu artigo, escrito em 1887, *Comunicação sobre a teoria dos transfinitos* [(24) da lista 1.9], ressalta a importância de suas correspondências e publica algumas delas, muitas vezes sem fazer qualquer alteração.

Posto que tive a sorte de manter correspondência com vários sábios, que têm dedicado um interesse [amistoso] a meus trabalhos, e me têm dado a oportunidade neste caso de explicar e esclarecer o até agora publicado de uma maneira mais compreensível para todos; creio ter neste material, proveniente de um intercâmbio de pensamentos vivos, pontos de relação para ulteriores trabalhos que interessem a um público amplo. Quisera por esta razão, em primeiro lugar e a seguir, publicar várias destas cartas escritas por mim, sem efetuar trocas essenciais nelas.

Em relação aos desdobramentos citados no título desse capítulo, citaremos algumas conseqüências relativas ao Teorema de Cantor e duas demonstrações dadas para ele, diferentes da feita por Cantor. O Teorema de Cantor que vamos enunciar nesse capítulo, e que se refere à equipolência de conjuntos com dimensões distintas, não deve ser confundido com o Teorema de Cantor, citado na seção 3.2.13, que diz que o conjunto-potência de A tem sempre uma potência maior que o conjunto A .

5.1 DISCUSSÃO SOBRE A EXISTÊNCIA DE INFINITOS DIFERENTES

Como vimos no capítulo 2, a partir de 1870, Cantor começa a estudar em que condições a representação de uma função por uma série de Fourier é única. Para isso, ele precisou pesquisar como os números, que ele via como pontos pertencentes a uma reta, se distribuíam sobre esta reta.

Em uma carta datada de 29 de novembro de 1873, para Dedekind, Cantor levanta a questão da diferença entre a natureza do discreto em relação ao contínuo. Nesta época ele ainda não havia percebido que poderiam existir infinitos diferentes, mas já começava a desconfiar. Ele só obteve esta certeza quando conseguiu demonstrar que o conjunto dos números reais não podia ser colocado em correspondência biunívoca com o conjunto dos números naturais, que é

enumerável, logo o conjunto dos números reais era um conjunto infinito não-enumerável. A partir daí, podia-se afirmar que, pelo menos, dois tipos distintos de infinito poderiam ocorrer.

Vamos à carta:

Permita-me submeter uma questão que para mim tem um certo interesse teórico, mas a qual eu não posso responder; talvez você possa, e seria muito bom que me escrevesse sobre este assunto. Veja do que se trata.

Tome a coleção de todos os números inteiros positivos n e os denote por (n) ; então considere a coleção de todos os números reais x e denote por (x) ; a questão é simplesmente quando (n) e (x) podem se corresponder tal que cada elemento de uma coleção corresponda a um e somente um da outra? A primeira vista podemos dizer que não é possível, pois (n) consiste de partes discretas enquanto (x) forma um contínuo; mas nada se ganha com esta objeção, e estou muito inclinado a pensar que (n) e (x) não permitem tal correspondência unívoca; eu não posso encontrar a razão e, enquanto eu me preocupo com ela, a razão pode ser bem mais simples.

Não seremos também tentados a concluir a primeira vista que (n) não pode ser colocado em correspondência unívoca com o conjunto $\left(\frac{p}{q}\right)$ de todos os números racionais $\frac{p}{q}$? E, no entanto, não é difícil de mostrar que (n) pode ser colocado em correspondência unívoca, não somente com este conjunto, mas também com o conjunto mais geral:

$$\left(a_{n_1, n_2, \dots, n_v}\right)$$

$n_1, n_2, \dots, n_v$ sendo índices inteiros positivos ilimitados em qualquer quantidade v . (cf. anexo)

Em geral, a intuição sobre qualquer coisa que diga respeito ao infinito não é uma boa conselheira. Mas, pelo menos desta vez, a intuição de Cantor estava certa quando ele afirmava que não seria possível achar uma relação biunívoca entre os naturais e os reais.

Analisando esta carta, percebemos que a demonstração da enumerabilidade dos racionais, ou mais geralmente ainda, a enumerabilidade de qualquer conjunto com um número finito de coordenadas, já estava clara em sua mente quando ele escreve:

não é difícil de mostrar que (n) pode ser colocado em correspondência unívoca, não somente com este conjunto, mas também com o conjunto mais geral:

$$\left(a_{n_1, n_2, \dots, n_v}\right)$$

$n_1, n_2, \dots, n_v$ sendo índices inteiros positivos ilimitados em qualquer quantidade v .

Cantor usou o termo ‘ilimitado’ significando que v pode ser *tão grande quanto se queira*, desde que em quantidade finita.

Apesar de o conjunto dos racionais ser denso no conjunto dos reais, isto é, qualquer intervalo da reta por menor que seja sempre conter números racionais, este fato, a densidade, não era uma condição suficiente para caracterizar o contínuo pois apesar disso, existiam “buracos” entre os números racionais como previra Cantor. Mais do que isso, nesta época, apesar de totalmente contra a intuição, Cantor/Dedekind demonstraram que além dos racionais, o conjunto dos números algébricos também era enumerável.

Se Cantor conseguisse mostrar que não existia relação biunívoca entre os algébricos e os reais, isto é, que o conjunto dos números reais é não-enumerável, ele teria uma prova inédita do Teorema de Liouville sobre a existência de infinitos números transcendentos. Vejamos: se não existe relação biunívoca entre os algébricos e os reais, então o conjunto dos reais, que é união dos algébricos com os transcendentos, é não-enumerável, logo se conclui que os números transcendentos é que fazem o conjunto dos números reais ser não-enumerável. Ou seja, o conjunto dos números transcendentos é mais rico em pontos do que o conjunto dos números algébricos.

Na linguagem atual de conjuntos, considerando A o conjunto dos números algébricos e T o conjunto dos números transcendentos temos: $\mathbb{R} = A \cup T$. Se o conjunto T fosse enumerável, isso acarretaria a enumerabilidade dos reais, pois a união de dois conjuntos enumeráveis ainda forma um conjunto enumerável, logo o conjunto T tem que ser não-enumerável.

Carta em que Cantor menciona a sua demonstração da enumerabilidade dos números algébricos:

Halle, 2 de dezembro de 1873

Estou particularmente feliz de receber hoje sua resposta a minha última carta. Se te submeti minha questão, é porque já me fiz esta aqui há vários anos e estou sempre me perguntando se a dificuldade que eu encontrei era de natureza subjetiva ou se ela é problemática por si mesma. Já que você me diz estar, também incapaz de responder, eu posso supor que a segunda opção é a exata. – De resto, eu queria acrescentar que eu não estou ocupado seriamente, porque ela não tem interesse prático particular para mim, e eu estou de acordo com sua opinião, quando você diz que por esta razão ela não merece que nos esforcemos. No entanto, seria interessante se nós pudéssemos respondê-la; se, por exemplo, a resposta fosse *negativa*, disporíamos com isso de uma nova demonstração do teorema de Liouville, afirmando a existência de números transcendentos.

Sua demonstração que (n) pode ser colocado em correspondência unívoca com os corpos dos números algébricos é quase a mesma que aquela na qual eu provei minha afirmação, contida na minha última carta. Eu coloquei $n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_\nu^2 = N$ e ordenei em seguida os elementos.

Não seria bom e cômodo que, como você bem fez sobressair, pudéssemos falar do enésimo número algébrico, de tal maneira que cada um deles figure uma vez dentro da sequência?

Como você observou exatamente, nossa questão pode ser formulada como segue: “Podemos colocar (n) em correspondência unívoca com um conjunto

$$(a_{n_1, n_2, \dots}),$$

$n_1, n_2, \dots$ sendo índices inteiros positivos ilimitados, em número infinito?” (cf. anexo)

Ao que tudo indica, esta carta de Dedekind na qual ele faz essa importante observação está perdida. A questão de colocar (n) em correspondência unívoca com um conjunto $(a_{n_1, n_2, \dots})$ é a mesma de fazer uma correspondência entre os naturais e as frações contínuas infinitas, que representam os números irracionais, que era o problema proposto por Cantor com uma interpretação diferente.

Poucos dias depois da primeira carta, em 7 de dezembro de 1873, Cantor envia para Dedekind sua primeira demonstração de que não era possível encontrar nenhuma correspondência biunívoca entre $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$. Cantor usa a idéia sugerida por Dedekind, nesta carta desaparecida citada acima, que o problema da bijeção entre os naturais e os reais podia se resumir ao problema entre a bijeção de $\mathbb{N}^*$ e o conjunto dos números irracionais, $a_{n_1, n_2, \dots, n_k, \dots}$ onde $n_i \in \mathbb{N}^*$.

Halle, 7 de dezembro de 1873

Estes últimos dias tive tempo de estudar, de uma maneira mais seguida, minha conjectura da qual lhe falei; apenas hoje terminei, me parece, com este assunto. Se devia no entanto me enganar, não encontraria certamente juiz mais indulgente que você. Tomo, por conseguinte, a liberdade de apresentar ao seu julgamento o que deitei sobre o papel, em toda a imperfeição deste primeiro jorro.

Suponhamos que nós possamos arrumar todos os números positivos $\omega < 1$ em uma seqüência:

$$(I) \quad \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n, \dots$$

Após ω_1 seja ω_α o primeiro termo maior, após este seja ω_β o primeiro termo maior, e assim sucessivamente. Coloquemos: $\omega_1 = \omega_1^1$, $\omega_\alpha = \omega_1^2$, $\omega_\beta = \omega_1^3$, etc..., e extraíamos de (I) a seqüência infinita:

$$\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \dots, \omega_1^n, \dots$$

Na seqüência restante, seja ω_2^1 o primeiro termo, ω_2^2 o primeiro termo depois de ω_2^1 que seja maior, etc... e extraíamos a segunda seqüência:

$$\omega_2^1, \omega_2^2, \omega_2^3, \dots, \omega_2^n, \dots$$

Continuando assim, reconhecemos que a seqüência (I) pode ser decomposta em uma infinidade de seqüências:

$$(1) \quad \omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \dots, \omega_1^n, \dots$$

$$(2) \quad \omega_2^1, \omega_2^2, \omega_2^3, \dots, \omega_2^n, \dots$$

$$(3) \quad \omega_3^1, \omega_3^2, \omega_3^3, \dots, \omega_3^n, \dots$$

mas, em cada uma delas, os termos crescem da esquerda para a direita, temos então:

$$\omega_k^\lambda < \omega_k^{\lambda+1}$$

Escolhamos agora um intervalo $(p \dots q)$ de modo que nenhum elemento da seqüência (1) esteja contida; podemos, por exemplo, tomar $(p \dots q)$ no interior do intervalo $(\omega_1^1 \dots \omega_1^2)$; pode ser então que todos os termos da segunda seqüência, ou terceira, se encontrem no exterior de $(p \dots q)$; mas é necessário que haja uma primeira seqüência, digamos a k -ésima, cujos termos não se encontrem todos fora de $(p \dots q)$; (porque se não, os números que se encontram dentro de $(p \dots q)$ não estariam contidos em (I), contrariamente à hipótese); pode-se então determinar, no interior de $(p \dots q)$, um intervalo $(p' \dots q')$ tal que os termos da k -ésima seqüência sejam todos no exterior deste intervalo.; $(p' \dots q')$ se comporta evidentemente da mesma maneira relativamente às seqüências precedentes; mas entre as seguintes, chegará uma k' -ésima seqüência cujos termos não são todos exteriores de $(p' \dots q')$, e nós escolheremos então, no interior de $(p' \dots q')$, um terceiro intervalo $(p'' \dots q'')$ tal que todos os elementos da k' -ésima seqüência se encontrem no exterior deste intervalo.

Vemos assim que é possível formar uma seqüência infinita de intervalos:

$$(p \dots q), (p' \dots q'), (p'' \dots q''), \dots$$

onde cada um contém os seguintes; estes intervalos relativamente a nossas seqüências (1), (2), (3),..., se comportam como segue:

Os termos da 1^a, da 2^a, ..., da $(k-1)$ -ésima seqüência estão no exterior de $(p \dots q)$.

Os termos da k -ésima, ..., da $(k'-1)$ -ésima seqüência estão no exterior de $(p' \dots q')$.

Os termos da k' -ésima, ... , da $(k'' - 1)$ -ésima seqüência estão no exterior de $(p''...q'')$.

Mas existe sempre *ao menos* um número, que chamarei η que se encontra no interior de todos estes intervalos; vemos imediatamente que este número η , que é evidentemente > 0 e < 1 , não pode pertencer a nenhuma das seqüências (1), (2), ..., (n), ... Assim, partindo da hipótese que todos os números > 0 e < 1 estão contidos em (I), nós chegamos a este resultado oposto, que um número determinado $0 < \eta < 1$ não pertence a (I): em consequência, esta hipótese é incorreta.

Eu acredito então ter finalmente chegado à razão pela qual o conjunto chamado (x) em minha carta anterior, não pode ser colocado em correspondência unívoca com aquele designado por (n). (cf. anexo)

Dois dias depois, Cantor escreve uma nova carta a Dedekind dizendo que havia encontrado uma demonstração mais simples, sem a necessidade de decompor a seqüência (I) em subseqüências, e, partindo diretamente de $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n, \dots$, poderia determinar, em todo intervalo $(\alpha, \dots, \beta)$, um número η que não pertenceria a (I).

Halle, 9 de dezembro de 1873

Eu já encontrei para o teorema provado recentemente, uma demonstração simplificada, para a qual não há necessidade de decompor a seqüência (I) em (1), (2), (3). Eu mostro diretamente que, a partir de uma seqüência

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots,$$

eu posso determinar, em *todo* intervalo dado $(\alpha... \beta)$ um número η que não pertence a (I). Isto é suficiente para deduzir que o conjunto (x) não pode ser posto em correspondência unívoca com o conjunto (n), e eu concluo que existe, entre os sistemas e conjuntos de valores, diferenças essenciais, que não sabia até recentemente sondar as causas. Peço agora desculpas por ter tomado tanto seu tempo com este assunto. (cf. anexo)

Apesar de Cantor ter feito uma demonstração mais simplificada em seu artigo, parece que ele se baseou nas idéias expostas por Dedekind, em sua carta do dia 8 de dezembro. O que se tem de concreto é que Dedekind escreve em suas anotações⁷⁶ o seguinte sobre a carta enviada em 7 de dezembro:

Cantor me comunicou uma demonstração rigorosa, que ele encontrou no mesmo dia, do teorema seguinte no qual o conjunto dos números positivos $\omega < 1$ *não pode* ser posto em correspondência unívoca com o conjunto (n).

Respondo no mesmo dia a esta carta, recebida em 8 de dezembro, felicitando-o por este bonito sucesso, “refletindo” ao mesmo tempo, sob uma forma mais simplificada, sobre a parte essencial da sua demonstração (que estava ainda bem complicada); esta apresentação foi transcrita, quase

⁷⁶ Pierre Dugac dá a entender que Dedekind começou a escrever estes comentários sobre suas cartas com Cantor, depois que ele viu suas pesquisas, opiniões e sugestões utilizadas por Cantor sem que este mencionasse seu nome. [DUGAC, p.116]

palavra por palavra, no artigo de Cantor (*Crelle*, tomo 77); no entanto, a expressão empregada por mim “segundo o princípio de continuidade” foi evitada onde ela se encontrava!⁷⁷

Cantor só acusou o recebimento desta carta no dia 10, pois em relação à carta do dia 9 de dezembro, Dedekind escreveu, em suas anotações, que Cantor diz que encontrou uma demonstração mais simplificada do teorema demonstrado no dia 7 e não mencionou ter recebido sua carta do dia 8. Dedekind ainda comentou que Cantor, na sua carta do dia 10, agradeceu o seu interesse pelo assunto, mas não mencionou a apresentação simplificada que ele tinha encontrado.

Parece-nos, então, que Cantor usou as idéias de Dedekind, tanto na demonstração sobre a enumerabilidade do conjunto formado pelos números algébricos, como na segunda parte de seu trabalho, em que ele demonstra a não-enumerabilidade do conjunto dos números reais, segundo Dedekind, copiando “palavra por palavra” o que ele havia escrito, com exceção da expressão “segundo o princípio da continuidade”.

Apesar de Cantor não ter pressa em publicar seu artigo, ele mostra sua demonstração para Weierstrass que o incentiva a publicar o resultado, mas o aconselha a suprimir, do seu artigo, a observação sobre a diferença da natureza (*Wesensunterschied*) entre o conjunto dos números naturais e o conjunto dos números reais; natureza aí entendida no sentido da enumerabilidade ou não de seus elementos.

Berlim, 25 de dezembro de 1873

Embora não tivesse a intenção de publicar no momento a questão que recentemente debati com você pela primeira vez, fui conduzido de repente a fazê-lo. Com efeito, comuniquei os meus resultados no dia 22 ao Sr. Weierstrass: mas faltou tempo para falar de maneira precisa; tive, a partir do dia 23, a grande alegria de receber a sua visita, o que me permitiu comunicar-lhe as demonstrações; sua opinião foi a de que era necessário que publicasse sobre este assunto, o que se refere aos números algébricos. Por conseguinte escrevi um pequeno artigo sob o título: *Sobre uma*

⁷⁷ Cantor me communique une démonstration rigoureuse, qu'il a trouvée le même jour, du théorème suivant lequel l'ensemble de tous les nombres positifs $\omega < 1$ ne peut pas être mis en correspondance univoque avec l'ensemble (n). Je réponds le même jour à cette lettre, reçue le 8 décembre, en le félicitant pour ce beau succès, tout en « réfléchissant », sous une forme très simplifiée, la partie essentielle de sa démonstration (qui était encore bien compliquée); cette présentation a été transcrite, presque mot pour mot, dans l'article de Cantor (*Crelle*, tomo 77); toutefois, l'expression employé par moi « d'après le principe de continuité » a été évitée là où elle se trouvait! [CAVAILLÈS, p. 195, 1962]

propriedade do conjunto dos números algébricos reais, e dirigi-o ao professor Borchardt, de modo que considerasse a publicação no *Jornal f. Math.* Para a redação deste artigo, as vossas observações e o vosso modo de expressão foram-me, como verás, muito úteis. Isto é o que quis comunicar-vos. (cf. anexo)

Logo depois, como citado na carta acima, ele publica no *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 77, conhecido como *Jornal de Borchardt*⁷⁸, nome de seu editor na época, um artigo com a demonstração e um título nada apropriado: *Sobre uma propriedade do conjunto de todos os números algébricos reais*. [(7) na lista 1.9]

Segundo Dauben, Cantor “camuflou” o título de seu artigo, que poderia ser “O conjunto dos números reais é infinito não-enumerável” ou “Uma nova e independente prova da existência dos números transcendentais”, tentando fugir da reação negativa que ele sabia que causaria a Kronecker. Só para se ter uma idéia de como Cantor estava certo em relação a Kronecker, quando Lindemann, em 1882, estabeleceu a transcendência de π , Kronecker comentou que este resultado não tinha valor, já que números irracionais não existem.

Em 1883 saiu, no *Acta Mathematica* 2, uma tradução para o francês de uma coletânea de artigos de Cantor redigida, por um grupo de matemáticos e aceita por ele. Além deste artigo de 1874 sobre números algébricos, este volume do *Acta Mathematica* ainda incluiu os dois artigos sobre séries trigonométricas, de 1872, os primeiros quatro artigos sobre conjuntos de pontos lineares além do *Grundlagen* (quinto artigo da série que trata dos conjuntos de pontos lineares) e do artigo que vamos analisar a seguir sobre a potência de espaços com diferentes dimensões com o título, *Uma contribuição à teoria dos conjuntos*, escrito em 1877.

⁷⁸ Publicação matemática de caráter periódico de maior prestígio naquela época.

Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen.

(Von Herrn Cantor in Halle a. S.)

Unter einer reellen algebraischen Zahl wird allgemein eine reelle Zahlgrösse ω verstanden, welche einer nicht identischen Gleichung von der Form genügt:

$$(1.) \quad a_n \omega^n + a_{n-1} \omega^{n-1} + \dots + a_0 = 0,$$

wo $n, a_0, a_1, \dots, a_n$ ganze Zahlen sind; wir können uns hierbei die Zahlen n und a_n positiv, die Coefficienten $a_0, a_1, \dots, a_n$ ohne gemeinschaftlichen Theiler und die Gleichung (1.) irreductibel denken; mit diesen Festsetzungen wird erreicht, dass nach den bekannten Grundsätzen der Arithmetik und Algebra die Gleichung (1.), welcher eine reelle algebraische Zahl genügt, eine völlig bestimmte ist; umgekehrt gehören bekanntlich zu einer Gleichung von der Form (1.) höchstens soviel reelle algebraische Zahlen ω , welche ihr genügen, als ihr Grad n angiebt. Die reellen algebraischen Zahlen bilden in ihrer Gesamtheit einen Inbegriff von Zahlgrössen, welcher mit (ω) bezeichnet werde; es hat derselbe, wie aus einfachen Betrachtungen hervorgeht, eine solche Beschaffenheit, dass in jeder Nähe irgend einer gedachten Zahl α unendlich viele Zahlen aus (ω) liegen; um so auffallender dürfte daher für den ersten Anblick die Bemerkung sein, dass man den Inbegriff (ω) dem Inbegriffe aller ganzen positiven Zahlen ν , welcher durch das Zeichen (ν) angedeutet werde, eindeutig zuordnen kann, so dass zu jeder algebraischen Zahl ω eine bestimmte ganze positive Zahl ν und umgekehrt zu jeder positiven ganzen Zahl ν eine völlig bestimmte reelle algebraische Zahl ω gehört, dass also, um mit anderen Worten dasselbe zu bezeichnen, der Inbegriff (ω) in der Form einer unendlichen gesetzmässigen Reihe:

$$(2.) \quad \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_\nu, \dots$$

Ilustração 6: Primeira página do artigo citado, no original, em alemão, disponível em <<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Bookpages/Cantor10b.gif>>

A nova teoria criada por Cantor, nesta época, ainda era recebida pelos matemáticos berlinenses com reserva, daí o conselho de Weierstrass para que Cantor não desse muita ênfase ao resultado principal de seu artigo sobre a diferença entre os naturais e os reais.

Este fato pode ser observado num registro feito por Cantor em uma carta para Dedekind, de onde transcrevemos um trecho abaixo:

Berlim, 27 de dezembro de 1873

Se dei, para a publicação, um caráter restrito à minha exposição, isso é fundamentado, em parte, pelas condições reinantes aqui, e das quais te falarei talvez um dia de viva voz;⁷⁹

Dedekind comenta em suas anotações que nunca ficou claro para ele sobre as “condições berlinenses” a que Cantor se referiu.

5.1.1 Demonstração da enumerabilidade do conjunto dos números algébricos

Cantor começa seu artigo definindo o que são os números algébricos reais e os designa por (ω) e demonstra na §1 que eles formam um conjunto enumerável, isto é, um conjunto em que seus elementos podem ser escritos como uma seqüência infinita do tipo $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_v, \dots$. A seguir demonstra que o conjunto dos números algébricos é enumerável, logo possui a potência $\aleph_0$.

Seja a equação irredutível, não identicamente nula,

$$a_n \omega^n + a_{n-1} \omega^{n-1} + \dots + a_1 \omega + a_0 = 0.$$

Vamos supor, sem perda de generalidade, que $a_i \in \mathbb{Z}$ para $0 \leq i \leq n$ é verificada para o número algébrico ω . Definimos a “altura” de ω , como o número positivo:

$$N = n - 1 + |a_n| + |a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|.$$

A altura é obviamente um número inteiro ≥ 1 . Apenas um número finito de polinômios possui a mesma altura pois $n \leq N$ e todo $|a_k| \leq N$. Reciprocamente, a um número inteiro positivo

⁷⁹ Berlin, le 27 décembre 1873

Si j'ai donné, pour la publication, un caractère restreint à mon exposé, cela est en partie motivé par les conditions régnant ici, et dont je vous parlerai peut-être un jour de vive voix ;[CAVAILLÈS, p. 193, 1962]

dado N , corresponde somente uma quantidade finita de números algébricos reais tendo por altura N .

Deste modo, aumentando a altura segundo a seqüência dos números naturais, e escrevendo as raízes novas, elas correspondem a uma quantidade finita de números algébricos distintos. Como todo polinômio tem uma altura, todo número algébrico aparece na seqüência. E isto completa a prova.

Nas anotações feitas por Dedekind sobre sua correspondência com Cantor, em relação à carta de 29 de novembro de 1873, ele escreve o seguinte:

Eu respondi a carta, que não sabia decidir sobre a primeira questão, mas ao mesmo tempo formulei e demonstrei completamente que mesmo o conjunto de todos os números algébricos, pode ser colocado em correspondência da maneira indicada com o conjunto (n) dos números naturais (pouco tempo depois, este teorema e sua demonstração foram reproduzidos quase literalmente, incluindo o termo técnico “altura”, no artigo de Cantor publicado no *Jornal de Crelle*, volume 77, mas com a diferença mantida, apesar de meu conselho, de que somente o conjunto de todos os números algébricos *reais* é levado em consideração). Mas a opinião formulada por mim que a primeira questão não merecia que se empregasse muito esforço, porque ela não tinha nenhum interesse prático particular, foi refutado de forma flagrante com a demonstração que Cantor deu da existência de números transcendentos (*Crelle*, volume 77).

Como já mencionamos anteriormente, esse período foi marcado por algumas dúvidas que pairam sobre quem realmente demonstrou que os números algébricos formam um conjunto enumerável. Apesar de ter sido Cantor quem publicou esta demonstração, segundo as anotações feitas por Dedekind foi ele na realidade quem a escreveu. Ao que tudo indica, Cantor fez uma demonstração muito parecida, concomitante com a de Dedekind, mas que continha um “erro”. Com o objetivo de ordenar as n -uplas $(n_1; n_2; \dots; n_v)$, Cantor⁸⁰, ao invés de trabalhar com os valores absolutos dos coeficientes a_i , considerou o número $N = n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_v^2$, em que os n_i são os coeficientes inteiros da equação irredutível considerada; no caso de alguns n_i serem nulos, o

⁸⁰ Uma pequena parte desta demonstração esta na carta de Cantor, com a data de 2 de dezembro de 1873, em que ele a menciona.

método de Cantor falha em indicar quantos zeros existem. Isso significa que, para cada N escolhido, existe uma quantidade infinita de n -uplas, e assim o método da enumeração de Cantor falha. Por exemplo: Para $N = 2$, podemos ter $(1, 1)$, $(1, -1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 0)$, ou ainda $(1, 0, -1, 0, 0)$ e assim indefinidamente, com a quantidade de zeros que quisermos. Essas n -uplas representam as equações $x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$, $x^2 + x = 0$, $x^3 + x^2 = 0$ e $x^4 - x^2 = 0$, respectivamente.

A falha era certamente fácil de superar, mas ao mesmo tempo a prova de Dedekind era mais direta, desde que produzia diretamente uma enumeração dos polinômios. Esta poderia ter sido a razão pela qual Cantor a preferiu para sua publicação.⁸¹

Na prova dada por Dedekind, ele limita o grau n do polinômio pois usa esse valor na definição da “altura”, de maneira que o grau n seja sempre menor ou igual à “altura” N .

Nesta época, Cantor ainda não tinha provado que a união enumerável de infinitos enumeráveis formava ainda um infinito enumerável e, deste modo, a sua demonstração estaria perfeita.

Apesar de Dedekind ter aconselhado Cantor a fazer esta demonstração para os números algébricos complexos, ele se limitou aos números algébricos reais. Zermelo, em seus comentários sobre este artigo, acha estranho que Cantor se limite aos números algébricos reais, pois sua demonstração “se aplica imediatamente a todos os números algébricos reais ou complexos”. [DUGAC, p.116]

Achamos compreensível da parte de Cantor ter se restringido aos algébricos reais, pois seu foco era a reta real, isto é, mostrar que existiam números transcendentais reais na reta e que não pertenciam à sequência dos números algébricos reais. Cantor não considerou os algébricos complexos de propósito. No entanto, na introdução do artigo *Uma contribuição à teoria dos*

conjuntos [(8) da lista 1.9], quando Cantor comenta sobre a enumerabilidade do conjunto dos números algébricos, reforçando a idéia de que seus elementos podem ser mostrados como uma seqüência simplesmente infinita, ele diz o seguinte: *Eu mesmo demonstrei que o conjunto (ω) de todos os números algébricos reais (e poderíamos acrescentar: de todos os números algébricos complexos) podem ser concebidos sob a forma de uma seqüência com o termo geral ω_v ;*⁸²

5.1.2 Demonstração da não-enumerabilidade do conjunto dos números reais

Na §2 de seu artigo, Cantor demonstra que dada uma seqüência com todos os números reais, sempre se pode achar um número real que não pertence a esta seqüência.

Esta demonstração é por contradição, assumindo que os números reais são contáveis, isto é, podem ser postos em seqüência com um índice do conjunto dos naturais:

$$* \quad u_1, u_2, u_3, \dots, u_v, \dots$$

Cantor alegou que era possível, dado qualquer intervalo $] \alpha, \beta[\subset \mathbb{R}$, encontrar, no mínimo, um número real η tal que η não está em $*$.

Assumindo que $\alpha < \beta$, ele considerou os dois primeiros números da lista $*$ que caíam dentro do intervalo $] \alpha, \beta[$ e os chamou de α' , β' respectivamente. Estes foram usados para constituir um outro intervalo $] \alpha', \beta'[$ e, procedendo analogamente, Cantor produziu uma seqüência de intervalos $] \alpha^v, \beta^v[$ onde α^v e β^v eram os dois primeiros números $*$ contidos no intervalo $] \alpha^{v-1}, \beta^{v-1}[$.

⁸¹ The flaw was certainly easy to overcome, but at the same time Dedekind's proof was more straightforward, since it yielded directly an enumeration of the polynomials. This could have been the reason why Cantor preferred it for his publication. [FERREIRÓS, p.358, 1993]

⁸² J'ai même démontré que l'ensemble (ω) de tous les nombres algébriques réels (et on pourrait ajouter : de tous les nombres algébriques complexes) peut se concevoir sous la forme d'une série avec le terme général ω_v ; [CANTOR, *Acta Math.* 2, p.312, 1883]

Existem duas possibilidades: a primeira é que, se o número de intervalos assim construído for finito, então existe, no máximo, só mais um elemento de $*$ que está contido em $] \alpha^v, \beta^v[$ e neste caso foi fácil para Cantor concluir que o número η poderia ser tomado neste intervalo e que não estava listado em $*$. Qualquer número real $\eta \in] \alpha^v, \beta^v[$ bastaria, já que não estava listado em $*$.

A segunda é que, se o número de intervalos $] \alpha^v, \beta^v[$ for infinito, existem duas alternativas para o limite: como a seqüência $\alpha, \alpha', \alpha'', \dots, \alpha^v, \dots$ é não decrescente e limitada dentro do intervalo $] \alpha, \beta[$, ela tem que assumir um limite superior (supremo) que Cantor chamou de α^∞ . Analogamente a seqüência $\beta, \beta', \beta'', \dots, \beta^v, \dots$ tem que assumir um limite inferior (ínfimo) β^∞ . Se $\alpha^\infty < \beta^\infty$, então, como no caso finito, qualquer número real $\eta \in] \alpha^\infty, \beta^\infty[$ nos dá o número real necessário não listado em $*$. Entretanto, se $\alpha^\infty = \beta^\infty$, Cantor provou que $\eta = \alpha^\infty = \beta^\infty$ não poderia ser incluído como elemento de $*$. Ele chamou $\eta = u_p$, mas u_p , para um índice v suficientemente grande, seria excluído de todos os intervalos $] \alpha^v, \beta^v[$, indiferente ao índice. A contradição estabelece a prova e se pode concluir que o conjunto dos números reais é não-enumerável.

Cantor encerra o artigo fazendo uma generalização do teorema acima e coloca a data de 23 de dezembro de 1873, ou seja, menos de um mês depois da carta onde ele expõe o problema para Dedekind.

5.2 RETA E PLANO, CONJUNTOS COM MESMA POTÊNCIA

Se considerarmos o infinito como sendo único, isto é, todo infinito é equivalente; pensamento que predominava até que as idéias de Cantor fossem difundidas, era natural pensar que o plano e a reta possuem a mesma quantidade infinita de pontos.

Mas, a partir de 1873, com a publicação do artigo citado acima, considerando-se, agora, que existem infinitos diferentes, passou a ser natural pensar que espaços de dimensões diferentes poderiam possuir quantidades diferentes de pontos. A intuição nos leva a crer que o plano deveria então representar um infinito maior que a reta.

O passo seguinte, então, após a descoberta de que o conjunto dos números reais representava um infinito não-enumerável, maior que o infinito enumerável dos inteiros, era analisar se conjuntos de pontos de dimensões maiores que *um* também poderiam representar infinitos ainda maiores que o infinito unidimensional.

5.2.1 Comentários sobre a troca de cartas entre Cantor e Dedekind

Em janeiro de 1874, Cantor levanta a questão, em uma carta para Dedekind, de uma superfície, por exemplo, um quadrado, poder ser colocado em correspondência biunívoca com uma curva, por exemplo, um segmento de reta.

Halle, 5 de janeiro de 1874

A propósito das questões com que me ocupei nestes últimos tempos, percebi que, dentro desta ordem de idéias, se apresenta também a seguinte:

Pode uma superfície (por exemplo, um quadrado, incluindo a fronteira) ser colocada em relação unívoca com uma curva (por exemplo, um segmento de reta, incluindo as extremidades), de tal modo que a todo ponto da superfície corresponda um ponto da curva e, reciprocamente, a todo ponto da curva corresponda um ponto da superfície?

Parece-me ainda neste momento que a resposta a esta questão apresenta grandes dificuldades – se bem que, aqui também, estejamos fortemente inclinados a uma resposta *negativa*; poderíamos quase ter uma demonstração como supérflua. (cf. anexo)

Intuitivamente Cantor estava inclinado a pensar que a resposta era negativa, que tal correspondência biunívoca não poderia existir e que uma demonstração seria supérflua. Alguns meses depois ele escreve numa carta para Dedekind que um amigo seu, em Berlim, achou a idéia absurda e comentou que duas variáveis independentes não poderiam ser reduzidas a somente uma.

Halle, 18 de maio 1874

Provando a necessidade de me ocupar com você sobre assuntos científicos, e entrar em relações pessoais mais próximos de você, eu desejo fazer uma visita um dia em Brunswick neste verão.

...Se você quiser na ocasião me responder a este propósito, eu gostaria de saber se você encontra a mesma dificuldade que eu para a questão que te propus em janeiro sobre a correspondência entre uma superfície e uma linha, ou se me deixei induzir em erro sobre este assunto: em Berlim, meu amigo, a quem expus a mesma dificuldade, me declarou que a coisa é, por assim dizer, absurda, pois se compreende por si só que duas variáveis independentes não podem ser reduzidas a somente uma.⁸³ (cf. anexo)

Em agosto deste mesmo ano, depois de seu casamento, Cantor se encontra com Dedekind em Harz e voltam a discutir sobre este problema, mas somente quase três anos depois, em junho de 1877, Cantor responde afirmativamente a questão, dando a demonstração que, independente da dimensão, um espaço n -dimensional tem a mesma potência que a reta real.

Halle, 20 de junho de 1877

Eu gostaria de saber se você considera que o método de demonstração aplicado por mim é aritmeticamente rigoroso?

Trata-se de mostrar que as superfícies, os volumes e mesmo as variedades contínuas à p dimensões podem ser colocadas em correspondência unívoca com curvas contínuas, portanto com variedades a uma só dimensão, como as superfícies, os volumes, as variedades a p dimensões têm também então a mesma *potência* que as curvas: esta opinião parece oposta àquela geralmente difundida, notadamente entre os representantes da nova geometria, segundo a qual falamos de variedades simplesmente, duplamente, triplamente p vezes infinita: nós representamos mesmo algumas vezes as coisas como se obtivéssemos o infinito de pontos de uma superfície, de certo modo, elevando ao quadrado, aquela de um cubo elevando ao cubo o infinito de pontos de uma linha.

Como as variedades de um número igual de dimensões podem ser relacionadas uma a outra *analiticamente*, me parece que podemos colocar as questões mais gerais que eu tenho falado sob a forma puramente aritmética seguinte:

“Sejam $x_1, x_2, \dots, x_p$, p grandezas variáveis reais independentes, em que cada uma pode tomar todos os valores ≥ 0 e ≤ 1 . Seja y uma $(p + 1)$ -ésima grandeza variável real com o mesmo domínio de variação $0 \leq y \leq 1$.

É então possível fazer corresponder as p grandezas $x_1, x_2, \dots, x_p$ somente a grandeza y , de tal modo que, a cada sistema de valores determinados $(x_1, x_2, \dots, x_p)$, corresponda um valor determinado y , e que reciprocamente, a cada valor determinado y , corresponda um sistema de valores determinados e somente um $(x_1, x_2, \dots, x_p)$?”

⁸³ Halle, le 18 mai 1874

Éprouvant le besoin de m'entretenir avec vous de sujets scientifiques, et d'entrer en relations personnelles plus proches avec vous, je souhaiterais vous rendre visite un jour à Brunswick cet été.

...Si vous voulez bien à la occasion me répondre à ce propos, j'aimerais savoir si vous trouvez la même difficulté que moi à la question que je vous ai posée en janvier sur la correspondance entre une surface et une ligne, ou si je me suis laissé induire en erreur à ce sujet : à Berlin, mon ami, à qui j'ai exposé la même difficulté, m'a déclaré que la chose était pour ainsi dire absurde, car il se comprend de soi-même que deux variables indépendantes ne peuvent être ramenées à une seule. [CAVAILLÉS, p.197, 1962]

Ao que me parece, se deve responder *afirmativamente* a esta questão, *apesar de eu ter por muitos anos o contrário por certo*, e isto pelas razões seguintes:

Todo número $0 \leq x \leq 1$ pode ser representado de uma maneira e de uma só sob a forma de uma fração decimal ilimitada, seja:

$$x = \alpha_1 \frac{1}{10} + \alpha_2 \frac{1}{10^2} + \dots + \alpha_v \frac{1}{10^v} + \dots$$

onde os α_v são números inteiros ≥ 0 e ≤ 9 . Todo número x determina dessa forma uma sequência infinita $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ e reciprocamente.

Nós podemos então escrever:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{1,1} \frac{1}{10} + \alpha_{1,2} \frac{1}{10^2} + \dots + \alpha_{1,v} \frac{1}{10^v} + \dots \\ x_2 &= \alpha_{2,1} \frac{1}{10} + \alpha_{2,2} \frac{1}{10^2} + \dots + \alpha_{2,v} \frac{1}{10^v} + \dots \\ x_\rho &= \alpha_{\rho,1} \frac{1}{10} + \alpha_{\rho,2} \frac{1}{10^2} + \dots + \alpha_{\rho,v} \frac{1}{10^v} + \dots \end{aligned}$$

Destes ρ números podemos deduzir um $(\rho + 1)$ -ésimo número y :

$$y = \beta_1 \frac{1}{10} + \beta_2 \frac{1}{10^2} + \dots + \beta_v \frac{1}{10^v} + \dots$$

onde colocamos:

$$\begin{aligned} (1) \quad \beta_{(n-1)\rho+1} &= \alpha_{1,n}; \quad \beta_{(n-1)\rho+2} = \alpha_{2,n}; \dots \\ \beta_{(n-1)\rho+\sigma} &= \alpha_{\sigma,n}; \dots \beta_{(n-1)\rho+\rho} = \alpha_{\rho,n}. \end{aligned}$$

Como todo número inteiro positivo, v pode ser representado de uma e somente uma maneira sob a forma:

$$v = (n-1)\rho + \sigma \quad \text{onde } 0 < \sigma \leq \rho.$$

Nós vemos que a sequência $\beta_1, \beta_2, \dots$ e, por conseguinte, também y , são plenamente determinadas pelas equações (1); mas reciprocamente, se nós partimos do número y , e por conseguinte da sequência $\beta_1, \beta_2, \dots$ as ρ sequências

$$\begin{aligned} &\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \dots \\ &\dots\dots\dots \\ &\alpha_{\sigma,1}, \alpha_{\sigma,2}, \dots \\ &\dots\dots\dots \\ &\alpha_{\rho,1}, \alpha_{\rho,2}, \dots \end{aligned}$$

são determinadas de forma unívoca pelas equações (1) e por conseguinte, também os ρ números $x_1, x_2, \dots, x_\rho$. [CAVAILLÈS, pp. 200 a 203, 1962, cf. anexo]

Para que as idéias da demonstração fiquem mais claras, exemplificaremos com um número que pertença a um espaço tridimensional e pegaremos as primeiras quatro casas decimais de sua expansão decimal infinita. Agora vamos mostrar o procedimento para um número fixo (no

decorrer deste trabalho veremos, com o uso do computador, o gráfico que representa esta função no intervalo $[0;1]$). Vejamos um exemplo em $\mathbb{R}^3$:

Seja $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ vamos fazer corresponder a este valor um único valor y ,

da seguinte maneira:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} = 0,78539816...; \quad x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,70710678...; \quad x_3 = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0,86602540...$$

$$x_1 = 7 \cdot \frac{1}{10} + 8 \cdot \frac{1}{10^2} + 5 \cdot \frac{1}{10^3} + 3 \cdot \frac{1}{10^4} + \dots$$

$$x_2 = 7 \cdot \frac{1}{10} + 0 \cdot \frac{1}{10^2} + 7 \cdot \frac{1}{10^3} + 1 \cdot \frac{1}{10^4} + \dots$$

$$x_3 = 8 \cdot \frac{1}{10} + 6 \cdot \frac{1}{10^2} + 6 \cdot \frac{1}{10^3} + 0 \cdot \frac{1}{10^4} + \dots$$

O novo número formado, será $y = 0,778806576310...$, ou seja, Cantor teve a idéia de pegar a primeira casa decimal da primeira coordenada, depois a primeira casa decimal da segunda coordenada e finalmente a primeira casa decimal da terceira coordenada. A seguir começa tudo novamente com as segundas casas decimais de cada coordenada e assim, sucessivamente, num processo que deve ser pensado como atual, isto é, o número não vai se formando aos poucos, pois isso acarretaria a necessidade de um tempo infinito. A idéia de Cantor é pensar o número completo, já totalmente formado, num ato instantâneo, na realidade atemporal. Reciprocamente, volta-se ao espaço tridimensional fazendo o caminho inverso, isto é, para a primeira coordenada se pega a primeira, quarta, sétima etc. casa decimal da variável y .

Dois dias depois, Dedekind responde a carta de Cantor:

A única objeção que eu posso encontrar no momento de sua interessante argumentação, e que você descartou talvez sem dificuldade, é a seguinte. Você diz: “Todo número $0 \leq x \leq 1$ pode ser representado de uma maneira e de uma só sob a forma de uma fração decimal *infinita*, de tal modo que:

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_v}{10^v} + \dots$$

onde os α_v são números inteiros ≥ 0 e ≤ 9 . Cada número x determina dessa forma uma sequência *infinita* $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ e reciprocamente.” O fato de você colocar em evidência a palavra “infinita” me deixa supor que você exclui o caso de uma fração finita, a saber tal que um α_v diferente de 0 não seja seguido por cifras $\alpha_{v+1} = \alpha_{v+2} = \dots = 0$, e que você escreve, no lugar de

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_v}{10^v} + \frac{0}{10^{v+1}} + \frac{0}{10^{v+2}} + \dots + \frac{0}{10^{v+v'}} + \dots$$

em geral

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_v - 1}{10^v} + \frac{9}{10^{v+1}} + \frac{9}{10^{v+2}} + \dots + \frac{9}{10^{v+v'}} + \dots$$

excluindo assim toda possibilidade de uma dupla representação de um só e mesmo número x (o número $x = 0$, ele próprio, seria, no entanto, representado sob a forma 0,0000...; mas $x = \frac{3}{10} = 0,3$ seria representado sob a forma 0,2999...).

Se esta é a sua opinião (poderemos naturalmente também excluir o caso onde, a partir de uma certa posição, não se apresenta a cifra 9; mas as consequências seriam similares), então minha objeção é a seguinte. Eu me limito por simplicidade ao caso $p = 2$ e coloco:

$$x = \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots = 0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_v \dots$$

$$y = \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \dots = 0, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_v \dots$$

e eu construo como você, a partir destes dois números x, y , um terceiro número

$$z = 0, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots$$

em que

$$\gamma_1 = \alpha_1, \gamma_2 = \beta_1, \gamma_3 = \alpha_2,$$

$$\gamma_4 = \beta_2, \dots, \gamma_{2v-1} = \alpha_v, \gamma_{2v} = \beta_v, \dots,$$

de tal modo que z é uma função bem determinada de duas variáveis contínuas x e y , e contida no mesmo intervalo ($0 \leq z \leq 1$). Mas existe então uma infinidade de frações verdadeiras às quais z não será *jamais* igual, por exemplo:

$$0,478310507090\alpha_7 0\alpha_8 0\dots\alpha_v 0\dots$$

e mesmo toda fração $0, \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \dots$, a qual, a partir de um lugar determinado, seja γ_{2v-1} , seja γ_{2v} é sempre = 0; pois se nós quisermos tirar inversamente o valor de x e de y de um tal valor de z , nós chegaremos a um valor de x ou de y ausente (excluído).

Eu não sei se minha objeção é de uma importância essencial para sua idéia, mas eu não quero guardá-la para mim.

Brunswick, 22 de junho de 1877.[CAVAILLÈS, p.203, 1962]

Cantor havia usado para representar os números reais no intervalo $[0,1]$ as frações decimais infinitas $\alpha = 0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$ em que $0 \leq \alpha_n \leq 9$ são números inteiros. Entretanto, Dedekind encontrou uma pequena falha nesta demonstração, pois Cantor havia excluído as frações finitas, como por exemplo, $\frac{3}{10} = 0,3 = 0,300000\dots$ que não poderiam ocorrer. No seu lugar ele escrevia $0,299999\dots$ Dedekind argumenta então que números como $0,47805070903020\dots$ onde há uma alternância de um algarismo e o zero não seriam jamais obtidos.

Observando o artigo que Cantor escreveu logo depois, pode se perceber facilmente como as sugestões e críticas dadas por Dedekind influenciaram o pensamento de Cantor. Na seção 7 de seu artigo, Cantor reescreve textualmente as objeções feitas por Dedekind.[DUGAC, p. 120, 1976]

Cantor inicia esta seção com as seguintes palavras:

O pensamento que vem naturalmente é escolher, para a demonstração de (A) a forma de representação das frações decimais infinitas no lugar das frações *contínuas* que nós empregamos; pareceria que este método nos conduziria prontamente ao objetivo; mas, pelo contrário, ele acarreta uma dificuldade sobre a qual quero chamar a atenção aqui; e é a razão que me fez renunciar neste trabalho ao emprego das frações decimais.⁸⁴

⁸⁴ La pensée viendrait naturellement de choisir, pour la démonstration de (A) la forme de representation des fractions *décimales* infinies au lieu des fractions *continues* que nous avons employées ; il semblerait que cette méthode nous aurait conduit plus promptement au but ; mais au contraire elle entraine avec elle une difficulté sur laquelle je veux attirer l'attention ici ; et c'est la raison qui m'a fait renoncer dans ce travail à l'emploi des fractions décimales.[CANTOR, p. 324, *Acta Mathematica* 2, 1883]

A partir daí ele repete, em seu artigo, o texto da carta de Dedekind, escrita em 22 de junho e já transcrita acima.

No dia seguinte, Cantor responde a Dedekind:

(Carta; selo do correio de 23-6-77)

Você infelizmente tem toda a razão com sua objeção; felizmente ela alcança apenas a demonstração, e não o tema propriamente dito; com efeito, eu demonstrei, *de uma certa maneira, mais* do que queria demonstrar, uma vez que coloco um sistema $x_1, x_2, \dots, x_\rho$ de variáveis reais (≥ 0 e ≤ 1) sem outra restrição em correspondência unívoca com uma variável y , que está contida no mesmo intervalo e y toma todos os valores com exceção de alguns dentre eles y' "; mas os valores y' que ele toma efetivamente, ele os toma *senão somente uma vez*, e isto, me parece, é o essencial. Pois eu posso então encontrar y' em relação unívoca com uma outra grandeza t que toma todos os valores ≥ 0 e ≤ 1 .

Estou contente que você não teve até o presente nada diferente a objetar; eu me permitirei escrever-lhe com mais detalhes sobre este assunto. (cf. anexo)

O que Cantor quis dizer com “eu demonstrei, *de uma certa maneira, mais* do que eu queria demonstrar” é que, na realidade, ele obteve uma função injetiva que relacionava o plano com a reta. Entretanto, como Dedekind assinalou, esta função não era sobrejetiva, isto é, sobravam pontos na reta que não estavam relacionados a nenhum ponto do plano, o que ia de encontro à definição de equipotência, já que, para que dois conjuntos tenham a mesma potência, a função que relaciona estes dois conjuntos tem que ser bijetiva. Cantor, porém, minimiza o problema, levando em consideração que, como $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^2$, a potência de $\mathbb{R}$ não pode ser maior que a potência de $\mathbb{R}^2$. Teria de ser, no máximo, igual ou menor que a de $\mathbb{R}^2$. Como não é menor, devido à função ser injetora, isto significa que as potências só podem ser iguais e o fato de ‘sobrarem’ alguns pontos em $\mathbb{R}$ não altera sua potência.

Dois dias depois, ele já havia pensado uma forma de evitar o tipo de problema exposto por seu colega Dedekind. A idéia para fugir da falha apresentada, era usar frações contínuas⁸⁵; o problema é que as frações contínuas infinitas representam apenas os números irracionais, pois a

⁸⁵ Mais detalhes sobre as frações contínuas no apêndice C. Para estudo mais aprofundado, sugerimos [DAVENPORT, H., 1999] ou [SIERPINSKI, W., 1988]

fração contínua desenvolvida de um número racional é sempre finita. Assim, Cantor precisou demonstrar também que existe uma correspondência biunívoca entre os irracionais e os reais, o que deixou sua demonstração bem mais longa e com mais detalhes.

O próprio Cantor reconhece, logo no primeiro parágrafo de sua carta a Dedekind, a dificuldade que esta nova demonstração, substituindo a representação decimal por frações contínuas, acarreta.

Halle, 25 de junho de 1877

Sobre um cartão postal que lhe enderecei anteontem, reconheço a lacuna descoberta por você em minha demonstração, e percebo, ao mesmo tempo, que eu estava em condições de solucionar, apesar de não poder me conter em lastimar um pouco que esta questão não se deixa resolver sem fazer intervir considerações mais complicadas; mas ela tem sem dúvida, a mesma natureza do tema; é preciso então que eu me console; talvez se encontre mais tarde, que isto que falta nesta demonstração pode ser tratado mais simplesmente do que posso fazer neste momento. Mas, antes de tudo, tenho de convencê-lo, se possível, de meu teorema, a saber:

- (A) “Uma multiplicidade contínua a e dimensões pode ser colocada em correspondência unívoca com uma multiplicidade contínua a uma dimensão, ou (que é outra forma do mesmo teorema) os pontos (elementos) de uma multiplicidade a p dimensões podem se determinar por uma coordenada real t de tal modo que a cada valor real de t no intervalo $(0...1)$ corresponde um ponto da multiplicidade, mas também reciprocamente, que a cada ponto da multiplicidade corresponde um valor determinado de t no intervalo $(0,..., 1)$.”

Eu me permito submeter a você uma outra demonstração, sobre a qual eu estou mais tentado que sobre aquela.

Eu parto do teorema seguinte no qual todo número irracional $0 < e < 1$ pode ser representado de uma maneira completamente determinada por uma fração contínua:

$$e = \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3 + \dots \frac{1}{\alpha_v + \dots}}}} \quad (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v, \dots)$$

onde α_v é um número inteiro racional positivo. A cada número irracional > 0 e < 1 corresponde uma seqüência infinita determinada α_v , e, reciprocamente, a cada seqüência ilimitada α_v corresponde um número irracional determinado $0 < e < 1$.

Se $e_1, e_2, \dots, e_p$ são então p grandezas independentes uma das outras, das quais cada uma pode tomar todos os valores irracionais do intervalo $(0...1)$ e apenas estes valores, colocamos:

$$e_1 = (\alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \dots, \alpha_{1,v}, \dots)$$

$$e_2 = (\alpha_{2,1}, \alpha_{2,2}, \dots, \alpha_{2,v}, \dots)$$

.....

$$e_\rho = (\alpha_{\rho,1}, \alpha_{\rho,2}, \dots, \alpha_{\rho,\nu}, \dots)$$

e definimos a partir destes números um $(\rho + 1)$ -ésimo número irracional:

$$\partial = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\nu, \dots)$$

para o sistema de equações :

$$(1) \beta_{(n-1)\rho+1} = \alpha_{1,n}; \quad \dots \quad ; \beta_{(n-1)\rho+\sigma} = \alpha_{\sigma,n}; \quad \dots \quad ; \beta_{n\rho} = \alpha_{\rho,n}.$$

então reciprocamente, cada número irracional $0 < \partial < 1$ produzirá por intermédio de (1), um sistema determinado $e_1, e_2, \dots, e_\rho$.

Nós não encontramos aqui, me parece, o obstáculo que você levantou na minha demonstração anterior.

Trata-se de demonstrar então o seguinte teorema:

- (B) “Um número variável e , que pode tomar todos os valores *irracionais* no intervalo $(0...1)$, pode ser colocado em correspondência *unívoca* com um número x , que toma todos os valores deste intervalo sem exceção.”

Pois, uma vez este teorema (B) demonstrado, nós podemos colocar então em correspondência unívoca uma por uma as variáveis designadas acima por $e_1, e_2, \dots, e_\rho$ e ∂ respectivamente com outras variáveis

$$x_1, x_2, \dots, x_\rho, y$$

que tem todas um domínio de variação sem restrições no intervalo $(0...1)$. Assim definimos igualmente uma relação unívoca e recíproca entre o sistema

$$(x_1, x_2, \dots, x_\rho),$$

de uma parte, e a variável única y de outra, o que conduz à demonstração do teorema (A).

Para demonstrar (B) agora, colocamos primeiro todos os números racionais do intervalo $(0...1)$ (incluindo as extremidades) sob a forma de uma seqüência, seja

$$r_1, r_2, \dots, r_\nu, \dots$$

Os valores que podem tomar a variável e são então *todos* aqueles do intervalo $(0...1)$ com exceção dos números r_ν .

Pegamos em seguida, arbitrariamente, no intervalo $(0...1)$ uma seqüência infinita ε_ν de números *irracionais*, que satisfazem somente as condições $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ e $\lim(\varepsilon_\nu) = 1$ para $\nu = \infty$, e designamos por f uma grandeza variável que pode tomar todos os valores reais ≥ 0 e ≤ 1 com exceção dos valores ε_ν . As duas grandezas variáveis e e f , submetidas às restrições indicadas, podem então ser colocadas em relação unívoca e recíproca pelas definições seguintes:

se f não é igual a nenhum r_ν , seja então para o e correspondente:

$$e = f;$$

se $f = r_\nu$, seja então para o e correspondente $e = \varepsilon_\nu$; nós nos convenceremos facilmente que, reciprocamente, se e não é igual a nenhum ε_ν , o f correspondente é e e se $e = \varepsilon_\nu$, então $f = r_\nu$.

O teorema (B) é então reconduzido ao seguinte:

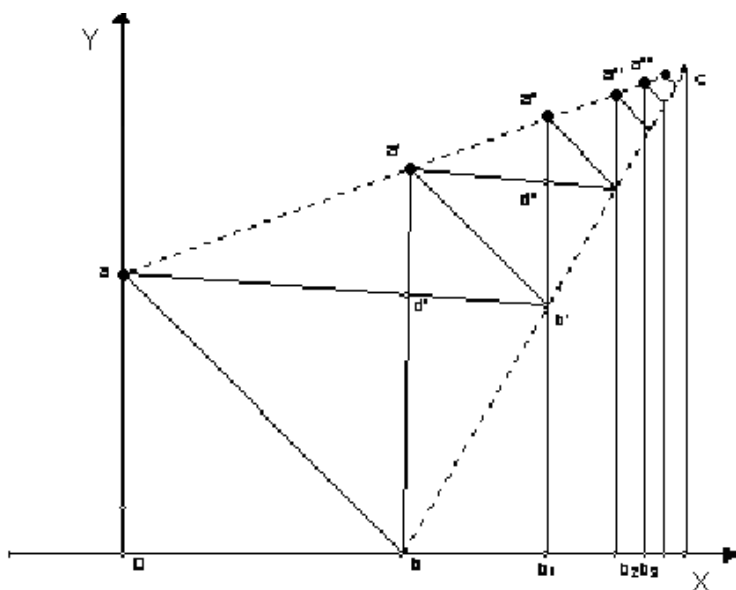
- (C) “Um número f , que pode tomar todos os valores do intervalo $(0...1)$, com exceção de certos ε_ν entre eles, satisfazendo as condições seguintes: $\varepsilon_\nu < \varepsilon_{\nu+1}$ e $\lim(\varepsilon_\nu) = 1$, pode ser colocado em correspondência unívoca com uma variável contínua x que toma todos os valores do intervalo $(0...1)$ sem exceção.”

Nós utilizamos aqui o fato de que os pontos $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ formam uma seqüência, e que, por conseguinte, o intervalo $(0...1)$ é dividido por eles em uma infinidade de intervalos parciais.

Como você não deixará de ver, este teorema (C) pode então se demonstrar pela aplicação sucessiva do seguinte teorema:

- (D) “Um número y , que pode tomar todos os valores do intervalo $(0...1)$, excetuando somente o valor 0, pode ser colocado em correspondência unívoca com um número x que toma todos os valores deste intervalo sem exceção.”

Este último teorema (D) pode, então, ser reconhecido como verdadeiro pela consideração da curiosa curva em anexo. As coordenadas de um ponto corrente m desta curva são minhas grandezas x e y , em que uma é função unívoca da outra: enquanto x toma todos os valores do intervalo $(0...1)$, o domínio de variação de y é o mesmo intervalo, *com exceção* do valor 0.



A curva se compõe de uma infinidade de segmentos de reta paralelos, que ficam sempre menores, $\overline{ab}, \overline{a'b'}, \overline{a''b''}, \dots$, e do ponto c . As extremidades $b, b', b'', \dots$, não são considerados como pertencentes a curva. Os comprimentos dos segmentos são:

$$\overline{op} = \overline{pc} = 1; \quad \overline{ob} = \frac{1}{2}; \quad \overline{bb_1} = \frac{1}{4}; \quad \overline{b_1b_2} = \frac{1}{8}; \quad \overline{b_2b_3} = \frac{1}{16}, \dots$$

$$\overline{oa} = \frac{1}{2}; \quad \overline{a'd'} = \frac{1}{4}; \quad \overline{a''d''} = \frac{1}{8}; \quad \overline{a''b''} = \frac{1}{16}, \dots$$

Eu tenho acompanhado com interesse, desde vários anos, os esforços que nós dedicamos, depois de Gauss, Riemann, Helmholtz e outros, ao esclarecimento das questões que tocam as primeiras hipóteses da geometria.

Pareceu-me a esse respeito que todas as investigações feitas neste domínio partem *elas mesmas* de uma hipótese não demonstrada, que não me parece como partindo de si, mas antes como tendo necessidade de ser fundamentada. Quero falar da hipótese segundo a qual uma multiplicidade contínua p vezes estendida necessita, para a determinação dos seus elementos, de p coordenadas reais independentes entre elas; o número destas coordenadas não pode ser, para uma mesma multiplicidade, nem aumentado nem diminuído.

Tinha acreditado também nesta hipótese, estava quase persuadido da sua exatidão: o meu ponto de vista diferia apenas de todos outros nisto, que considerava esta hipótese como um teorema que necessitava de uma demonstração, e tornar claro o meu ponto de vista sob a forma de uma

pergunta que apresentei a alguns colegas, em especial também por ocasião do jubileu⁸⁶ de Gauss, em Göttingen, a saber, a seguinte questão:

“Uma variedade contínua a ρ dimensões, com $\rho > 1$, pode ser colocada em relação unívoca com uma variedade contínua a uma dimensão, de tal modo que a um ponto de uma corresponda um e somente um ponto da outra?”

A maior parte daqueles a quem apresentei esta pergunta surpreendeu-se muito que eu a tivesse colocado, pois se compreendia que, para a determinação de um ponto numa extensão a ρ dimensões, era necessário sempre empregar ρ coordenadas independentes. O que, no entanto, penetrava no âmago da questão, devia se reconhecer que era necessário pelo menos demonstrar porque a resposta era “evidentemente” *não*. Como disse, eu fazia parte daqueles que tinham por *verdadeiro* que a resposta era negativa - até o momento muito recente em que, por uma sucessão bastante complexa de pensamentos, cheguei à convicção de que a resposta era afirmativa sem nenhuma restrição. Pouco depois, encontrei a demonstração que você tem hoje sob os olhos.

Vê-se aqui que força prodigiosa existe nos números reais habituais, racionais e irracionais, de modo que, através deles, pode-se determinar de maneira unívoca, *com a ajuda de somente uma coordenada*, os elementos de uma multiplicidade contínua ρ vezes estendida; e quero acrescentar imediatamente que a sua força vai mais distante ainda, dado que, como não faltará de ver, a minha demonstração pode estender-se, sem que as dificuldades sejam aumentadas sensivelmente, para as multiplicidades com um número infinito de dimensões, desde que estas dimensões em número infinito tomem a forma de uma seqüência simplesmente infinita.

Parece-me então que todas as deduções filosóficas ou matemáticas que utilizam esta hipótese errônea são inadmissíveis. É necessário antes procurar a diferença que existe entre duas variedades com um número diferente de dimensões, por alguma razão completamente diferente desta, geralmente mantida para característica, do número de coordenadas independentes. (cf. anexo)

Essa carta é importante para se perceber as conseqüências que Cantor tira de seu teorema sobre a bijeção que existe entre espaços de dimensões distintas. Neste momento, ele questiona a relação entre o conceito de dimensão e o número de coordenadas e afirma que o enunciado abaixo deve ser demonstrado:

Uma multiplicidade ρ vezes estendida necessita, para a determinação de seus elementos, de ρ coordenadas reais independentes entre elas; o número dessas coordenadas não pode ser para uma mesma multiplicidade, nem aumentada, nem diminuída.

As idéias expostas por Cantor nesta carta aparecem de uma maneira muito parecida no artigo que ele escreveria logo depois, acrescentando ainda a demonstração para espaços de dimensão infinita enumerável, como veremos detalhadamente nas próximas seções.

Analisando o encadeamento das idéias que o levaram ao resultado final, podemos perceber a origem da aritmética cardinal transfinita que ele viria formalizar quase vinte anos depois no “*Beiträge*”.

⁸⁶ Gauss nasceu em 30 de abril de 1777.

Vejamos:

No teorema (A) ele enuncia que “Uma multiplicidade contínua a e dimensões pode ser colocada em correspondência unívoca com uma multiplicidade contínua a uma dimensão”, que poderíamos traduzir para $c \times c \times \dots \times c = c$, onde c é a potência do contínuo. Generalizando para um número cardinal transfinito $\aleph$ qualquer, teríamos que: o produto $\aleph \times \aleph \times \dots \times \aleph = \aleph$ em que o fator $\aleph$ se repete e vezes.

Com o objetivo de demonstrar (A), ele demonstra (B), (C) e (D) que são resultados mais fracos.

No teorema (B), ele enuncia que “Um número variável e , que pode tomar todos os valores *irracionais* no intervalo $(0...1)$, pode ser colocado em correspondência *unívoca* com um número x , que toma todos os valores deste intervalo sem exceção.”, o que poderíamos traduzir para $c + \aleph_0 = c$, ou seja, se somarmos uma quantidade infinita enumerável à potência do contínuo, esta não se altera. Em particular, se acrescentarmos à potência do contínuo qualquer cardinal finito n , teremos que $c + n = c$, o que nos faz lembrar a justificativa de Aristóteles para a não existência do infinito efetivo. Justificando que este aniquilaria o finito.

Generalizando, para um alef qualquer, teríamos que $\aleph_m + \aleph_n = \aleph_m$ para $m \geq n$, ou seja, o infinito maior absorve o menor.

No teorema (C), ele enuncia que “Um número f , que pode tomar todos os valores do intervalo $(0...1)$, com exceção de certos ε_v entre eles, satisfazendo as condições seguintes: $\varepsilon_v < \varepsilon_{v+1}$ e $\lim(\varepsilon_v) = 1$, pode ser colocado em correspondência unívoca com uma variável contínua x , que toma todos os valores do intervalo $(0...1)$, sem exceção.”. Poderíamos considerar o intervalo $[0,1]$ dividido em $v + 1$ segmentos de reta, cuja potência continua sendo c ; deste modo,

teríamos a seguinte conta $c + c + \dots + c = c$, em que a parcela c aparece $v + 1$ vezes.

Generalizando para um cardinal transfinito qualquer, ficaria $\aleph + \aleph + \dots + \aleph = \aleph$.

Finalmente, no teorema (D), Cantor mostra o resultado mais fraco: acrescentando um elemento a um intervalo, a potência não se altera, ou seja, $c + 1 = c$. Ou seja, acrescentar a um cardinal transfinito o cardinal finito 1(um) não produzirá nenhuma alteração.

Por outro lado, sabemos que, topologicamente, um intervalo fechado e outro intervalo aberto em uma das extremidades, como por exemplo, $[0; 1]$ e $]0; 1]$ não são topologicamente equivalentes, pois, no primeiro caso, podemos tirar os dois pontos das extremidades e continuarmos com um conjunto conexo, isso não ocorre para o segundo intervalo que, no caso de eliminação dos dois pontos, sempre deixa de ser conexo.

Observando a curva criada por Cantor, para fazer a correspondência biunívoca entre $[0; 1]$ e $]0; 1]$, podemos observar facilmente como a relação entre as variáveis x e y não é contínua em um número infinito enumerável de pontos, a saber, $b_i = \frac{1}{2^i}$, $i = 1, 2, 3, \dots$

Até este momento, está bem claro, analisando as observações que Cantor faz no último parágrafo de sua carta em que sugere que “deduções filosóficas ou matemáticas que utilizam esta hipótese errônea são inadmissíveis”, que ele precipitadamente começou a pensar que o espaço unidimensional tinha força suficiente para *substituir* os espaços com n dimensões e até mesmo de infinitas dimensões. Não é coincidência que a palavra alemã *MÄCHTIGKEIT*, usada por Cantor para denotar quando dois conjuntos são equipotentes, possui os dois significados: potência e força.

Vejamos como ficaria o gráfico desta função idealizada por Cantor:

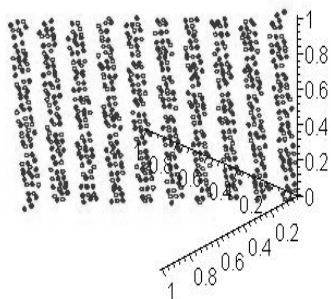


Ilustração 7: Gráfico da função de Cantor, feita com o programa MAPLE, utilizando 737 pontos.

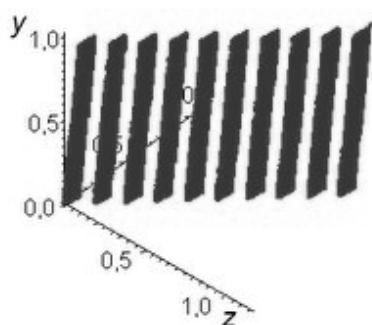


Ilustração 8: O mesmo gráfico da ilustração anterior sob outro ponto de vista e com 10000 pontos; para mais detalhes ir ao apêndice E.

Sierpinski [1927] mostrou o surpreendente resultado que esta função, a despeito de sua arbitrariedade, ainda assim **é contínua** para todo **ponto irracional**. [FRAENKEL, p.105, 1961]

Olhando para o gráfico, podemos observar que ele é desconexo. Partindo do intervalo $[0;1]$, que é conexo, obtivemos o quadrado $[0;1] \times [0;1]$, totalmente despedaçado.

Na realidade, representando cada ponto do gráfico, com uma variação contínua da coordenada x , a imagem que obtemos é descontínua de modo que o quadrado que se forma está totalmente pulverizado, ou seja, pontos racionais que no segmento $[0;1]$ estavam próximos podem ficar distantes um do outro, no quadrado que se forma, e deste modo originando esta pulverização.

O tratamento do contínuo faz-se mais radical dado que, para demonstrar a sua “extraordinária potência”, deve-se reduzi-lo “a átomos”, desintrincando os racionais e os irracionais. Nenhum espaço, mesmo de dimensão infinita, permite chegar a um conjunto de uma potência superior. Paradoxalmente, o lado espantoso desta potência passa pela sua pulverização.⁸⁷

Alguns dias depois, Cantor volta a escrever para Dedekind sobre este mesmo assunto; os teoremas (C) e (D) que ele menciona nesta carta são os enunciados na carta do dia 25 de junho:

Halle, 29 de junho de 1877

Queira desculpar minha devoção a este assunto, se recorro tão frequentemente a sua bondade e a sua pena; o que lhe tenho comunicado muito recentemente é para mim mesmo tão surpreendente, tão novo, que não poderei, por assim dizer, chegar a uma certa tranquilidade de espírito, antes que tenha recebido, muito honrado amigo, o seu julgamento sobre a sua exatidão. Enquanto não aprovar, posso apenas dizer: Vejo, mas não acredito⁸⁸. É por isso que lhe solicito enviar-me um cartão-postal para dizer-me quando você terminou o exame do tema e se posso contar vê-lo satisfazer o meu pedido, certamente bem exigente.

A demonstração do teorema (C) será consideravelmente facilitada pelo emprego do seguinte simbolismo:

Se a e b são duas grandezas variáveis que podem ser colocadas em relação unívoca, uma com a outra, escreveremos:

$$a \sim b$$

Se então $a \sim b$ e $b \sim c$, temos também:

$$a \sim c$$

Se, além disso, $a', a'', \dots$ é uma sequência finita ou infinita de variáveis bem definidas ou de constantes, que não têm 2 a 2 nenhum valor comum, mas tais que a reunião de seus domínios de variação sejam exatamente aquele da variável única a , escrevemos:

$$a \equiv (a', a'', \dots)^{89}$$

Tem-se então o seguinte teorema :

(E) Se $a \equiv (a', a'', \dots)$

$$b \equiv (b', b'', \dots)$$

e se além disso :

$$a' \sim b'$$

$$a'' \sim b''$$

$$a''' \sim b'''$$

.....

temos também:

$$a \sim b$$

⁸⁷ Le traitement du continu s'y fait plus radical puisque, pour démontrer son « extraordinaire puissance », il doit le réduire en « atomes », désintriquant les rationnels et les irrationnels. Aucun espace, même de dimension infinie, ne permet d'accéder à un ensemble d'une puissance supérieure. Paradoxalement, le côté médusant de cette puissance passe par sa pulvérisation.[CHARRAUD, p.69, 1994]

⁸⁸ Aparece em francês, no texto original escrito em alemão: Je le vois, mais je ne le crois pas.

⁸⁹ Em linguagem matemática atual Cantor escreveria $A = A' \cup A'' \cup \dots$ é a união disjunta dos conjuntos A^i , isto é, $A^i \cap A^j = \emptyset$ se $i \neq j$. Cantor define tais conjuntos como *sem ligação*.

Graças às substituições :

$$y = \frac{z - \alpha}{\beta - \alpha}; \quad x = \frac{u - \alpha}{\beta - \alpha}$$

deduzimos de (D) a seguinte generalização:

(F) “Um número z , que pode tomar todos os valores de um intervalo $(\alpha \dots \beta)$ com exceção de α , pode ser posto em correspondência unívoca com um número u , que toma todos os valores do intervalo $(\alpha \dots \beta)$ sem exceção.”

Disto resulta imediatamente o seguinte teorema:

(G) “Um número w , que toma todos os valores do intervalo $(\alpha \dots \beta)$, com exceção dos dois valores extremos α , β , pode ser posto em correspondência unívoca com um número variável u que toma todos os valores do intervalo $(\alpha \dots \beta)$.”

Demonstração: Seja um número $\alpha < \gamma < \beta$.

w' uma variável que toma todos os valores do intervalo $(\alpha \dots \gamma)$ com exceção de α e de γ ; w'' uma variável que toma todos os valores do intervalo $(\gamma \dots \beta)$ com exceção da única extremidade β .

Temos então:

$$(1) \quad w \equiv (w', w'')$$

Se designamos então por u'' uma variável que toma todos os valores do intervalo $(\gamma \dots \beta)$ sem exceção, por z uma variável que toma todos os valores do intervalo $(\alpha \dots \beta)$, com exceção de α , tem-se, de acordo com (F):

$$(2) \quad w'' \sim u'',$$

e, por causa de (1) e (E) :

$$w \sim (w', u'')$$

Mas : $(w', u'') \equiv z$, portanto :

$$w \equiv z.$$

Mas de acordo com (F) tem-se também:

$$z \sim u, \text{ por conseguinte, finalmente :}$$

$$w \sim u, \text{ C.Q.D.}$$

Para demonstrar agora (C), decompomos f em variáveis $f', f'', \dots$ e o valor isolado 1, f' tomando todos os valores do intervalo $(0 \dots \varepsilon_1)$ com exceção de ε_1 , $f^{(v)}$ todos os valores do intervalo $(\varepsilon_{v-1} \dots \varepsilon_v)$ com exceção dos valores extremos ε_{v-1} e ε_v . Tem-se então:

$$f \equiv (f', f'', f''', \dots, f^{(v)}, \dots, 1)$$

Seja x'' uma variável que toma todos os valores (de $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_2$), sem exceção; $x^{(IV)}$ uma variável que toma todos os valores de $(\varepsilon_3 \dots \varepsilon_4)$, sem exceção; $x^{(2v)}$ uma variável que toma todos os valores do intervalo $(\varepsilon_{2v-1} \dots \varepsilon_{2v})$, sem exceção. Tem-se, devido a (G):

$$\begin{aligned}
 f'' &\sim x'' \\
 f^{IV} &\sim x^{IV} \\
 &\dots\dots\dots \\
 f^{(2\nu)} &\sim x^{(2\nu)} \\
 &\dots\dots\dots
 \end{aligned}$$

conseqüentemente:

$$f \sim (f', x'', f''', x^{IV}, \dots, f^{(2\nu-1)}, x^{(2\nu)}, \dots, 1).$$

Mas:

$$(f', x'', f''', x^{IV}, \dots, f^{(2\nu-1)}, x^{(2\nu)}, \dots, 1) \equiv x,$$

então :

$$f \sim x. \text{ (cf. anexo)}$$

Podemos perceber que, em um período relativamente curto, de apenas duas semanas, que vai de 20 de junho até o início de julho, a correspondência entre Cantor e Dedekind se intensifica, com cartas quase que diárias. Nesta época, uma carta de Halle para Brunswick levava um dia para chegar ao seu destino, ou seja, contando o tempo de ida e volta, temos um período de pelo menos dois dias entre enviar uma carta e receber sua resposta. Observando as datas das cartas, podemos perceber que Cantor estava tão ansioso em conhecer as idéias e a opinião de Dedekind, que nem esperava a resposta de uma carta para enviar outra.

Antes mesmo de receber a carta de Dedekind, datada de 2 de julho, Cantor lhe escreve, nesta mesma data, agradecendo mais uma vez sua colaboração e pedindo que ele continuasse a comunicar-lhe sua opinião sobre os resultados obtidos por ele.

(Carta: Selo do correio de 2-7-77)

Estou muito feliz que você estudou meu trabalho e o encontrou exato. Eu lhe peço que persevere em seu projeto e me comunique suas idéias sobre o significado do resultado, em detalhes e com precisão; de acordo com elas, gostaria de formar o meu julgamento sob a forma de prosseguir com o assunto.⁹⁰

⁹⁰ Je suis très heureux que vous ayez étudié mon travail et l'avez trouvé exact. Je vous prie, de persévérer dans votre projet et de me communiquer vos idées sur la signification du résultat, en détail et avec précision ; d'après elles j'aimerais former mon jugement sur la façon de poursuivre toute l'affaire.[CAVAILLÈS, p.216, 1962]

No mesmo dia desta segunda carta, Dedekind satisfaz o pedido de Cantor e lhe envia bem mais que um cartão-postal; em vez disso, ele lhe manda uma longa carta em que o aconselha a não publicar seu resultado, antes que se faça um exame mais aprofundado. Justifica-se dizendo que a propensão de Cantor em achar que depois do resultado obtido por ele, o número de coordenadas de um certo espaço n -dimensional era algo de menor importância, tinha que ser analisada com mais calma e precisava de um tempo para amadurecer.

Vejamos o que Dedekind lhe escreveu:

Examinei mais uma vez sua demonstração, e não encontrei nenhuma lacuna; estou convencido de que seu interessante teorema é exato e o felicito. Mas queria, como já lhe anunciei em meu cartão postal, fazer uma observação, que é dirigida *contra* as conseqüências que você acrescentou na sua carta de 25 de junho, a comunicação e a demonstração do teorema, e que trata do conceito de uma multiplicidade contínua a p dimensões. De acordo com o que você diz, poderia parecer - mas a minha opinião pode ser inexata - que queria, a partir de seu teorema, colocar em dúvida o significado ou a importância deste conceito; você diz, por exemplo, ao fim desta carta: “Parece-me então que todas as deduções filosóficas ou matemáticas que utilizam esta hipótese errônea” [aquela do caráter determinado do número de dimensões] “são inadmissíveis. É necessário antes procurar a diferença que existe entre duas variedades com um número diferente de dimensões, por alguma razão completamente diferente desta, geralmente mantida para característica, do número de coordenadas independentes”.

Ao encontro deste ponto de vista, declaro estar convencido (apesar de seu teorema, ou de preferência, em conseqüência das considerações causadas por seu teorema) ou crer (ainda não tive tempo de fazer nem mesmo uma tentativa de uma demonstração) que o número de dimensões de uma multiplicidade contínua é, depois como antes, o primeiro e mais importante de seus invariantes, e devo tomar aqui a defesa de todos os que têm escrito sobre este assunto até agora. Aceito de bom grado que esta constância do número de dimensões exige de fato uma demonstração, e que, enquanto esta demonstração não for feita, temos o direito de pôr em dúvida a proposição.

Mas não duvido desta constância, embora pareça anulada por seu teorema. Mas todos os autores evidentemente fizeram a hipótese tácita, completamente natural que, para uma nova determinação dos pontos de uma multiplicidade contínua através de novas coordenadas, estas últimas devem ser também funções *contínuas* (em geral) das antigas coordenadas, para que o que aparece como sendo continuamente conexo, na primeira determinação de posição, permaneça continuamente ligada na segunda determinação de posição. Creio, por conseguinte, provisoriamente, na exatidão do teorema seguinte: “Se tivermos êxito em estabelecer uma correspondência completa, unívoca e recíproca entre os pontos de uma multiplicidade contínua A a a dimensões por um lado, e os pontos de uma multiplicidade contínua B a b dimensões, por outro lado, então, se a e b são *diferentes*, esta correspondência é necessariamente *descontínua* em toda parte”. Este teorema explicaria também o fenômeno que se manifestou no momento da sua

primeira demonstração de seu teorema, isto é precisamente a deficiência desta demonstração; a relação que você queria estabelecer (com a ajuda das frações decimais) entre os pontos de um domínio a p dimensões e os pontos “de um segmento a uma dimensão” teria sido, se não me engano, *contínua*, contanto que somente tenha englobado *todos* os pontos do segmento a uma dimensão; do mesmo modo, em sua demonstração atual, a correspondência *inicial* entre os pontos do segmento a p dimensões, cujas coordenadas são todas irracionais, e os pontos a uma coordenada igualmente irracional do segmento a uma dimensão é, a meu ver, também contínua quanto possível em certo sentido (pequenas variações); mas, para preencher as lacunas, você é obrigado a introduzir, na correspondência, uma descontinuidade, que causa uma vertigem, uma descontinuidade que reduz tudo a átomos, tal que toda parte continuamente conexa, tão pequena que seja, de um dos domínios tem uma imagem completamente despedaçada, descontínua.

Espero ter me explicado bastante claramente; esta carta não tem outro objetivo senão lhe solicitar não empreender publicamente polêmica contra os artigos de fé admitidos até agora da teoria das multiplicidades, antes de ter submetido minha objeção a um exame aprofundado.

Brunswick, 2 de julho de 1877 (cf. anexo)

Esta carta de Dedekind, datada de 2 de julho, foi, sem dúvida alguma, a faísca que acendeu em Cantor a chama do que viria a ser a sua teoria dos números cardinais transfinitos. Quando Dedekind escreve que “... para preencher as lacunas, você é obrigado a introduzir, na correspondência, uma descontinuidade, que causa uma vertigem, uma descontinuidade que reduz tudo a átomos, tal que toda parte continuamente conexa, tão pequena que seja, de um dos domínios tem uma imagem completamente despedaçada, descontínua.”, a impressão que se tem é que Cantor, que a princípio abstraía apenas a natureza dos elementos do conjunto para obter os números ordinais transfinitos, agora dá um segundo salto na abstração. Os elementos agora são vistos como independentes de sua natureza e da sua ordem e, deste modo constituem o que podemos chamar de “unidades cardinais” que, juntas, formam os números cardinais transfinitos.

Afirma Gomide [p.272, 2000]:

Na obra de Cantor, a noção de infinitos elementos em uma classe ou agregado é levada a um nível de abstração que nunca poderia ser alcançado mediante uma atitude empirista, uma vez que a seqüência de alefs indica conjuntos nos quais a infinitude de suas extensões vai se tornando cada vez mais compacta, mais densa, algo que se remete à prática matemática do *insight* e não a sugestões oriundas do que é observado no domínio sensorial, empírico.

Assumindo este ponto de vista, espaços de dimensões diferentes podem ser vistos como conjuntos equivalentes, já que existe uma correspondência biunívoca entre eles. Do mesmo modo que podemos

“esticar um segmento de reta” de qualquer comprimento até obtermos a reta completa, podemos também, por exemplo, partindo deste mesmo segmento “esticá-lo” de tal modo que ele se transforme num quadrado, cubo etc.

Neste período, as idéias ainda estão se formando e a impressão que se tem é que, para Cantor, os conceitos de dimensão e número de coordenadas de um espaço que eram vistos como equivalentes até então, tinham que ser revistos e demonstrados.

Somente dois dias depois, em 4 de julho, Cantor acusa o recebimento da carta de Dedekind:

Halle, 4 de julho de 1877

Fiquei muito feliz de receber a sua carta de 2 de julho, e lhe agradeço as observações precisas e extraordinariamente relevantes.

No fim da minha carta de 25 de junho, contra a minha vontade, dei a impressão de querer, pela minha demonstração, me opor ao conceito em si de multiplicidade contínua p vezes estendida; no entanto, todos os esforços não têm outro objetivo senão o de clarificar este conceito e lhe dar um fundamento correto. Quando dizia: “Parece-me então que todas as deduções filosóficas ou matemáticas que utilizam esta hipótese errônea são inadmissíveis”, não é “ao caráter determinado do número de dimensões” que se refere esta hipótese, mas ao caráter determinado das coordenadas independentes, cujo número é suposto por certos autores igual, em qualquer circunstância, ao número de dimensões, enquanto que, se toma o conceito de coordenadas na sua generalidade, sem nenhuma hipótese sobre a natureza das funções utilizadas, o número de coordenadas independentes, unívocas, completas, pode-se, como demonstrei, ser trazido a qualquer número dado. Sei também do seu aviso que, se impusermos que a correspondência seja contínua, pode-se então pôr em relação unívoca apenas variedades com um número igual de dimensões, e que, desta maneira, o número de coordenadas independentes constitui um invariante que poderia conduzir à definição do número de dimensões de uma variedade contínua.

Não estou, no entanto, ainda capaz de reconhecer a que grau pode se elevar as dificuldades por este caminho (que conduz ao conceito do número de dimensões), porque não sei se estamos em condições de delimitar o conceito de correspondência contínua em geral. Mas da possibilidade de tal delimitação me parece depender tudo neste caminho.

Creio enxergar outra dificuldade nisto que esta via não conduziria sem dúvida desde que a variedade deixasse de ser contínua em toda a parte; e, no entanto, gostaria de ter neste caso também algo que correspondesse ao número de dimensões, tanto quanto, para as multiplicidades que se apresentam na natureza; a sua continuidade por toda a parte parece difícil de estabelecer.

Queria apenas mostrar com estas linhas que estou bem longe de querer utilizar incondicionalmente o meu resultado contra os artigos de fé da teoria das multiplicidades, e, bem ao contrário, desejo poder contribuir com a sua ajuda para consolidar tanto quanto possível os teoremas. Não queria incomodá-lo mais hoje; peço-lhe, se tiver tempo, que examine as questões que se impõem, de não desprezar este trabalho, e de indicar-me, em seguida, os seus resultados. (cf. anexo)

Quando Cantor define número cardinal de um conjunto, ele pressupõe que os elementos deste conjunto são como “átomos” isolados, em que o número cardinal representa a quantidade de elementos daquele conjunto. Por exemplo, o conjunto dos números reais, depois de abstraídas

a natureza e a ordem de seus elementos, não pode ser confundido com o objeto geométrico que é a reta real com suas propriedades específicas como comprimento e dimensão. Em termos de número cardinal, um segmento de reta com qualquer medida, uma semi-reta, ou ainda, uma reta são exatamente iguais. O mesmo acontecendo com a reta e o plano que continuam exatamente iguais, em termos de potência, se retiramos um ponto de cada um deles; já do ponto de vista geométrico, a reta fica dividida em duas partes quando se tira um ponto, o que não acontece com o plano. Ou seja, apesar desses dois conjuntos serem equipotentes, as estruturas topológicas de cada um são diferentes.

Depois dessas três semanas de intensa correspondência com Dedekind, Cantor finalmente escreve o artigo *Uma contribuição à teoria dos conjuntos*, com a data de 11 de julho de 1877.

Este artigo foi tratado com muita desconfiança por Kronecker que se opôs ostensivamente a ele. Somente, no ano seguinte, em 1878, seu artigo foi publicado no *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, também chamado de *Jornal de Borchardt*.

Em uma carta de 23 de outubro, Cantor demonstra sua impaciência em ver publicada suas pesquisas. Dauben sustenta a tese de que Kronecker tenha deliberadamente tentado impedir a publicação deste artigo e afirma que “embora Kronecker não tenha sido bem sucedido em suprimir o artigo de Cantor, o atraso na publicação representou o primeiro conflito maior que Cantor experimentou sobre a aceitação de seu trabalho”. [DAUBEN, p.70, 1990] Mas, segundo Dugac [p. 123, 1976], na realidade não houve atraso proposital na publicação de seu artigo, pois todos os artigos que saíram no volume 83, de 1877, possuem data anterior a junho de 1877.

Depois disso, Cantor nunca mais se interessou em publicar neste periódico. É possível que este fato já tenha sido um indício dos problemas mentais que Cantor viria a apresentar mais tarde,

como por exemplo, a mania de perseguição. Os artigos que vieram a seguir, com exceção do citado abaixo, foram publicados no *Mathematische Annalen* até o ano de 1883.

Em 1879, Cantor, tentando responder à questão da invariância das dimensões, publica em um jornal da Sociedade Real de Ciências e da Universidade Georg-Augustus, em Göttingen, um artigo intitulado *Sobre um teorema da teoria dos espaços invariantes* [(9) da lista 1.9].

5.2.2 Paralelo entre as cartas mencionadas acima e o artigo publicado

Usaremos, para fazer este paralelo, a versão em francês publicada no *Acta Mathematica* 2, com a data de 11 de junho de 1883.

Cantor começa seu artigo, definindo equipotência entre dois conjuntos e, a seguir, o que são subconjuntos, que ele denomina de *partes integrantes*. Usando estes conceitos, ele define uma ordem entre potências diferentes. Cantor observa que, para conjuntos finitos, a noção de *potência* se confunde com a de *número* (inteiro positivo), já que dois conjuntos finitos somente têm a mesma potência se o número de seus elementos é o mesmo. Ainda na introdução, ele observa que subconjuntos de conjuntos finitos têm sempre uma potência menor que o próprio conjunto, o que não acontece nos conjuntos infinitos.

A única vez em que Cantor cita o nome de Dedekind ocorre na página 312, quando este associa, ao conjunto dos números inteiros positivos, a menor potência que um conjunto infinito pode ter e que, no entanto, é muito rica e extensa. Como exemplo, Cantor dá todos os conjuntos que Dedekind chama de “corpos finitos” em suas pesquisas sobre os números algébricos.

A respeito dos conjuntos desta primeira classe (que têm a potência do enumerável), temos os seguintes teoremas:

- Se M é um conjunto da primeira classe (que tem a potência da seqüência dos números inteiros positivos), cada parte integrante infinita de M tem a mesma potência.
- Se a seqüência $M', M'', M''' \dots$ é finita ou simplesmente infinita de conjuntos na qual cada um dos elementos têm a primeira potência, o conjunto M que resulta da reunião de $M', M'', M''' \dots$, tem também a primeira potência.

Ainda na introdução, Cantor examina os conjuntos contínuos, de dimensão n , que, no seu artigo de 1873 [(7) da lista 1.9], ele já havia mostrado que tinham uma potência maior que a primeira. Ele cita as pesquisas de Riemann, Helmholtz e outros sobre as hipóteses que servem de fundamentos para a geometria e cuja característica essencial é que seus elementos dependem de n variáveis reais, contínuas, independentes entre si, de modo que, a cada elemento do conjunto, pertence um sistema de valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ admissível, e, reciprocamente, a cada sistema de valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ admissível, pertence um certo elemento do conjunto. E acrescenta que, geralmente, como resultado da seqüência destas pesquisas, supõe-se tacitamente que a correspondência dos elementos do conjunto e do sistema de valores $x_1, x_2, \dots, x_n$ posta como base, é contínua, de modo que, a cada mudança infinitamente pequena do sistema de valores $x_1, x_2, \dots, x_n$, corresponde uma mudança infinitamente pequena dos elementos correspondentes do conjunto e, reciprocamente, a cada mudança infinitamente pequena dos elementos do conjunto, uma mudança semelhante dos valores de suas coordenadas.

Cantor afirma então que, se deixarmos esta suposição de lado (que é freqüente nos tratados desses autores), em relação à correspondência entre o conjunto e suas coordenadas, não admitindo nenhuma limitação, ele mostrará que esta característica, considerada pelos autores como *essencial* (segundo a qual um conjunto *n-upla* contínuo é tal que podemos determinar os elementos por n coordenadas reais, contínuas, independentes uma da outra) torna-se

absolutamente sem valor. Podemos observar que Cantor, a despeito dos avisos de Dedekind, na carta do dia 2 de julho, para que ele evitasse polemizar sobre o problema do número de coordenadas de um espaço relacionado a sua dimensão, não deixa de citar o assunto em seu artigo.

Na seção 1, Cantor expõe o problema que havia mencionado inicialmente para Dedekind, na sua carta de 5 de janeiro de 1874, sobre existir ou não uma correspondência entre um segmento de reta e um quadrado, de uma maneira mais geral: primeiro trabalhando com coordenadas e, a seguir, em (B), relacionando dois conjuntos com dimensões m e n quaisquer.

- (A) Sejam $x_1, x_2, \dots, x_n$ n grandezas reais, variáveis, independentes entre si, de modo que cada uma pode tomar todos os valores ≥ 0 e ≤ 1 , e seja t outra variável compreendida nos mesmos limites ($0 \leq t \leq 1$), podemos fazer corresponder esta grandeza t ao sistema das n grandezas $x_1, x_2, \dots, x_n$, de tal modo que, a cada valor determinado de t , pertence um sistema de valores determinados $x_1, x_2, \dots, x_n$ e vice-versa, a cada sistema de valores determinados $x_1, x_2, \dots, x_n$, um certo valor de t .

Como consequência desse teorema, segue este outro, que é nosso objetivo:

- (B) Podemos fazer corresponder, de uma maneira completa e de maneira única, um conjunto contínuo de dimensão n a um conjunto contínuo de uma só dimensão; dois conjuntos contínuos, um de dimensão n e outro de dimensão m , sendo n maior, menor ou igual a m , têm a mesma potência; os elementos de um conjunto contínuo a n dimensões podem ser determinados univocamente por uma só coordenada t contínua e real: mas eles podem também ser determinados univocamente por um sistema de m coordenadas contínuas $t_1, t_2, \dots, t_m$.

Na sua carta de 25 de junho, Cantor cita apenas o seguinte teorema:

- (A) “Uma multiplicidade contínua a e dimensões pode ser colocada em correspondência unívoca com uma multiplicidade contínua a uma dimensão, ou (que é outra forma do mesmo teorema) os pontos (elementos) de uma multiplicidade a p dimensões podem se determinar por uma coordenada real t , de tal modo que, a cada valor real de t no intervalo $(0 \dots 1)$, corresponde um ponto da multiplicidade, mas também reciprocamente, que a cada ponto da multiplicidade, corresponde um valor determinado de t no intervalo $(0, \dots, 1)$.”

Na seção 2, ele faz a demonstração do seu teorema, já usando as frações contínuas ao invés das decimais, mostrando que n coordenadas irracionais podem se relacionar biunivocamente a apenas uma, também irracional, como exposto para Dedekind nesta mesma carta. Ainda demonstra o teorema (B), que diz que, se existe uma correspondência válida para os

irracionais, então também existe uma correspondência válida para todos os reais, no intervalo (0...1). Este teorema aparece na seção 3 (p.316), como:

(D) “Uma grandeza variável e , que pode tomar todos os valores numéricos *irracionais* do intervalo (0...1), pode ser colocada em correspondência *unívoca* com uma variável x , que toma todos os valores reais, a saber, racionais e irracionais, que são ≥ 0 e ≤ 1 , de modo que a cada valor irracional de $0 < e < 1$, corresponde um valor real de $0 \leq x \leq 1$ e somente um e , reciprocamente, a cada valor real de x , corresponde um certo valor irracional de e .”

Sua demonstração aparece na seção 4, com alguns detalhes que não se apresentam nesta carta, entre eles a demonstração de que o conjunto dos números racionais pode ser bem-ordenado, isto é, seus elementos podem ser colocados sob a forma de uma seqüência (cf. seção 3.2.10), além disso, ele dá a seqüência $\varepsilon_v = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2^v}$ que na carta ele considera como uma seqüência arbitrária ε_v de números irracionais qualquer, que satisfaça as condições $\varepsilon_v < \varepsilon_{v+1}$ e $\lim(\varepsilon_v) = 1$ para $v = \infty$.

Alguns meses depois de Cantor ter escrito o artigo, porém antes da sua publicação, ele comunica outra demonstração para Dedekind, em uma carta com data de 23 de outubro de 1877.

... Sobre as pesquisas que fiz no verão passado, deixei aos cuidados do Sr. Borchardt, há um trimestre, um trabalho que redigi sob o título “Uma contribuição à teoria dos conjuntos”. Espero que em breve seja publicado. Como me foi permitido aproveitar os seus conselhos amigáveis, pode te interessar saber que encontrei, para um de meus teoremas, uma demonstração ainda mais simples. Se duas multiplicidades bem definidas podem ser postas em correspondência unívoca e completa, elemento por elemento, uma com a outra, uso então dizer que têm *mesma potência* ou ainda que são *equivalentes*; chamo também *equivalentes* duas variáveis reais a e b , quando podem ser postas em correspondência unívoca e completa uma com a outra e escrevo, neste caso, como você sabe:

$$a \sim b$$

Trata-se então do seguinte teorema :

Se e é uma variável, que toma todos os valores irracionais > 0 e < 1 , e x uma variável que toma todos os valores racionais e irracionais ≥ 0 e ≤ 1 , temos:

$$e \sim x$$

Demonstração: Seja φ_v o termo geral de uma seqüência, que se compõe de todos os números racionais ≥ 0 e ≤ 1 ; seja η_v o termo geral de uma seqüência formada de quaisquer números irracionais distintos > 0 e < 1 , por exemplo:

$$\eta_v = \frac{\sqrt{2}}{2^v}$$

h designará a variável que toma todos os valores do intervalo (0...1) com exceção dos φ_v e dos η_v .

Então:

$$(1) \quad \begin{aligned} x &\equiv \{h, \eta_v, \varphi_v\} \\ e &\equiv \{h, \eta_v\}. \end{aligned}$$

Para a última fórmula, podemos também escrever:

$$(2) \quad e \equiv \{h, \eta_{2v-1}, \eta_{2v}\}.$$

Se compararmos as fórmulas (1) e (2) observamos que :

$$h \sim h ; \eta_v \sim \eta_{2v-1} ; \varphi_v \sim \eta_{2v},$$

resulta que:

$$x \sim e, \text{ C.Q.F.D.}$$

Pode ser que você tenha estudado mais a questão de saber se, para a determinação do conceito da multiplicidade n-upla contínua, a condição de a correspondência ser contínua é suficiente de modo que o conceito seja reforçado por si mesmo, assegurando contra qualquer contradição?

P.S. : Olhei o novo manual de análise de Lipschitz; você gostou? (cf. anexo)

Esta demonstração mais curta aparece na seção 6, em que Cantor justifica não ter omitido as outras demonstrações, mais complicadas, considerando o interesse que elas têm por si mesmas. Nesta carta a colaboração de Dedekind na obra de Cantor fica bem explícita, quando ele reconhece que aproveitou seus conselhos amigáveis.

Na seção 5, Cantor demonstra o teorema:

(G) Seja y uma variável que pode tomar todos os valores do intervalo $(0...1)$ somente com exceção do 0, x uma variável que admite todos os valores do intervalo $(0...1)$ sem exceção, então se tem:
 $y \sim x$.

Nesta mesma carta, do dia 25, este teorema aparece como:

(D) “Um número y , que pode tomar todos os valores do intervalo $(0...1)$ excetuando somente o valor 0, pode ser colocado em correspondência unívoca com um número x que toma todos os valores deste intervalo sem exceção.”

No artigo, esta demonstração é feita graficamente de modo exatamente igual ao desta carta.

Ainda na seção 5, com o exposto na carta de 29 de junho, Cantor generaliza sua demonstração para um intervalo $(\alpha \dots \beta)$ qualquer.

Na seção 7, ele comenta, sem citar o nome de Dedekind, sobre a dificuldade que o uso das frações decimais acarretaria, problema exposto na carta de Dedekind, do dia 22 de junho, para ele.

Finalmente, na seção 8, Cantor encerra o artigo fazendo uma generalização de seu teorema para conjuntos com um número infinito de dimensões. Cantor teve a brilhante idéia de usar um método análogo à demonstração que o conjunto dos números racionais é bem-ordenado para conseguir transformar as infinitas coordenadas de um espaço de dimensão infinita em um espaço unidimensional.

Esta generalização está essencialmente ligada à hipótese de que as dimensões infinitamente numerosas formam elas próprias um conjunto da primeira classe ou potência.

Ligado ao teorema (A), já enunciado, temos o seguinte:

(A') "Seja $x_1, x_2, \dots, x_\mu$, uma série simplesmente infinita de grandezas variáveis, reais, independentes uma da outra, em que cada uma pode tomar todos os valores ≥ 0 e ≤ 1 , e seja t uma outra variável com os mesmos limites ($0 \leq t \leq 1$), podemos fazer corresponder, por uma operação em sentido único, esta grandeza t ao sistema $x_1, x_2, \dots, x_\mu, \dots$, que são em número infinito."

Este teorema (A') nos leva, com a ajuda do teorema (D), ao seguinte:

(C') "Seja $e_1, e_2, \dots, e_\mu, \dots$ uma série infinita de grandezas variáveis independentes uma da outra, em que cada uma pode tomar todos os valores numéricos irracionais do intervalo (0...1) e seja d uma outra variável irracional com os mesmos limites, podemos unir esta grandeza d , por uma operação em sentido único, ao sistema de grandezas em número infinito: $e_1, e_2, \dots, e_\mu, \dots$ "

A demonstração de (C') se faz da maneira mais simples, aplicando o desenvolvimento da fração contínua e pondo, como na § 2:

$$e_\mu = (\alpha_{\mu,1}, \alpha_{\mu,2}, \dots, \alpha_{\mu,\nu}, \dots)$$

para $\mu = 1, 2, \dots, \infty$.

$$d = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_\lambda, \dots)$$

e, estabelecendo entre os números inteiros positivos α e β , a relação:

$$\alpha_{\mu,\nu} = \beta_{\lambda},$$

em que:

$$\lambda = \mu + \frac{(\mu + \mu - 1)(\mu + \nu - 2)}{2},$$

Com efeito a função $\lambda = \mu + \frac{(\mu + \mu - 1)(\mu + \nu - 2)}{2}$, como é fácil de mostrar, goza desta propriedade notável de representar todos os números inteiros positivos, e cada um deles, uma vez somente, quando μ e ν tomam igualmente, independentemente um do outro, todos os valores positivos inteiros.

Fazendo a analogia com os racionais, vamos ver como fica a tabela que relaciona μ e ν , com o λ correspondente. A idéia é considerar sempre todas as possibilidades do par que tem a mesma soma, começando com dois, até o infinito. O número subscrito é o valor do λ correspondente ao par considerado.

1,1 ₁	1,2 ₂	1,3 ₄	1,4 ₇	...
2,1 ₃	2,2 ₅	2,3 ₈	2,4 ₁₂	...
3,1 ₆	3,2 ₉	3,3 ₁₃	3,4 ₁₈	...
4,1 ₁₀	4,2 ₁₄	4,3 ₁₉	4,4 ₂₅	...
.....				...

Cantor encerra seu artigo, enunciando pela primeira vez a Hipótese do contínuo, isto é, a questão de saber como se comportam, do ponto de vista de sua potência, as diferentes partes de uma linha reta contínua, a saber, os diferentes conjuntos de pontos que nós podemos imaginar em número infinito. Se agruparmos, em diferentes classes, conjuntos de potências diferentes e, na mesma classe, conjuntos de mesma potência, chegaremos à conclusão de que o número de classes obtidas depois deste agrupamento é um número finito e igual a dois.

5.3 DESDOBRAMENTOS E OUTRAS DEMONSTRAÇÕES DO TEOREMA DE CANTOR

De uma maneira bastante simples, enunciamos o Teorema de Cantor como: O número de dimensões de um conjunto independe da sua potência. No entanto, demonstra-se que a correspondência biunívoca entre dois espaços contínuos de mesma dimensão, não pode também ser contínua, ou seja, não respeita a ordem e a conexão entre os dois conjuntos considerados.

5.3.1 Demonstração de que a dimensão é um invariante topológico

Cantor acreditou que sua descoberta levantava a questão de que a dimensão de um espaço não podia ser olhada simplesmente pelo número de coordenadas necessárias para determinar um ponto; Dedekind chamou a atenção de que, como a correspondência biunívoca não era contínua, os espaços de dimensões diferentes não eram topologicamente equivalentes, ou seja, a dimensão continuava sendo um invariante topológico.

O que era especialmente importante sobre o resultado de Cantor, entretanto, era sua ligação explícita de aplicações e correspondências à questão de dimensões de figuras e espaços. Isto provou ser um desafio direto aos fundamentos da geometria, especialmente ao conceito de dimensão ao qual geômetras até então usavam intuitivamente, embora indiscriminadamente.⁹¹

Uma demonstração bem simples dessa impossibilidade foi dada por Sierpinski [p.70,1965]:

Teorema: Não existe nenhuma função contínua $f(x;y)$ de duas variáveis reais x e y (mesmo contínua somente em relação a cada uma das variáveis separadamente) a qual para diferentes pares de números reais $(x;y)$ assumiria sempre valores reais diferentes.

Demonstração: Por absurdo, vamos assumir que tal função $f(x;y)$ exista.

⁹¹ What was especially important about Cantor's result, however, was its explicit linkage of mappings and correspondences to the questions of the dimensions of figures and spaces. This proved to be a direct challenge to the foundations of geometry, especially to the concept of dimension which geometers until then had been using intuitively but uncritically.[DAUBEN, p.941, 2003]

Seja,

(#) $\varphi(x) = f(x; 0)$, isto é, $\varphi(x)$ será uma função contínua na variável x . Vamos escrever $\varphi(0) = a$ e $\varphi(1) = b$. Da suposição que, para pares diferentes $(x; y)$, correspondam valores diferentes da função $f(x; y)$, segue por (#) que $a \neq b$, por exemplo, $a < b$.

A função $\varphi(x)$, sendo contínua no intervalo $]0; 1[$, assume neste intervalo todos os valores contidos entre $\varphi(0) = a$ e $\varphi(1) = b$; conseqüentemente, no intervalo $]0; 1[$ existe um valor x_0 (no mínimo um) tal que $\varphi(x_0) = \frac{1}{2}(a + b)$.

Além disso, seja $\Psi(y) = f(x_0; y)$, isto é, $\Psi(y)$ será uma função contínua na variável y e teremos:

$$\Psi(0) = f(x_0, 0) = \varphi(x_0) = \frac{1}{2}(a + b)$$

como $a < b$, $a < \Psi(0) < b$ e como a função é contínua para $y = 0$, nós concluiremos que, para y suficientemente pequeno, temos que ter $a < \Psi(y) < b$, isto é, $a < f(x_0, y) < b$.

Essa desigualdade, entretanto, é impossível para $y \neq 0$, já que a função $\varphi(x) = f(x; 0)$ assume para $0 < x < 1$ todos os valores do intervalo $]a; b[$ e a função $f(x; y)$ dá diferentes valores para diferentes pares das variáveis $(x; y)$. C.Q.D.

Depois da publicação desse artigo, houve uma avalanche de outros relacionados a ele com o objetivo de aperfeiçoá-lo. Nos anos que se seguiram, várias demonstrações foram feitas neste sentido. Jakob **Lüroth** (1844 – 1910) deu várias provas para os casos de dimensão menor ou igual a três, enquanto Enno **Jürgens** (1849 – 1907) apresentou uma prova para o caso bidimensional. Johannes **Thomae** (1840 – 1921) tentou uma primeira demonstração geral sobre a invariância das dimensões que logo se mostrou deficiente e, em 1878, Eugen **Netto** (1848 –

1919) deu uma segunda prova geral, por indução, mas ela também não foi completamente satisfatória.

Vejamos uma observação que o próprio Cantor faz sobre esses artigos, consequência de seu trabalho, em uma carta para Dedekind, com a data de 29 de dezembro de 1878:

O fato de saber se as multiplicidades contínuas com um número diferente de dimensões podem ser colocadas em relação unívoca e contínua, ou mais precisamente sobre o teorema segundo o qual isso não é possível, foi o assunto das dissertações de Thomae, Lüroth, Jürgens e, há poucos dias, de Netto, no jornal de Borchadt, desde a publicação de meu trabalho sobre a teoria das multiplicidades; no entanto, me parece que o assunto ainda não se esgotou.⁹² (cf. anexo)

Em 1879, Cantor publica o artigo *Sobre um teorema da teoria dos espaços invariantes* [(9) da lista 1.9], já citado, em que faz uma demonstração, também por indução, que foi aceita até 1899, quando Jürgens encontra um contra-exemplo.

O enunciado deste novo teorema de Cantor diz o seguinte: Não existe aplicação **contínua** de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^p$, $n < p$, tal que, a todo elemento de $\mathbb{R}^n$, corresponde um só elemento de $\mathbb{R}^p$ e, a todo elemento de $\mathbb{R}^p$, um ou vários elementos de $\mathbb{R}^n$.

Detalhes essenciais da topologia de conjuntos de pontos tinham sido pesquisados, e muitas ferramentas topológicas anteriormente não disponíveis, mas necessárias para resolver a questão da invariância da dimensão, foram aperfeiçoadas.

Somente em 1911, **Brouwer** (1881 – 1966), no artigo Prova da invariância do número de dimensões (*Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl*) [BROUWER], deu a primeira prova rigorosa da invariância da dimensão que usava resultados sobre topologia do plano, obtidos por Arthur **Schönflies** (1853 – 1928). [DAUBEN, p.942, 2003]

⁹² La question de savoir si des multiplicités continues d'un nombre différent de dimensions peuvent être mises en correspondance univoque et continue, ou plutôt sur le théorème suivant lequel cela n'est pas possible, a fait l'objet, depuis la parution de mon travail sur la théorie des multiplicités, de mémoires de Thomae, Lüroth, Jürgens et, il y a quelques jours, de Netto, dans le journal de Borchardt; il me semble pourtant que la question n'est pas encore complètement réglée. [Cavaillès, p. 221, 1962]

Os resultados obtidos por Cantor e Netto foram o ponto de partida para a investigação de curvas que completam o espaço (space-filling curves) e que são estudadas até os dias atuais.

Um exemplo disso nos foi dado por G. **Peano** [1890] que inventou uma curva **contínua** que passa por todos os pontos de um quadrado. Peano estabelece, entre os pontos de um segmento e os pontos da área de um quadrado, uma correspondência que é: 1) unívoca, porque, a cada ponto do segmento, corresponde um e único ponto do quadrado; 2) contínua, de modo que, a pontos vizinhos sobre o segmento, correspondem pontos vizinhos no quadrado. Esta correspondência porém não é biunívoca, pois, a cada ponto situado sobre um lado do quadrado, correspondem dois pontos do segmento; e, a cada vértice, correspondem quatro desses pontos.[COSTA, p.319, 1981] Essa curva serve como um contra-exemplo para o teorema enunciado por Cantor.

5.3.2 Demonstração dada por Sierpinski para o Teorema de Cantor

Waclaw **Sierpinski** (1882 – 1969), em seu livro *Leçons sur les nombres transfinis* [1928], faz uma demonstração parecida com a de Cantor, mas com uma modificação importante que lhe permite trabalhar com a representação decimal dos números reais. Sierpinski também usa a representação infinita para as decimais exatas, ou seja, se o número terminar em uma seqüência de zeros, ele a substitui por uma seqüência de noves, diminuindo uma unidade do último número diferente de zero. Por exemplo, o número 0,30470000... fica representado por 0,30469999...

A diferença dessa demonstração para a de Cantor está na separação das casas decimais, que ao contrário dele, que as separa em ímpares e pares, agora ficam separadas de modo que cada decimal não-nula fique junta com os zeros que a precedem (excetuando o primeiro zero que aparece antes da vírgula). Deste modo, a sucessão formada pelo número

$e_1 = 0,120300040500067....$ fica 1; 2; 03; 0004; 05; 0006; 7;, chamada por Sierpinski de sucessão de König.

Se tivermos outro número $e_2 = 0,0930070430500003...$, a sucessão de König para ele seria 09; 3; 007;04;3; 05;00003;

O par ordenado $(e_1; e_2) \in \mathbb{R}^2$ fica relacionado com o número $d \in \mathbb{R}$, em que $d = 0,1092303007000404053....$, intercalando agora os termos ímpares e pares das seqüências de König formadas por e_1 e e_2 respectivamente.

Essa relação é biunívoca, como desejada e números que apresentam uma alternância de um algarismo e o zero, como 0,47805070903020..., citado por Dedekind em sua carta a Cantor, agora podem ser obtidos. Neste exemplo, bastaria pegar o par ordenado $(0,480703...; 0,7050902...)$. [GAMA, p.27]

5.3.3 Demonstração dada por Huntington para o Teorema de Cantor

Huntington [p.60] apresenta uma demonstração interessante que nos dá uma correspondência biunívoca, **não-contínua**, entre um quadrado e um segmento de reta e que chama a atenção para o fato que a relação de ordem é sacrificada, ou seja, são conjuntos que têm a mesma potência, mas tipos ordinais distintos, isto é, não são similares.

Seja $(x; y) \in]0;1[\times]0;1[$ e $t \in]0; 3[$. Uma correspondência biunívoca entre os pontos do quadrado $]0;1[\times]0;1[$ e os pontos do segmento $]0;3[$ podem então ser estabelecidas como segue:

- 1) Os pontos $(x; y)$, para os quais x e y são ambos racionais, formam um conjunto enumerável e, conseqüentemente, podem ser colocados em correspondência biunívoca com os pontos racionais do segmento $]0;3[$, isto é, os pontos para os quais t é racional.

- 2) Os pontos $(x; y)$, para os quais x é racional e y irracional, são os pontos “irracionais” de um conjunto enumerável de segmentos verticais e podem, conseqüentemente, serem colocados em correspondência biunívoca com os pontos “irracionais” de um conjunto enumerável de segmentos que ocupam, digamos, o último terço do segmento $]0; 3[$.
- 3) Similarmente, os pontos $(x; y)$, para os quais y é racional e x é irracional, podem ser colocados em correspondência biunívoca com os pontos “irracionais” do terço médio do segmento $]0; 3[$.
- 4) Finalmente, os pontos, para os quais x e y são irracionais, podem ser colocados em correspondência biunívoca com os irracionais do primeiro terço da linha, pois todo número irracional a entre 0 e 1 pode ser expresso como uma fração contínua simples que não termina, $a = [a_1; a_2; a_3; \dots]$ que é:

$$e = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

em que $a_1, a_2, a_3, \dots$ são inteiros positivos tal que para o ponto $x = [x_1; x_2; x_3; \dots]$, $y = [y_1; y_2; y_3; \dots]$ no quadrado, nós podemos designar o ponto $t = [x_1; y_1; x_2; y_2; x_3; y_3; \dots]$ sobre a linha; enquanto reciprocamente, o ponto $t = [t_1; t_2; t_3; \dots]$ sobre a linha nós podemos designar o ponto $x = [t_1; t_3; t_5; \dots]$, $y = [t_2; t_4; t_6; \dots]$ no quadrado.

Assim a correspondência entre os pontos de um quadrado e os pontos da linha é completa; e o método é facilmente estendido para qualquer número de dimensões, finito ou infinito enumerável.

CONCLUSÃO

Analizando o processo criativo de Cantor, em relação à criação dos números transfinitos, podemos dizer que tudo começou em 1870, quando ele, estudando a unicidade das séries de Fourier sentiu a necessidade de pesquisar como os conjuntos de pontos de descontinuidade da função representada por esta série, que podiam ser em número infinito, se distribuíam na reta real.

A percepção de que existiam conjuntos discretos e contínuos acarretava não só uma diferença qualitativa, mas também quantitativa. Nesta nova teoria do infinito, este deixa de ser único e a idéia de um infinito que está sempre em formação, potencial, dá lugar a um infinito efetivo, visto como algo completo, mas, mesmo assim, ainda tendo a característica de sempre poder crescer, ir além, dando origem aos números transfinitos.

Na definição dos conjuntos derivados:

$$P^{(0)}, P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(\infty)}, P^{(\infty+1)}, \dots, P^{(\infty.2)}, \dots, P^{(\infty.3)}, \dots, P^{(\infty^2)}, \dots, P^{(\infty^3)}, \dots, P^{(\infty^\infty)}, \dots, P^{(\infty^\infty^\infty)}, \dots$$

podemos observar esta característica facilmente. Como vimos, no capítulo 2, o fato de poderem existir conjuntos derivados que não fossem vazios para nenhum v , finito, fez Cantor pensar, então, que pudesse existir o conjunto derivado P^∞ e seus sucessores.

Paralelamente ao conceito de infinito efetivo, temos o infinito absoluto, aquele que é incapaz de crescer e por isso está ligado ao poder de Deus.

Foram sistemas desse segundo tipo de infinito que acarretaram o aparecimento dos paradoxos na teoria dos conjuntos, mas isso em nada abalou a confiança que Cantor tinha em sua teoria. A distinção entre multiplicidades consistentes e inconsistentes resolveu este problema. As multiplicidades, cujos elementos podem ser pensados como “existindo simultaneamente” de modo que formam um só objeto, Cantor denominou de *conjunto*; já as multiplicidades, como o

sistema composto por todos os ordinais (Ω), ou o sistema composto por todos os cardinais ($\aleph$) foram chamados de inconsistentes; a existência simultânea de seus elementos gera paradoxos de modo que elas não podem ser vistas como um só objeto e, assim como o poder absoluto de Deus, são incapazes de serem aumentadas. Com estas definições, os paradoxos que surgiram na teoria dos conjuntos deixam de existir, já que Ω e $\aleph$ não podem ser considerados como conjuntos.

Analisando as cartas do ano de 1877, principalmente a que Dedekind escreve em 2 de julho, em resposta à carta de 25 de junho, vimos que reta e plano são equipotentes, mas, para passar de um para o outro, é imprescindível que haja uma pulverização da reta de maneira que suas propriedades, como é o caso da dimensão, fiquem diferentes. Neste período, Cantor começa a delinear o que viria a ser a teoria dos cardinais transfinitos. Com a descoberta nada intuitiva que espaços de dimensões diferentes poderiam ter o mesmo “tamanho”, mas propriedades topológicas completamente distintas, foi que Cantor chegou à conclusão de que os elementos de um certo conjunto devem ser vistos como “átomos” isolados de modo que a maneira como estão distribuídos não deve ser considerada, ou seja, devemos abstrair sua ordem; mas, quando pensamos os elementos do conjunto, como entes geométricos, no caso, pontos de um espaço n -dimensional, devemos questionar essa conclusão, pois na realidade, se não considerarmos nenhum tipo de relação entre os pontos de um conjunto infinito, não poderíamos distinguir o enumerável do contínuo. A expressão, *os racionais possuem “buracos” que são preenchidos com os irracionais*, não teria sentido. Concluímos então, que dado um conjunto é imprescindível, para conhecer seu número cardinal, que se abstraia além da natureza também a sua ordem e conseqüentemente propriedades como comprimento e dimensão não podem ser consideradas.

Sobre a questão levantada no quinto capítulo acerca da possibilidade de detectar se, independente da sua correspondência com Dedekind, Cantor teria construído com tanto sucesso

sua teoria, podemos concluir que, ao que tudo indica, a troca de idéias foi fundamental para que Cantor atingisse sucesso na sua construção teórica.

Segundo as anotações de Dedekind, foi ele próprio que de fato demonstrou a enumerabilidade dos números algébricos. Além disso, deu conselhos a Cantor em vários momentos, nas suas demonstrações sobre a equivalência entre reta e plano. Dedekind foi o primeiro a enunciar um teorema a respeito da invariância das dimensões e que afirmava que “se dois espaços têm dimensões distintas, então qualquer função biunívoca entre estes dois espaços será obrigatoriamente descontínua”.

É esse também o pensamento de Pierre Dugac, quando comenta sobre as últimas cartas entre os dois⁹³: Assim acaba esta correspondência que durou 25 anos, correspondência que mostra a importância da influência de Dedekind sobre a obra cantoriana. [DUGAC, p.130, 1976]

Além de Dedekind, também influenciaram Cantor: Felix Klein, editor do *Mathematische Annalen* e mais tarde Mittag-Leffler, editor do *Acta Mathematica*. Esse último, em 11 de março de 1883, escreve para Cantor sugerindo que na tradução para o francês do *Grundlagen* fosse retirada a parte filosófica. [DAUBEN, p. 96, 1990]

Já no final do século XIX, podemos dizer que o quadro se inverte e Cantor passa a influenciar uma nova geração de matemáticos, entre eles Hilbert, Bendixson e Felix Goldscheider, que era professor em classes de Ensino Médio.

Outro dado significativo é que os matemáticos que foram contrários à sua teoria serviram como incentivo para que Cantor prosseguisse em seus estudos e construísse uma aritmética transfinita tão bem fundamentada, que fez com que seus novos números fossem aceitos, como já tinha acontecido com os números negativos, os irracionais e os números complexos.

Apesar de toda a oposição sofrida por Cantor, podemos dizer, que o trabalho realizado por ele, juntamente com Dedekind, foi um divisor de águas para o estudo da análise matemática e tudo o mais que envolvesse o conceito de infinito implícito ou explicitamente em seu desenvolvimento. Alguns exemplos são a definição dos números irracionais e os conceitos de limite e de continuidade.

O próprio Cantor escreve na segunda página do *Grundlagen* [CANTOR, 1883]:

Por mais arriscada que tal ampliação⁹⁴ possa parecer, me atrevo a expressar não só a esperança, senão a firme convicção de que, com o tempo, esta extensão será vista como uma coisa absolutamente simples, adequada e natural.

Podemos dizer que Cantor acertou parcialmente no seu prognóstico, pois apesar da sua teoria ser hoje conhecida entre a maioria dos matemáticos, ela ‘ainda’ não é considerada simples, adequada e muito menos como algo natural. Quem sabe um dia ainda viremos a ensinar a teoria dos números transfinitos para classes do Ensino Médio como fazemos atualmente com os números complexos.

Seria interessante, continuando esta pesquisa, analisar as cartas de Cantor para Mittag-Leffler que foram escritas no ano de 1884 e deram origem ao seu artigo *Princípios de uma teoria dos tipos ordinais* [(22) da lista 1.9], onde ele fazia um estudo abrangente sobre as propriedades dos tipos ordenados. Cantor, seguindo a orientação de Mittag-Leffler, acabou desistindo de publicá-lo.

É importante salientar que, expondo suas dúvidas e apreensões diante de seus correspondentes, principalmente Richard Dedekind, Cantor construiu uma teoria sólida que teve

⁹³ A última carta entre Cantor e Dedekind, que se encontra no livro *Correspondence Cantor-Dedekind* [CAVAILLÈS, p. 247, 1937] com a data de 30 de agosto de 1899, trata da comparabilidade entre os números cardinais transfinitos.

⁹⁴ Em relação aos números ordinais finitos.

seu fechamento com o artigo *Beiträge* [(27) e (28) da lista 1.9], escrito quase no final do século XIX, no qual expõe a teoria dos números cardinais transfinitos e sua aritmética.

Graças à teoria dos números transfinitos criada por Cantor, podemos dizer que a maioria das questões que envolviam o conceito de infinito foram esclarecidas.

Os estudos de Cantor abriram caminho para que outros matemáticos pesquisassem sobre a invariância da dimensão que resultou em um grande desenvolvimento na área da topologia que, no início do século XX, dava seus primeiros passos. Além disso, possibilitaram o reconhecimento de uma variedade de infinitos e de como por meio da aritmética transfinita podemos operar com os números transfinitos relacionados a eles. Assim, o infinito potencial aristotélico finalmente deixa de reinar solitário na matemática, abrindo lugar para que passemos a considerar o infinito efetivo.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BABINI, José. *Historia de las ideas modernas en matematica* – monografia nº 4, Argentina: Universidade de Buenos Aires, 1967.

BARKER, Stephen F., *Filosofia da matemática*. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1969.

BOLZANO, Bernard. *Paradoxes of the infinite*. New Haven: Yale University Press, 1ed. 1851, 1950.

BOREL, Emile, *Leçons sur la théorie des fonctions*. Paris : Gauthier-Villars, 1898.

_____, *Quelques remarques sur les principes de la théorie des ensembles*, Mathematische Annalen 60, pp. 194-195, 1905.

BROUWER L. E. J., *Collected Works – Geometry, analyzes, topology and mechanics*. Nova York: North-Holland Publishing Company, 1976.

CANTOR, Georg. *Extension d'un théorème de la théorie des séries trigonométriques*, traduzido de uma dissertação publicada nos Annales math. De Leipsic t.V, p.123 datado de 8/11/1871, Acta Mathematica 2, tradução redigida por um grupo de matemáticos e aceita por Cantor, 1883

_____, *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 77, 258-262, 1874, ver referência abaixo.

_____, *Sur une propriété du système de tous les nombres algébriques réels*, Acta Mathematica 2, pp.305- 310, tradução do artigo anterior, 1883.

_____, *Une contribution a la théorie des ensembles*, Acta Mathematica 2, pp.311 - 328, 1883, extraído do *Journal de Borchardt*, vol. 84, datado de 1877.

_____, *Sur les ensembles infinis et linéaires de points*, 1, Acta Mathematica 2, pp.349 - 356 1883, originalmente escrito nos Annales math. de Leipsic, vol.15, em janeiro de 1879.

_____, *Sur les ensembles infinis et linéaires de points*, 2, Acta Mathematica 2, pp.357 – 360, 1883, originalmente escrito nos Annales math. De Leipsic, vol. 17, em maio de 1880.

_____, *Sur les ensembles infinis et linéaires de points*, 3, Acta Mathematica 2, pp.361 -371, 1883, originalmente escrito nos Annales math. De Leipsic, vol.20, em março de 1882.

_____, *Sur les ensembles infinis et linéaires de points*, 4, Acta Mathematica 2, pp.372 -380, 1883, originalmente escrito nos Annales math. De Leipsic, vol.21, em setembro de 1882.

_____, *Fondements d'une théorie générale des ensembles (Grundlagen)*, Acta Mathematica 2, pp. 381- 408, originalmente escrito nos Annales math. De Leipsic, vol.21. 1883.

_____, *De la puissance des ensembles parfaits de points*. Acta Mathematica 4, pp.381-392, 1884.

_____, *Principien einer theorie der ordnungstypen erste mittheilung*, Acta Mathematica 124, pp.65 – 106, originalmente escrito em 1884 mas somente publicado em 1970.

_____, *On the theory of the transfinite numbers. Correspondence of Georg Cantor and J. B. Cardinal Franzelin (1885 -1886)* In: Fidelio, vol. III nº 3, 1994. Disponível também em <http://www.schillerinstitute.org/fid_91-96/943_transfinite.html>. Acesso em 04 de abril de 2008.

_____, *Mitteilungen zur Lehre von Transfiniten*, 1887, ver referência abaixo.

_____, *Comunicaciones sobre la teoría de los transfinitos*, tradução do texto anterior feita por J. Bares e J. Climent.

_____, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Parte I, 1895, ver referência abaixo.

_____, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, Parte II, 1897, ver referência abaixo.

_____, *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*, tradução dos dois artigos acima, escrita por P. E. B. Jourdain, Chicago, Dover Publications, Inc, Nova York, 1955, publicado originalmente por Open Court Publishing Company em 1915.

CAUCHY, Augustin Louis. *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*. França : Imprimerie royale, 1821.

CAVAILLÈS, Jean. *Préhistoire la création de Cantor*, Volume VII. Paris : Herman & Cia, Editeurs, 1938.

_____, *Philosophie Mathématique*, Collection Histoire de la Pensée, Hermann, Paris, 1962

_____, *Correspondence Cantor-Dedekind*, 1937. In : *Philosophie Mathématique*, Collection Histoire de la Pensée, Hermann, Paris, 1962

CHARRAUD, Nathalie. *Infini et Inconscient – Essai sur Georg Cantor*. Paris: Anthropos Economica , 1994

COHEN, Paul J., *The independence of the Axiom of Choice*, notas mimeografadas. Departamento de Matemática. E.U.A.: Stanford University, 1963a.

_____, *The independence of the Continuum Hypothesis* Parte I. Proceedings of the National Academy of Sciences, nº 50, E.U.A., 1963b.

_____, *The independence of the Continuum Hypothesis* Parte II. Proceedings of the National Academy of Sciences, nº 51, E.U.A., 1964.

COSTA, M. Amoroso. *As idéias fundamentais da matemática e outros ensaios*. Textos 4. São Paulo: Editora Convívio – EDUSP, 1981.

DAUBEN, Joseph W. *Georg Cantor, his mathematics and philosophy of the infinite*, New Jersey: Princeton University Press, 1ª ed. 1979, 1990.

_____, *Topology: Invariance of dimension*. In: GRATTAN-GUINNESS, I., Companion encyclopedia of the history and philosophy of the mathematical sciences. Inglaterra: The Johns Hopkins University Press, 2003.

_____, *Georg Cantor y la teoría de conjuntos transfinitos*. Disponível em <http://ar.geocities.com/paginadeprueba2005/Cantor/georg_cantor_y_la_teoría_de_transfinitos.htm>. Acesso em 20 de novembro de 2007.

_____, *Georg Cantor and the battle for transfinite set theory*. Disponível em <<http://acmsonline.org/Dauben-Cantor.pdf>>. Acesso em 05 de dezembro de 2008.

DAVENPORT, H. *The higher arithmetic*. Inglaterra: Cambridge University Press, 1999.

DEDEKIND, Richard. *Stetigkeit und irrationale Zahlen*. 1 ed. 1872 Braunschweig: Vieweg, 1969.

_____, *Was sind und was sollen die Zahlen?* Braunschweig: Vieweg, 1888.

DEVLIN, Keith. *The Joy of sets*. Fundamentals of contemporary set theory. Nova York: Springer-Verlag, 1993.

DUGAC, P. *Richard Dedekind et les fondements des mathématiques*. Paris: J. Vrin, 1976.

EDWARDS, H. M. *Kronecker on the foundations of mathematics: in From Dedekind to Gödel: Essays on the development of the foundations of mathematics*. EUA, Jaakko Hintikka, Boston University, 1995.

FEFERMAN, Salomon, *Some application of the notion of forcing and generic sets*. Fundamenta Mathematicae, LVI. Polônia: Panstwowe wydawnictwo naukowe, 1965.

FERREIRÓS DOMÍNGUES, José, *On the relations between Georg Cantor and Richard Dedekind*, *Historia Mathematica*, 20, pp.343 – 363, Madrid: Academic Press, Inc., 1993.

_____, *Un episodio de la crisis de fundamento: 1904. La Gaceta de la RSME*, vol. 7.2. Un. de Sevilla, 2004.

FRAENKEL, Abraham A., “*Georg Cantor*”, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 39, pp. 189-266, 1930.

_____, *Abstract set theory*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1961.

FRAENKEL A., BAR-HILLEL Y. & LEVY A., *Foundations of set theory*. Amsterdam, North-Holland, 1^a ed. 1958, 1973.

GAMA, Lélío I., *Introdução à teoria dos conjuntos*, Rio de Janeiro: Serviço Gráfico do IBGE, 1941.

GÖDEL, Kurt, *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme*, *Monatshefte für Mathematik und Physik*, Vol. 38, 1931.

_____, *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis*. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, nº 24, E.U.A., 1938.

GOMIDE, Fernando de M. e NASCIMENTO Júnior, W. G., *O infinito atual em lógica, matemática e física: Uma prova ontológica para a realidade do número transfinito*. *Anais de Filosofia*, número 7. Brasil: FUNREI, 2000.

GRATTAN-GUINNESS, Ivor, “*Towards a biography of Georg Cantor*”. *Annals of Science* 27, pp.345-391, 1971.

_____, *The rediscovery of the Cantor-Dedekind correspondence*, *JDMV* 76, pp. 104-139, 1974.

_____, “*Missing materials concerning the life and work of Georg Cantor*”, *Revista Isis*, número 69, 1978.

_____, *The correspondence between Georg Cantor and Philip Jourdain*, *JDMV* 73 (1), pp. 111 - 130, 1972

_____, *The search for mathematical roots 1870 – 1940*. EUA: Princeton University Press, 2000.

GREENBERG, Marvin J., *Euclidean and non-euclidean Geometries*. EUA: W. H. Freeman and Company, 1997.

HALLETT, Michael. *Cantorian Set Theory and limitation of size*. Inglaterra: Oxford University Press, 1996.

HALMOS, Paul H. *Teoria ingênua dos conjuntos*, tradução de Irineu Bicudo. São Paulo: Editora Polígono, 1970.

HAUSDORFF, Felix. *Set theory*. Nova York: Chelsea Publishing Company, 1957.

HEDMAN, Bruce A. *Cantor's Concept of Infinity: Implications of Infinity for Continence*. In: Perspectives on Science and Christian Faith 46, 1993. Disponível em <<http://www.asa3.org/ASA/PSCF/1993/PSCF3-93Hedman.html>>. Acesso em 14 de janeiro de 2009.

HUNTINGTON, Edward V., *The continuum and other types of serial order*. E.U.A.: Dover Publications Inc, 1ed. 1917, 1955.

KAMKE, E. *Theory of sets*. Nova York: Dover Publication, Inc, 1950.

KOWALEWSKI, G., *Bestand und Wandel*. München: R. Oldenbourg, 1950.

KOYRÉ, Alexandre. *Do mundo fechado ao universo infinito*. RJ: Forense universitária, 1986.

LAVINE, Shaughan. *Understanding the infinit*. Inglaterra: Harvard University Press, 1994.

LIMA, Elon Lages, *Espaços métricos*. São Paulo: Editora Edgard Blücher Ltda, 1977.

_____, *Curso de análise*. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., 1ª ed. 1976, 1978.

LIPSCHUTZ, Seymour. *Teoria dos conjuntos – Coleção Schaum*. Rio de Janeiro: Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda, 1970.

McLAUGHLIN, William I., *Zeno's Resolving Paradoxes*. Scientific American, Novembro de 1994.

MESCHKOWSKI, Herbert, *Ways of thought of great mathematicians*. Holden-day; The mathesis series, 1964.

_____, *Aus den Briefbüchern Georg Cantors*. Archive for the History of the Exact Sciences 2, 1965.

_____, *Probleme des Unendlichen: Werk und Leben Georg Cantors*. Braunschweig: Vieweg, 1967.

MESCHKOWSKI, H. e NILSON, W., *Georg Cantor BRIEFE*. Berlim: Springer-Verlag, 1991.

MOORE, Gregory H., *Zermelo's Axiom of Choice*. Nova York: Springer-Verlag, 1982.

NASCIMENTO JÚNIOR, Walter Gomide do, *O infinito contado por Deus: uma interpretação dedekindiana do conceito de número ordinal transfinito de Cantor*. Rio de Janeiro: PUC, 2006.

OLIVEIRA, Antonio Marmo de e SILVA, Agostinho, *Biblioteca da Matemática Moderna*, Tomo 4. São Paulo: Livros Irradianes S.A., 1968.

PEANO, G., *Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires*. *Mathematische Annalen*, 37, 1890 Disponível em

<<http://www.springerlink.com/content/pu8667675v2kl41j/fulltext.pdf>>. Acesso em 23 de março de 2009..

_____, *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*, *Mathematische Annalen*, pp. 157- 160, t.36, 1890.

PURKERT, W., *Grundzüge der Mengenlehre – Historische Einführung*, em F. Hausdorff, *Gesammelte Werke*, tomo II: *Grundzüge der Mengenlehre*, Berlim, Springer, 2002

RIEMANN, Bernhard, *Ueber die Darstellbarkeit einer function durch eine trigonometrische Reihe*. Göttingen: Habilitationsschrift, 1854.

RUDIN, Walter. *Princípios de Análise Matemática*, Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico S.A. e Ed. Universidade de Brasília, 1971.

RUSSELL, Bertrand. *Introdução à Filosofia Matemática*, 3ed. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1974.

SIERPINSKI, Waclaw, *Sobre la correspondencia entre los pontos de un segmento y los de un cuadrado*. *Revista Mat. Hispano-Am.* 2, pp.193 -197, 1927

_____, *Cardinal and ordinal numbers*, 1ª ed. 1958. Polônia: Polish Scientific Publishers, 1965.

_____, *Elementary Theory of numbers*. Polônia: North-Holland Mathematical Library, 1988.

TAIT, W. W., *Cantor's Grundlagen and the paradoxes of set theory*. Disponível em: <http://home.uchicago.edu/~wwtx/cantor.pdf>. Acesso em 03 de agosto de 2007.

_____, *Frege versus Cantor and Dedekind: On the Concept of Number*. Disponível em <http://home.uchicago.edu/~wwtx/frege.cantor.dedekind.pdf>. Acesso em 14 de abril de 2008.

WALLACE, David Foster. *Everything and more – A Compact History of ∞* , Nova York: W.W.Norton & Company, 2003.

WHITEHEAD, Alfred North e RUSSELL, Bertrand. *Principia Mathematica*. 3 vols. Inglaterra: Cambridge University Press, 1910, 1912, 1913.

WOODIN, W. Hugh. *The Continuum Hypothesis(I)*, Notices of the AMS, Volume 41, Número 6, 2001. Arquivo em PDF disponível em www.ams.org. Acesso em 10 de maio de 2007.

ZACH, Richard. *Hilbert's Program Then and Now*. Philosophy of Logic, editado por Dale Jacquette, 2007.

ZERMELO, E. *Investigations in the Foundations of Set Theory*. IN: HEIJENOORT, J. VAN (Ed.). *From Frege to Gödel*. Inglaterra: Harvard University Press, 1967.

_____, *Georg Cantor Gesammelte Abhandlungen*. Berlim: Verlag von Julius Springer, 1 ed. 1932, 1980.

APÊNDICE A - Observações sobre o Axioma da Escolha

O livro de Moore [p.330] traz várias proposições logicamente equivalentes ao Axioma da Escolha, embora aparentemente elas pareçam diferentes, podemos perceber que algumas são auto-evidentes enquanto outras parecem ser falsas.

I Dada qualquer família T de conjuntos não-vazios, existe uma função f tal que $f(A) \in A$ para cada A em T .

II Teorema da Boa-Ordenação.

II.1 Os números cardinais são bem-ordenados pela magnitude.

II.2 O conjunto potência de um conjunto bem-ordenado pode ser bem ordenado.

II.3 Todo conjunto que pode ser ordenado, pode ser bem-ordenado.

II.4 Todo número cardinal infinito é um alef.

III Axioma Multiplicativo: Para toda família disjunta T de conjuntos não vazios, $\bigcup (T^x) = \bigcup T$, em que T^x é definido como sendo a classe de todas as subclasses M da $\bigcup T$ tal que, para todo S em T , $M \cap S$ tem exatamente um membro.[Whitehead⁹⁵, 1902].

IV Tricotomia dos Cardinais: Para quaisquer cardinais m e n , temos: $m < n$, $m > n$ ou $m = n$.

IV.1 Se m é infinito e $n \leq m$, então $n \cdot m = m$.

Um dos fatos que contribuíram para a não aceitação do Axioma da Escolha foi o Paradoxo de Hausdorff, que afirma: A metade de uma esfera é congruente a um terço da mesma esfera. Este teorema só podia ser provado usando o Axioma da Escolha, logo este não podia ser verdadeiro. Mais tarde, Banach e Tarsky estenderam o Paradoxo de Hausdorff, demonstrando, via Axioma da Escolha, que qualquer esfera S pode ser decomposta em um número finito de pedaços e reunida em duas esferas com o mesmo raio que S .

⁹⁵ WHITEHEAD, Alfred North, *On Cardinal Numbers*. American Journal of Mathematics 24, p.367, 1902.

Mais alguns exemplos inadmissíveis surgem quando se usa o Axioma da Escolha: [MOORE, p.207]

- Existe um subconjunto A de $\mathbb{R}^2$ tal que toda linha tem exatamente dois pontos em comum com A (demonstrado por Stefan Mazurkiewicz.).
- Existe um subconjunto não-enumerável de $\mathbb{R}$ que é de 1ª categoria sobre todo conjunto perfeito. Um conjunto é de primeira categoria se é união contável de uma quantidade de conjuntos densos em nenhuma parte (demonstrado por Nikolai Luzin).
- Existe um subconjunto não-enumerável A de um dado intervalo I tal que toda bijeção contínua de I transforma A em um conjunto de medida zero (demonstrado por Luzin e Sierpinski).

Apesar desses resultados aparentemente paradoxais, o Axioma da Escolha foi se impondo devido a sua grande utilidade. O primeiro matemático a perceber como a Análise dependia do Axioma, foi Michele **Cipolla**, que reconheceu que, considerando-se o Axioma como verdadeiro, obtinha-se a equivalência entre ponto limite e ponto limite seqüencial, bem como continuidade e continuidade seqüencial. Além disso, o Axioma passou a ter um papel fundamental na Álgebra, Lógica e Topologia. Quando as primeiras pesquisas começaram em Teoria dos Modelos, o Axioma da Escolha ajudou a estabelecer o Teorema de Löwenheim-Skolem. Na Topologia, uma aplicação frutífera ocorreu no Teorema da Compacidade de Tychonoff, que mais tarde se mostrou equivalente ao próprio Axioma.

APÊNDICE B - Demonstração do Teorema da Boa-Ordenação:

Todo conjunto $\mathcal{M}$ pode ser bem-ordenado.

Que todo conjunto finito pode ser bem-ordenado é trivial. Arrumando seus elementos pela ordem de grandeza, obtemos também uma boa-ordem. Assumiremos então que $\mathcal{M}$ é um conjunto infinito e dividiremos a prova numa série de passos.

Primeiro passo: Sejam os elementos de $\mathcal{M}$ denotados por m , e seja $P(\mathcal{M})$ o conjunto de todos os subconjuntos de $\mathcal{M}$. Em todo subconjunto $\mathcal{N}$ de $\mathcal{M}$, diferente do vazio, nós escolhemos de alguma maneira um elemento n e o associamos com o conjunto $\mathcal{N}$. Nós chamaremos este elemento de “elemento diferente” de $\mathcal{N}$ e o denotaremos por $n = \varphi(\mathcal{N})$. O que nos dá o direito de escolher este elemento é o **Axioma da Escolha**.

Vejamos um exemplo: $S = \{2, 4, 6, \dots\}$ e $P(S) = \{\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \dots, \{2, 4\}, \{2, 6\}, \{4, 6\}, \dots, \{2, 4, 6\}, \dots, S\}$, vamos associar da seguinte maneira $2 = \varphi(\{2\})$, $4 = \varphi(\{4\})$, $\varphi(\{6\})$, $2 = \varphi(\{2, 4\})$, $4 = \varphi(\{4, 6\})$, ..., $2 = \varphi(S)$. Aqui a escolha é a mais simples possível: escolhemos o menor elemento do conjunto, pois o conjunto S é bem-ordenado.

Como vemos, no exemplo, não é necessário que subconjuntos diferentes $\mathcal{N}$ tenham “elementos diferentes” distintos. Essa correspondência entre elementos n e os subconjuntos $\mathcal{N}$ é designada como uma cobertura do conjunto $P(\mathcal{M})$ e permanece fixa por toda a prova.

Segundo passo: Para o conjunto $\mathcal{M}$ e a cobertura estabelecida de $P(\mathcal{M})$ com elementos “diferentes”, um subconjunto bem-ordenado não-vazio Γ de $\mathcal{M}$ é chamado uma **Γ -seqüência**, se para todo elemento c de Γ e para o segmento Γ_c de Γ determinado por c (Γ_c pode ser vazio, mas invariavelmente $\mathcal{M} - \Gamma_c \neq \emptyset$) a relação **$\varphi(\mathcal{M} - \Gamma_c) = c$** é satisfeita.

Se nós temos uma Γ -seqüência, precisamos escolher algum elemento de $\mathcal{M} - \Gamma_c$; tal elemento já é dado com Γ_c , a saber, c .

Γ -seqüências sempre existem. Pois, se em geral, $m_0 = \varphi(\mathcal{M})$, então $\{m_0\}$ é uma Γ -seqüência. Vejamos, esta seqüência só é formada pelo elemento m_0 , assim Γ_{m_0} , é a seqüência formada por todos os elementos que antecedem m_0 , ou seja, nenhum elemento, isto é $\Gamma_{m_0} = \emptyset$ e assim $\varphi(\mathcal{M} - \Gamma_{m_0}) = \varphi(\mathcal{M} - \emptyset) = \varphi(\mathcal{M}) = m_0$.

Mas podemos dizer mais: Toda Γ -seqüência tem m_0 como primeiro elemento. Isto é verdade porque para o primeiro elemento c de uma Γ -seqüência nós temos $\Gamma_c = \emptyset$, e assim, análogo ao que já mostramos $c = \varphi(\mathcal{M} - \Gamma_c) = \varphi(\mathcal{M} - \emptyset) = \varphi(\mathcal{M}) = m_0$.

Além disso, se m_1 é o elemento “diferente” de $\mathcal{M} - \{m_0\}$, então obviamente $\{m_0, m_1\}$ é uma Γ -seqüência. Mais que isso, toda Γ -seqüência com no mínimo dois elementos tem m_1 como segundo elemento, pois se c é o segundo elemento, então como o primeiro elemento é m_0 , $\Gamma_c = \{m_0\}$ e assim $c = \varphi(\mathcal{M} - \{m_0\}) = m_1$.

Para as duas menores Γ -seqüências nós temos assim estabelecido o fato que elas são segmentos de todas Γ -seqüências que contém no mínimo o mesmo número de elementos.

Temos ainda o seguinte resultado:

Terceiro passo: De duas Γ -seqüências distintas é invariavelmente o caso que uma é segmento da outra.

Sejam Γ , Γ^* duas Γ -seqüências distintas. Então, em qualquer caso, como conjuntos bem-ordenados são sempre comparáveis, uma delas, digamos Γ , é similar ao segmento Γ^* do outro. Nós temos que mostrar que $\Gamma \approx \text{seg}(\Gamma^*)$ neste caso, implica realmente $\Gamma = \text{seg}(\Gamma^*)$. Em outras palavras, se o elemento de Γ^* associado com um elemento $c \in \Gamma$ é denotado por c^* , temos que provar que invariavelmente $c = c^*$. Isso é verdadeiro para o primeiro elemento de Γ como já foi mostrado no segundo passo. Infere-se então que, pela indução transfinita, o resultado é válido para os outros elementos.

Suponha que a afirmação seja correta para todo $c < c_1$. Então os segmentos Γ_{c_1} e $\Gamma_{c_1}^*$ coincidem. Assim, $c_1 = \varphi(\mathcal{M} - \Gamma_{c_1})$ e $c_1^* = \varphi(\mathcal{M} - \Gamma_{c_1}^*)$ tem que ser iguais. O que prova a afirmação.

Daí segue imediatamente:

Quarto passo: Se duas Γ -seqüências têm um elemento c em comum, então seus segmentos determinados por c também coincidem. Daí segue que se duas Γ -seqüências têm dois elementos a e b em comum, então $a < b$ ou $a > b$ em ambas as seqüências.

Quinto passo: A união Σ de todas Γ -seqüências pode ser ordenada, pois se $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ são dois elementos distintos de Σ , eles pertencem a duas Γ -seqüências, digamos Γ e Γ^* . Se $\Gamma \neq \Gamma^*$, então, de acordo com o terceiro passo, uma delas, digamos Γ , é um segmento da outra. Os elementos $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ então pertencem a Γ^* . Em virtude da ordem dos elementos em Γ^* , uma das relações $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ ou $\mathbf{a} > \mathbf{b}$ é determinada para $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$. Pelo passo anterior, esta determinação é independente do conjunto particular Γ^* ao qual o elemento pertence. Esta relação de ordem é satisfeita para $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$ em Σ também. Isto determina uma ordem para Σ dado que nós podemos mostrar que a relação de

ordem é transitiva. Seja $\mathbf{a} < \mathbf{b}$, $\mathbf{b} < \mathbf{c}$ para três elementos de Σ . E seja Γ determinando a ordem de $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$; e Γ^* determinando a ordem de $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$.

Então, novamente pelo passo anterior, Γ^* também contém o segmento Γ_b , e assim, em particular, o elemento $\mathbf{a}$. Como a ordem de dois elementos é determinada por toda Γ -seqüência que os contém, $\mathbf{a}$ e $\mathbf{c}$, em particular, é também determinada por Γ^* , isto é, $\mathbf{a} < \mathbf{c}$, como foi afirmado.

Sexto passo: O conjunto Σ é realmente **bem-ordenado** pela ordem determinada.

Nós temos que mostrar que todo subconjunto não-vazio Σ^* de Σ tem um primeiro elemento. Seja c^* um elemento arbitrário de Σ^* em que, apenas para a demonstração, nós assumiremos que c^* não seja o primeiro elemento de Σ^* . O elemento c^* pertence ao conjunto Γ^* . Seja a^* um elemento arbitrário que precede c^* em Σ^* . Então, de acordo com a determinação da ordem em Σ , a^* precede c^* em uma certa Γ -seqüência e assim, pelo quarto passo, também em Γ^* . Os elementos que precedem c^* em Σ^* formam assim um subconjunto do conjunto bem-ordenado Γ^* , e existe conseqüentemente um primeiro elemento entre eles.

Sétimo passo: O conjunto Σ é realmente uma Γ -seqüência.

Seja Σ_c o segmento determinado por um elemento $\mathbf{c}$ de Σ . O elemento $\mathbf{c}$ pertence a um conjunto Γ , e determina neste conjunto um segmento Γ_c . De acordo com o argumento apresentado no passo anterior, todo elemento de Σ_c pertence a Γ_c , e a recíproca segue da ordem de Σ . Assim, $\Sigma_c = \Gamma_c$ e conseqüentemente: $\varphi(\mathcal{M} - \Sigma_c) = \varphi(\mathcal{M} - \Gamma_c) = \mathbf{c}$.

Oitavo passo: $\mathcal{M} = \Sigma$, e por isso $\mathcal{M}$ é bem-ordenado pelo dado procedimento.

Se nós tivéssemos $\Sigma \subset \mathcal{M}$, $\mathcal{M} - \Sigma$ poderia ser um subconjunto não-vazio de $\mathcal{M}$, e poderia possuir um elemento diferente $\mathbf{z}$. Então $\Sigma + \{\mathbf{z}\}$ (soma ordenada) poderia ser um conjunto bem-ordenado, de modo que $\mathbf{z}$ venha depois de todos os elementos de Σ . Para todo segmento Γ_c de $\Sigma + \{\mathbf{z}\}$, determinado por um elemento $\mathbf{c}$ deste conjunto, $\varphi(\mathcal{M} - \Gamma_c) = \mathbf{c}$; porque para $\mathbf{c} \neq \mathbf{z}$ isto é verdade pelo passo anterior e para $\mathbf{c} = \mathbf{z}$, pela definição de $\mathbf{z}$.

Assim, $\Sigma + \{\mathbf{z}\}$ seria também uma Γ -seqüência, contradizendo o fato que Σ , por definição, contém toda Γ -seqüência.[KAMKE, p.112]

APÊNDICE - C - Frações Contínuas

Estamos interessados em trabalhar apenas com números entre 0 e 1, como fez Cantor em sua demonstração, por isso não consideramos a parcela α_0 que normalmente aparece somando a parte fracionária.

Com o objetivo de facilitar a escrita consideraremos a fração contínua $e = \frac{1}{\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_2 + \frac{1}{\alpha_3 + \dots}}}$, escrita como uma seqüência $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_v, \dots)$, onde $\alpha_i \in \mathbb{N}^*$.

A representação de um número racional na forma de uma fração contínua sempre nos dará uma seqüência finita. Por exemplo:

$$\frac{19}{24} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{4}}}} = (1, 3, 1, 4)$$

Para acharmos esses valores basta utilizar o Algoritmo de Euclides para o cálculo do máximo divisor comum (M.D.C.), em que os valores em **negrito** formam a seqüência desejada.

	1	3	1	4
24	19	5	4	1
5	4	1	0	

Veremos a seguir que toda fração contínua infinita representa um número irracional.[SIERPINSKI, 1988]

Para fazermos a representação de números irracionais por meio de uma fração contínua, vamos considerar x um número irracional e $[x]$ a parte inteira desse número.

Como x é irracional $0 < x - a_0 < 1$ o que implica que o número $x_1 = \frac{1}{x - a_0}$ é um número irracional maior que 1.

Seja então $a_1 = [x_1]$; claramente, $[x_1]$ é um número natural e, por um raciocínio similar já mostrado, $x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1}$ é um número irracional maior que 1. Procedendo desse modo, nós obtemos uma seqüência infinita $x_1, x_2, \dots$ de números irracionais, todos maiores que 1, e uma seqüência de números naturais $a_n = [x_n]$ tais que $x_n = \frac{1}{x_{n-1} - a_{n-1}}$ para qualquer $n = 1, 2, 3, \dots$; x_0 sendo tomado igual a x .

Temos então: $x_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{x_n}$ para $n = 1, 2, \dots$

A seqüência das igualdades:

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}; x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}; \dots; x_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{x_n} \text{ nos dá:}$$

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots} + \frac{1}{x_n}}}$$

$$\text{Seja: } R_n = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots} + \frac{1}{a_n}}}$$

Pode-se provar que: $|x - R_n| < \frac{1}{n(n+1)}$ para $n = 1, 2, \dots$

Assim $x = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n$.

Nós expressamos isso dizendo que o número x é representado pela fração (infinita) contínua simples $x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$

Sierpinski assim provou: Qualquer número irracional x pode ser expresso como uma fração contínua simples infinita, a representação sendo obtida pelo uso do algoritmo apresentado acima.

APÊNDICE - D - Paradoxos de Zenão

Segundo o *Novo Dicionário da Língua Portuguesa*, de Aurélio Buarque de Holanda Ferreira, versão eletrônica, temos para a palavra PARADOXO os seguintes significados:

[Do gr. *parádoxon*, pelo lat. *paradoxon*.]

S. m.

1. Conceito que é ou parece contrário ao comum; contra-senso, absurdo, disparate.
2. Contradição, pelo menos na aparência.
3. Figura em que uma afirmação aparentemente contraditória é, no entanto, verdadeira.
4. Filos. Afirmação que vai de encontro a sistemas ou pressupostos que se impuseram, como incontestáveis ao pensamento. [Cf., nesta acepç., aporia e antinomia.]
5. Lóg. Dupla implicação entre uma proposição e sua negação, que caracteriza uma contradição insolúvel.
6. Lóg. Dificuldade na conclusão de um raciocínio, seja pela vaguidade dos termos das suas proposições, seja pela insuficiência dos instrumentos lógicos formais.

O **infinito** é um dos conceitos que mais faz gerar idéias paradoxais. Veremos aqui dois exemplos dos mais antigos e famosos paradoxos de Zenão, filósofo que viveu em Eléia, no quarto século antes de Cristo.

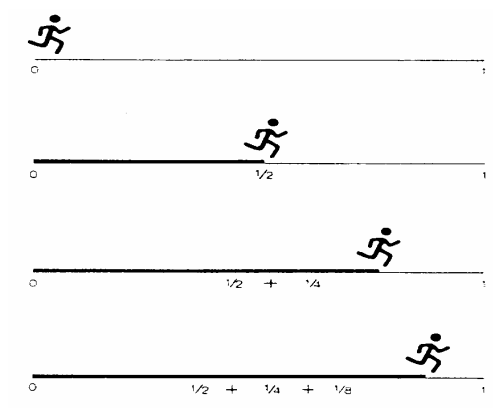
Zenão argumentava que o movimento não podia existir, que era impossível, pois para uma pessoa se mover de um ponto a outro, ela teria que obrigatoriamente cobrir a metade da distância entre estes dois pontos, então metade da distância ainda faltaria ser percorrida. Assim, *ad infinitum*, ela precisaria de um número infinito de etapas para chegar ao seu destino.

A resposta surge então na Escola Platônica em torno do ano 350 a.C. por meio do método de exaustão creditado a Eudoxo. O método de exaustão admite que uma grandeza possa ser indefinidamente dividida e baseia-se no seguinte postulado: “Se de uma grandeza qualquer subtrai-se uma parte não menor que sua metade, do restante subtrai-se também uma parte não menor que sua metade, e assim por diante. Chegar-se-á por fim a uma grandeza menor que qualquer outra predeterminada da mesma espécie”, ou seja, não sobra nada.

Este postulado resolve o paradoxo de Zenão, mas na realidade o que ele faz é postular que um determinado processo infinito tem fim e esgota a grandeza inicial. Ele serviu de base, no século XVII, para que Leibniz e Newton, inventassem o “cálculo diferencial” e, em 1821, Augustin-Louis Cauchy introduzisse a idéia de limite.

Hoje sabemos que uma soma infinita pode dar um resultado finito. Vejamos:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$



Outro paradoxo, também elaborado por Zenão, é a famosa corrida entre a Tartaruga e Aquiles. Zenão argumentava que se a tartaruga saísse com alguma vantagem, Aquiles jamais conseguiria ultrapassá-la. O raciocínio é análogo ao paradoxo anterior: para chegar até a tartaruga, Aquiles levaria um tempo, o suficiente para que a tartaruga andasse um pouco e continuasse na sua dianteira e assim eternamente. Na vida prática observamos que Aquiles ultrapassa a tartaruga, e que as pessoas quando percorrem um caminho chegam ao seu destino. [BUNCH]

APÊNDICE - E - Detalhes sobre o gráfico da função de Cantor

Sabendo que foi utilizado o computador para a elaboração desse gráfico, não é possível trabalhar com seqüências infinitas e por isso, estaremos trabalhando sempre com um número finito de casas, ou seja, os cálculos consideram aproximações racionais dos números irracionais entre 0 e 1.

Apesar dos problemas já expostos utilizando o sistema decimal, evitamos o uso da fração contínua por uma questão de simplicidade.

E.1 Sobre a continuidade da função

Como foi demonstrado por Sierpinski [1927], esta função é contínua para todos os números irracionais, isto é, ela não é contínua para um número infinito enumerável de descontinuidades. Como estamos trabalhando no sistema decimal, podemos observar algebricamente que cada vez que o dígito muda de 9 para zero, em alguma casa decimal, vamos ter um ponto de descontinuidade. Em particular, quando esta mudança é na segunda casa decimal a primeira casa decimal aumenta em uma unidade e por isso observamos no gráfico, uma lacuna em cada décimo. Em qualquer uma das casas decimais vai ocorrer uma descontinuidade.

Definição: Dada uma função $f: E \rightarrow Y$. Diz-se que f é **contínua** em $p \in E$ se $\forall \varepsilon > 0$ corresponde $\delta > 0$ tal que $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$ para $|x - p| < \delta$. [Rudin, p.85]

Se quisermos então mostrar que f **não** é contínua temos que mostrar que:
 $\forall \delta > 0 \quad \exists \varepsilon > 0$ tal que se pode encontrar um x_δ com $|x_\delta - p| < \delta$, mas $|f(x_\delta) - f(p)| \geq \varepsilon$.

Em particular.

Seja $p = 0,09999\dots$ e $\delta = 0,002$ e $x_\delta = 0,1001$, temos:

$|0,1001 - 0,0999\dots| < 0,002$, mas

$|f(0,1001) - f(0,0999\dots)| \cong |(0,10; 0,01) - (0,09; 0,99)| = |(0,01; -0,98)| = \sqrt{0,01^2 + (-0,98)^2} = \sqrt{0,0001 + 0,9604} = \sqrt{0,9605} = 0,98$ aproximadamente, ou seja, quase igual a um. Variamos x em 0,0001 e $f(x)$ deu um salto de quase uma unidade.

Quando a mudança é na terceira casa decimal, temos para $p = 0,009999\dots$, $\delta = 0,0002$ e $x_\delta = 0,0102$, que:

$|0,0102 - 0,00999\dots| < 0,0002$, mas

$$|f(0,0102) - f(0,00999...)| \cong |(0,00; 0,12) - (0,09; 0,09)| = |(-0,09; 0,03)| = \sqrt{(-0,09)^2 + (0,03)^2} = \sqrt{0,0081 + 0,0009} = \sqrt{0,009} \cong 0,0948.$$

E.2 Alguns pontos do gráfico da função de Cantor

A idéia foi construir o gráfico da função que leva todos os elementos do conjunto formado pelos números entre 0,0001 e 1 (conjunto discreto com 10000 pontos, com o formato de uma progressão aritmética com razão 0,0001) a um par ordenado, conforme Cantor demonstrou em seu artigo de 1877, ficando o ponto no espaço com as seguintes coordenadas $(z; x; y) = (0,abcd; 0,ac; 0,bd)$.

O gráfico foi gerado pelo programa Maple⁹⁶. Segue o código feito por Rodrigo Devolder⁹⁷:

```
with(plots):
casas_decimais:=4;
step:=0.0001;

pontos:=[]:
mcd:=ceil(casas_decimais/2):

for z from 0.0001 by step to 1 do

    cx[0]:=z:
    for i from 1 to mcd do
        cx[i]:=trunc(cx[i-1])*10+trunc(cx[0]*10^((i*2)-1))-trunc(cx[0]*10
^((i*2)-2))*10
    od:
    coord_x:=evalf(cx[mcd]/10^mcd, mcd):

    cy[0]:=z:
    for i from 1 to mcd do
        cy[i]:=trunc(cy[i-1])*10+trunc(cy[0]*10^(i*2))-trunc(cy[0]*10^((i
*2)-1))*10
    od:
    coord_y:=evalf(cy[mcd]/10^mcd, mcd):

    pontos:=[op(pontos), [z, coord_x, coord_y]]:
od:

pontos;
NumeroDePontos:=nops(pontos);

pointplot3d(pontos, axes=NORMAL, color=red, symbol=circle, labels=[z,x,y]);
```

⁹⁶ www.maplesoft.com

⁹⁷ Professor de Matemática, atualmente cursando o Mestrado em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da UFRJ.

Foram obtidos os seguintes pontos [z; x; y]:

[0,0001; 0,00; 0,01],

[0,0002; 0,00; 0,02],

[0,0003; 0,00; 0,03],

...

[0,1213; 0,11; 0,23],

[0,1214; 0,11; 0,24],

[0,1215; 0,11; 0,25],

[0,1216; 0,11; 0,26],

...

[0,7316; 0,71; 0,36],

[0,7317; 0,71; 0,37],

[0,7318; 0,71; 0,38],

...

[0,9997; 0,99; 0,97],

[0,9998; 0,99; 0,98],

[0,9999; 0,99; 0,99].

Totalizando 10000 pontos.

ANEXO - Cartas na ordem cronológica

As cartas deste anexo foram escaneadas do livro MESCHKOWSKI e NILSON [1991], que pode ser consultado, na biblioteca do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA).

Carta do pai de Cantor, Georg Woldemar Cantor, para ele, em 1860 (página 20⁹⁸):

I Georg Woldemar Cantor
an seinen Sohn Georg – Pfingsten 1860 – I, XIV

„Geliebter Georg! Möge durch die Güte des Allmächtigen, des Schöpfers des Weltalls und Vaters aller belebten Wesen, dieser Tag von segensreichem Einfluß auf Dein ganzes künftiges Leben werden! Mögest Du immerfort und unablässig vor Augen behalten alle die tugendhaften Vorsätze, die Du Dir heute ohne Zweifel im Stillen zum Gelöbniß gemacht hast! ... Die künftigen *Lebenswege* und Schicksale des Menschen liegen im tiefsten Dunkel verborgen vor ihm. Und es ist gut, daß es so ist. Niemand weiß vorher, in welche unglaublich schwierigen Lagen und Berufsverhältnisse er zufällig geraten, mit welchen unvorhergesehenen und *unvorherzusehenden* Widerwärtigkeiten und Schwierigkeiten er in den verschiedenen Lagen des Lebens anzukämpfen haben wird.

... Wie oft sind nicht schon die allerhoffnungsvollsten Menschen, nachdem sie ins praktische Leben eingetreten, schon in den ersten ernstlichen Kämpfen nach kurzem ohnmächtigem Widerstand erliegen. Mutgebrochen verkümmerten sie hinterher vollständig – im *günstigsten* Fall wird noch aus ihnen ein sogenanntes verkommenes Genie! ... So enden *wahrlich nicht selten* junge Menschen, die *scheinbar* mit den vielversprechendsten Eigenschaften des Geistes sowohl wie des Körpers ausgestattet und deren Aussichten fürs spätere Leben auch durch Vermögen und Familienverhältnisse in ihrer Jugend die allerrosigsten von der Welt waren!

Doch – ihnen *fehlte* der *feste Kern*, auf den *alles* ankommt! Nun, mein teurer Sohn! – *glaube es mir*, Deinem *aufrichtigsten, treuesten und erfahrensten* Freunde – dieser feste Kern, *der in uns leben muß*, das ist: ein *wahrhaft religiöses Gemüt*! Dics offenbart *sich uns selbst* durch ein *aufrichtiges demütiges Gefühl dankbarster Gottesverehrung*, aus welcher denn auch das *siegreiche, unerschütterlich feste Gottesvertrauen erwächst* und uns unser ganzes Leben hindurch in jenem stillen zuversichtlichen Verkehr mit unserem himmlischen Vater erhält!

... Um aber auch *allen jenen anderen* Drangsalen und Schwierigkeiten zu begegnen, die im eifrigen Streben nach Erfolg und Glück in unserer *eigentlichen Fach- oder Berufstätigkeit* durch Neid und Verleumdung offener oder geheimer Feinde unausweichlich sich uns entgegenrücken, um auch *diese mit Erfolg* zu bekämpfen, dazu gehört in erster Reihe die Erwerbung und Aneignung der *größtmöglichen Summe gründlichster, vielseitigster Fachkenntnisse und Fähigkeiten*. Diese sind heutzutage eine *unbedingte Notwendigkeit*, wenn der strebsame und ehrgeizige Mann sich nicht von seinen Feinden verdrängt und sich selbst in zweiter oder dritter Linie stehend sehen will.

Zur Erlangung vielfacher gründlicher wissenschaftlicher und praktischer Kenntnisse, zur *vollkommenen* Aneignung fremder Sprachen und Literaturen, zur vielseitigen Bildung des Geistes, auch in manchen humanistischen Wissenschaften – um durch all dieses erst *Dich würdig auszurüsten zu jenen Kämpfen* – *dazu ist* nun, dieses mußt Du Dir *immerfort wohl* bewußt bleiben! – *dazu ist* die eben angetretene *zweite Periode* Deines Lebenslaufes, *das Jünglingsalter, bestimmt*. Was der Mensch aber in *dieser Periode* versäumt oder durch *vorzeitige* Vergeudung sei-

18 *I Georg Woldemar Cantor an seinen Sohn Georg – Pfingsten 1860 – I, XIV*

⁹⁸ A indicação do número da página relaciona-se a localização dessa carta, em português, nessa tese.

ner besten Kräfte, Gesundheit und Zeit, sozusagen *verludert*, das ist unwiederbringlich und *unersetzlich* für *ewig verloren*; – gleich der *einmal* verlorenen Unschuld, die für immer und ewig unrettbar verloren bleibt! . . .

Ich schließe mit den Worten: Dein Vater oder vielmehr Deine Eltern und alle übrigen Familienangehörigen sowohl in Deutschland wie in Rußland und Dänemark haben ihre Augen auf *Dich* als den Ältesten gerichtet und erwarten von Dir nichts *Geringeres* als einen Theodor Schaeffer¹⁾ und, so Gott will, später vielleicht auch ein *leuchtendes Gestirn* am Horizonte der Wissenschaft.

Gott gebe Dir *Kraft*, Ausdauer, Gesundheit, Charakterfestigkeit und seinen besten Segen! Aber darum wandle *Du* auch nur auf seinen Wegen. Amen!

Dein Vater . . .“

Carta de Georg Cantor para seu pai, em 1862 (página 20):

„Mein Lieber Papa!

Wie sehr Dein Brief mich freute, kannst Du Dir denken; er bestimmt meine Zukunft. Die letzten Tage vergingen mir im Zweifel und der Unentschiedenheit; ich konnte zu keinem Entschluß kommen. Pflicht und Neigung bewegten sich in stetem Kampfe. Jetzt bin ich glücklich, wenn ich sehe, daß es Dich nicht mehr betrüben wird, wenn ich in meiner Wahl dem Gefühl folge. Ich hoffe, Du wirst noch Freude an mir erleben, teurer Vater, denn meine Seele, mein ganzes Ich lebt in meinem Berufe; was der Mensch will und kann, und wozu ihn eine unbekannte geheimnisvolle Stimme treibt, *das* führt er durch! . . .“

Carta de Georg Cantor para Dedekind, em 29 de novembro de 1873 (página 145):

Hochgeehrter Herr College!

Gestatten Sie mir, Ihnen eine Frage vorzulegen, die für mich ein gewisses theoretisches Interesse hat, die ich mir aber nicht beantworten kann; vielleicht können Sie es, und sind so gut, mir darüber zu schreiben, es handelt sich um folgendes.

Man nehme den Inbegriff aller positiven ganzzahligen Individuen n und bezeichne ihn mit (n) ; ferner denke man sich etwa den Inbegriff aller positiven reellen Zahlgrößen x und bezeichne ihn mit (x) ; so ist die Frage einfach die, ob sich (n) dem (x) so zuordnen lasse, dass zu jedem Individuum des einen Inbegriffes ein und nur eines des andern gehört? Auf den ersten Anblick sagt man sich, nein es ist nicht möglich, denn (n) besteht aus discreten Theilen, (x) aber bildet ein Continuum; nur ist mit diesem Einwande nichts gewonnen und so sehr ich mich auch zu der Ansicht neige, dass (n) und (x) keine eindeutige Zuordnung gestatten, so kann ich doch den Grund nicht finden und um den ist es mir zu thun, vielleicht ist er ein sehr einfacher. —

Wäre man nicht auch auf den ersten Anblick geneigt zu behaupten, dass sich (n) nicht eindeutig zuordnen lasse dem Inbegriffe $\left(\frac{p}{q}\right)$ aller positiven rationalen Zahlen $\frac{p}{q}$? und dennoch ist es nicht schwer zu zeigen, dass sich (n) nicht nur diesem Inbegriffe, sondern noch dem allgemeineren

$$(a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_v})$$

eindeutig zuordnen läßt, wo $n_1, n_2, \dots, n_v$ unbeschränkte positive ganzzahlige Indices in beliebiger Zahl v sind.

Mit bestem Gruße
Ihr ergebenster
G. Cantor.

Permettez-moi de vous soumettre une question qui a pour moi un certain intérêt théorique, mais à laquelle je ne puis répondre ; peut-être le pourrez-vous, et serez-vous assez bon pour m'écrire à ce sujet. Voici de quoi il s'agit.

Prenons l'ensemble de tous les individus entiers positifs n , et représentons-le par (n) ; puis considérons l'ensemble des toutes les grandeurs numériques réelles positives x , et représentons-le par (x) ; la question est simplement de savoir si (n) peut être mis en correspondance avec (x) de telle manière qu'à chaque individu d'un des ensembles corresponde un individu et un seul de l'autre. A première vue, on se dit que ce n'est pas possible, car (n) est composé de parties discrètes, tandis que (x) forme un continu ; mais il n'y a rien à gagner avec cette objection, et, si fort que j'incline à penser qu'il n'y a pas des correspondance univoque entre (x) et (n) , je ne peux pourtant pas en trouver la raison et c'est d'elle que je me préoccupe – peut-être est-elle très simple.

Ne serait-on pas aussi tenté de conclure au premier abord que (n) ne peut être mis en correspondance univoque avec l'ensemble $\left(\frac{p}{q}\right)$ de tous les nombres rationnels $\frac{p}{q}$? Et pourtant, il n'est pas difficile de montrer que (n) peut être mis en correspondance univoque, non seulement avec cet ensemble, mais aussi avec l'ensemble plus général :

$$(a_{n_1, n_2, \dots, n_v})$$

$n_1, n_2, \dots, n_v$ étant des indices entiers positifs illimités en nombre quelconque v . [CAVAILLÈS, p. 180, 1962]

Carta de Cantor para Dedekind, em 2 de dezembro de 1873(página 148):

„... Meine Frage habe ich Ihnen aus dem Grunde vorgelegt, weil ich sie als solche mir bereits vor mehreren Jahren gestellt und mich stets im Zweifel darüber befunden habe, ob die Schwierigkeit, welche sie mir bot, eine subjective sei oder ob sie an der Sache hafte. Da Sie mir schreiben, dass auch Sie ausser Stande seien, sie zu beantworten, so darf ich das letztere annehmen. – Uebrigens möchte ich hinzufügen, dass ich mich nie ernstlich mit ihr beschäftigt habe, weil sie kein besonderes practisches Interesse für mich hat und ich trete Ihnen ganz bei, wenn Sie sagen, dass sie aus diesem Grunde nicht zu viel Mühe verdient. Es wäre nur schön, wenn sie beantwortet werden könnte; z. B. vorausgesetzt dass sie mit *nein* beantwortet würde, wäre damit ein neuer Beweis des Liouvilleschen Satzes geliefert, dass es transcendente Zahlen giebt. ...“

J'ai été particulièrement heureux de recevoir aujourd'hui votre réponse à ma dernière lettre. Si je vous ai soumis ma question, c'est parce que je me suis posé celle-ci y a déjà plusieurs années et je me suis toujours demandé si la difficulté que j'y trouvais était de nature subjective, ou bien si elle tenait au problème lui-même. Puisque vous me dites être, vous aussi, hors d'état d'y répondre, je peux supposer que c'est la deuxième éventualité qui est exacte. – Du reste, je voudrais ajouter que je ne m'en suis jamais occupé sérieusement, parce qu'elle n'a pas d'intérêt pratique particulier pour moi, et je suis bien de votre avis quand vous dites que, pour cette raison, elle ne mérite pas qu'on y consacre beaucoup de peine. Ce serait pourtant beau, si l'on pouvait y répondre ; si, par exemple, la réponse était *négative*, on disposerait par là même d'une nouvelle démonstration du théorème de Liouville affirmant l'existence de nombres transcendants.

Votre démonstration du fait que (n) peut être mis en correspondance univoque avec le corps des nombres algébriques est à peu près la même que celle par laquelle je prouve mon affirmation contenue dans ma dernière lettre. Je pose $n_1^2 + n_2^2 + \dots + n_v^2 = N$ et j'ordonne ensuite les éléments.

N'est-il pas en soi bon et commode que, comme vous l'avez si bien fait ressortir, l'on puisse parler du $n^{\text{ième}}$ nombre algébrique, de telle manière que chacun d'eux figure une fois dans la suite ?

Comme vous le notez très justement, notre question peut se formuler comme suit : « Peut-on mettre (n) en correspondance univoque avec un ensemble

$$(a_{n_1, n_2, \dots}),$$

$n_1, n_2, \dots$ étant des indices entiers positifs illimités, en nombre infini ? » [CAVAILLÈS, p. 188, 1962]

Carta de Cantor para Dedekind, em 7 de dezembro de 1873 (página 149):

Hochgeehrter Herr College!

In den letzten Tagen habe ich die Zeit gehabt, etwas nachhaltiger meine Ihnen gegenüber ausgesprochene Vermutung zu verfolgen; erst heute glaube ich mit der Sache fertig geworden zu sein; sollte ich mich jedoch täuschen, so finde ich gewiss keinen nachsichtigeren Beurtheiler, als Sie. Ich nehme mir also die Freiheit, Ihrem Urtheile zu unterbreiten, was soeben in der Unvollkommenheit des ersten Conceptes zu Papier gebracht ist.

Man nehme an, es könnten alle positiven Zahlen $\omega < 1$ in die Reihe gebracht werden:

$$(I) \quad \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n, \dots$$

Auf ω_1 folgend sei ω_α das nächst grössere Glied, auf dieses folgend ω_β das nächst grössere, u. s. f. Man setze: $\omega_1 = \omega_1^1$, $\omega_\alpha = \omega_1^2$, $\omega_\beta = \omega_1^3$ u. s. f. und hebe aus (I) die unendliche Reihe aus:

$$\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \dots, \omega_1^n, \dots$$

In der übrig bleibenden Reihe werde das erste Glied mit ω_2^1 , das nächst folgende grössere mit ω_2^2 bezeichnet, u. s. f. so hebe man die zweite Reihe aus:

$$\omega_2^1, \omega_2^2, \omega_2^3, \dots, \omega_2^n, \dots$$

Wird diese Betrachtung fortgesetzt, so erkennt man dass die Reihe (I) sich in die unendlich vielen zerlegen läßt:

$$(1) \quad \omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \dots, \omega_1^n, \dots$$

$$(2) \quad \omega_2^1, \omega_2^2, \omega_2^3, \dots, \omega_2^n, \dots$$

$$(3) \quad \omega_3^1, \omega_3^2, \omega_3^3, \dots, \omega_3^n, \dots$$

...

in jeder von ihnen wachsen aber die Glieder fortwährend von links nach rechts zu; es ist:

$$\omega_k^i < \omega_k^{i+1}.$$

Man nehme nun ein Intervall $(p \dots q)$ so an, dass kein Glied der Reihe (1) in ihm liegt; also etwa innerhalb $(\omega_1^1 \dots \omega_1^2)$; nun könnten auch etwa sämtliche Glieder der zweiten Reihe, oder der dritten ausserhalb $(p \dots q)$ liegen; es muss jedoch einmal eine Reihe kommen, ich will sagen die k^{te} , bei welcher nicht alle Glieder ausserhalb $(p \dots q)$ liegen; (denn sonst würden die innerhalb $(p \dots q)$ liegenden Zahlen nicht in (I) enthalten sein, gegen die Voraussetzung); dann kann man ein Intervall $(p' \dots q')$ innerhalb $(p \dots q)$ fixieren, so dass die Glieder der k^{ten} Reihe alle ausserhalb desselben liegen; von selbst verhält sich dann $(p' \dots q')$ in gleicher Weise in Bezug auf die vorhergehenden Reihen; im weiteren Verlaufe muss jedoch

eine k^{te} Reihe erscheinen, deren Glieder nicht sämtlich ausserhalb $(p' \dots q')$ liegen und man nehme dann innerhalb $(p' \dots q')$ ein drittes Intervall $(p'' \dots q'')$ an, so dass alle Glieder der k^{ten} Reihe ausserhalb desselben liegen.

So sieht man, dass es möglich ist eine unendliche Reihe von Intervallen zu bilden:

$$(p \dots q), (p' \dots q'), (p'' \dots q''), \dots$$

von denen jedes die folgenden einschliesst und die zu unsern Reihen (1), (2), (3), ... sich wie folgt verhalten:

Die Glieder der $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \dots, k-1^{\text{ten}}$ Reihe liegen ausserhalb $(p \dots q)$

Die Glieder der $k^{\text{ten}}, \dots, k'-1^{\text{ten}}$ Reihe liegen ausserhalb $(p' \dots q')$

Die Glieder der $k^{\text{ten}}, \dots, k''-1^{\text{ten}}$ Reihe liegen ausserhalb $(p'' \dots q'')$

.....

Es läßt sich nun stets *wenigstens* eine Zahl, ich will sie η nennen, denken, welche im Innern eines jeden dieser Intervalle liegt; von dieser Zahl η , welche offenbar ≥ 1 , sieht man rasch, daß sie in keiner unserer Reihen (1), (2), ..., (n), enthalten sein kann. So würde man, von der Voraussetzung ausgehend, daß alle Zahlen ≥ 1 , in (I) enthalten seien, zu dem entgegengesetzten Resultate gelangt sein, daß eine bestimmte Zahl $\eta \geq 1$ nicht unter (I) zu finden sei; folglich ist die Voraussetzung eine unrichtige gewesen.

So glaube ich schließlich zum Grund gekommen zu sein, weshalb sich der in meinen früheren Briefen mit (x) bezeichnete Begriff *nicht* dem mit (n) bezeichneten eindeutig zuordnen läßt.

Mit den besten Grüßen
Ihr ergebenster
G. Cantor.

Ces derniers jours, j'ai eu le temps d'étudier, d'une façon un peu plus suivie, ma conjecture dont je vous avais parlé ; c'est seulement aujourd'hui que j'en ai terminé, me semble-t-il, avec cette affaire. Si je devais pourtant me tromper, je ne trouverais certainement pas de juge plus indulgent que vous. Je prends donc la liberté de soumettre à votre jugement ce que j'ai couché sur le papier, dans toute l'imperfection de ce premier jet.

Supposons que l'on puisse ranger tous les nombres positifs $\omega < 1$ en une suite :

$$(I) \quad \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n, \dots$$

Après ω_1 soit ω_α le premier terme plus grand, après celui-ci soit ω_β le premier terme grand, et ainsi de suite. Posons : $\omega_1 = \omega_1^1, \omega_\alpha = \omega_1^2, \omega_\beta = \omega_1^3$, etc..., et extrayons de (I) la suite infinie :

$$\omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \dots, \omega_1^n, \dots$$

Dans la suite restante, soit ω_2^1 le premier terme, ω_2^2 le premier terme suivant ω_2^1 qui soit plus grand, etc... et extrayons a 2^e suite :

$$\omega_2^1, \omega_2^2, \omega_2^3, \dots, \omega_2^n, \dots$$

En continuant ainsi, on reconnaît que la suite (1) peut être décomposée en une infinité de suites :

$$(1) \quad \omega_1^1, \omega_1^2, \omega_1^3, \dots, \omega_1^n, \dots$$

$$(2) \quad \omega_2^1, \omega_2^2, \omega_2^3, \dots, \omega_2^n, \dots$$

$$(3) \quad \omega_3^1, \omega_3^2, \omega_3^3, \dots, \omega_3^n, \dots$$

mais dans chacune d'elles les termes vont en croissant de gauche à droite ; on a :

$$\omega_k^\lambda < \omega_k^{\lambda+1}.$$

Choisissons maintenant un intervalle (p...q) de telle sorte qu'aucun élément de la suite (1) ne s'y trouve contenu ; on peut, par exemple, prendre (p...q) à l'intérieur de l'intervalle $(\omega_1^1 \dots \omega_1^2)$; il se peut alors que tous les termes de la deuxième suite, ou de la troisième, se trouvent à l'extérieur de (p...q) ; mais il faut qu'il y ait une première suite, disons la $k^{\text{ième}}$, dont tous les termes ne se trouvent pas à l'extérieur de (p...q) ; (car sinon, les nombres que si trouvent à l'intérieur de (p...q) ne seraient pas contenus dans (1), contrairement à l'hypothèse) ; on peut alors déterminer, à l'intérieur de (p...q), un intervalle (p'...q') tel que les termes de la $k^{\text{ième}}$ suite soient tous à l'extérieur de celui-ci ; (p'...q') se comporte évidemment de la même manière relativement aux suites précédentes ; mais, parmi les suivantes, on arrivera à une $k'^{\text{ième}}$ suite dont les termes ne sont pas tous à l'extérieur de (p'...q'), et l'on choisit alors, à l'intérieur de (p'...q'), un troisième intervalle (p''...q'') tel que tous les éléments de la $k'^{\text{ième}}$ suite soient à l'extérieur de cet intervalle.

On voit ainsi qu'il est possible de former une suite infinie d'intervalles :

$$(p \dots q), (p' \dots q'), (p'' \dots q''), \dots$$

dont chacun contient les suivants ; ces intervalles relativement à nos suites (1), (2), (3),..., se comportent comme suit :

Les termes de la 1^{re}, de la 2^e, ..., de la $(k-1)^{\text{ième}}$ suite sont à l'extérieur de (p...q).

Les termes de la $k^{\text{ième}}$, ..., de la $(k'-1)^{\text{ième}}$ suite sont à l'extérieur de (p'...q').

Les termes de la $k'^{\text{ième}}$, ..., de la $(k''-1)^{\text{ième}}$ suite sont à l'extérieur de (p''...q'').

Mais il y a toujours *au moins* un nombre, que j'appellerai η qui trouve à l'intérieur des tous ces intervalles ; on voit immédiatement que ce nombre η , qui est évidemment > 0 et < 1 , ne peut appartenir à aucune de nos suites (1), (2), ..., (n),.... Ainsi, en partant de l'hypothèse que tous

les nombres > 0 et < 1 sont contenus dans (I), on arriverait à ce résultat opposé qu'un nombre déterminé $0 < \eta < 1$ n'appartient pas à (I): par conséquent, cette hypothèse est incorrecte.

Je crois donc être finalement arrivé à la raison pour laquelle l'ensemble appelé (x) dans mes précédentes lettres *ne peut pas* être mis en correspondance univoque avec celui désigné par (n). [CAVAILLÈS, p. 189, 1962]

Carta de Cantor para Dedekind, em 9 de dezembro de 1873 (página 150):

:

Bereits am 9. 12. weist Cantor Dedekind auf eine Vereinfachung des Beweises hin:

„... wonach die Zerlegung der Reihe (I) in (1), (2), (3), ... nicht mehr nöthig ist.

Ich zeige direct, daß, wenn ich von einer Reihe ausgehe,

(I) $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$

ich in *jedem* vorgegebenen Intervalle $(\alpha \dots \beta)$ eine Zahl η bestimmen kann, die nicht in (I) enthalten ist. ...“

Halle, le 9 décembre 1873

J'ai déjà trouvé, pour le théorème démontré dernièrement une démonstration simplifiée, pour laquelle on n'a plus besoin de décomposer la suite (I) en (1), (2), (3).

Je montre directement que, en partant d'une suite

$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n, \dots,$

je peux déterminer, dans *tout* intervalle donné $(\alpha \dots \beta)$ un nombre η n'appartenant pas à (I). Cela suffit pour déduire que l'ensemble (x) ne peut pas être mis en correspondance univoque avec l'ensemble (n), et j'en conclus qu'il y a, entre les systèmes et ensembles de valeurs, des différences essentielles, dont je ne savais pas tout récemment encore sonder les causes.

Je vous prie maintenant de m'excuser d'avoir tellement pris de votre temps pour cette question. [CAVAILLÈS, p. 191, 1962]

Carta de Cantor para Dedekind, em 25 de dezembro de 1873 (página 151):

Bien que je n'aie pas eu l'intention de publier pour le moment la question que j'ai récemment débattue pour la première fois avec vous, j'ai été amené tout-à-coup à le faire. J'ai en effet communiqué mes résultats le 22 à M. Weierstrass : mais le temps manquait alors pour en parler d'une façon précise ; j'ai eu, dès le 23, la grande joie de recevoir sa visite, ce qui m'a permis de lui communiquer les démonstrations ; il a été d'avis qu'il fallait que je publie cette affaire, pour autant qu'elle concerne les nombres algébriques. J'ai donc écrit un petit article sous le titre : *Sur une propriété de l'ensemble de tous les nombres algébriques réels*, et l'ai adressé à M. Le professeur Borchardt pour qu'il en considère la publication dans le *Journal f. Math.*

Pour la rédaction de cet article vos remarques et votre mode d'expression m'ont été, comme vous le verrez, très utiles. C'est ce que j'ai voulu vous faire savoir. [CAVAILLÈS, p.192, 1962]

Carta de Cantor para Dedekind, em 5 de janeiro de 1874 (página 159):

Hochgeehrter Herr Professor!

Als ich gestern Abend hierher zurückgekehrt war, fand ich den von Ihnen erwähnten Vortrag des Herrn Klein vor und las ihn heute durch. In Uebereinstimmung mit Ihren Bemerkungen kann auch ich demselben durchaus keine günstige Seite abgewinnen; ohne irgend etwas von Belang zu bieten hat es ganz den Anschein, dass der Verfasser an die Kernfragen der arithmetischen Analysis noch nicht herangekommen ist und sogar in dem von ihm bisher gemachten Felde der Geometrie höchst unsichere Ansichten habe; umso bedauerlicher scheint es mir, dass er mit einem Tone auftritt, als ob er alle Schwierigkeiten aus eigener Erfahrung kennengelernt und nun überwunden habe. —

Würde es sich verlohnen, so liesse sich Irrthum auf Irrthum daran nachweisen; vielleicht findet er dies später selbst.

Was die Fragen anbetrifft, mit denen ich in der letzten Zeit mich beschäftigt habe, so fällt mir ein, dass in diesem Gedankengange auch die folgende sich darbietet:

Lässt sich eine Fläche (etwa ein Quadrat mit Einschluss der Begrenzung) eindeutig auf eine Linie (etwa eine gerade Strecke mit Einschluss der Endpunkte) eindeutig beziehen, so dass zu jedem Punkte der Fläche ein Punkt der Linie und umgekehrt zu jedem Punkte der Linie ein Punkt der Fläche gehört?

Mir will es im Augenblick noch scheinen, dass die Beantwortung dieser Fragen, — obgleich man auch hier zum *Nein* sich so gedrängt sieht, daß man den Beweis dazu fast für überflüssig halten möchte, — grosse Schwierigkeiten hat. —

Gestern erst aus Berlin zurückgekehrt, denke ich am 14^{ten} wieder auf ein paar Tage hinzureisen; ich bin in einem fortlaufenden Wandern begriffen, dabei komme ich leider nicht zum Arbeiten.

Ihr ergebenster
G. Cantor

A propos des questions qui m'ont occupé ces derniers temps, je m'aperçois que, dans cet ordre d'idées, se presente aussi la suivante:

Est-ce qu'une surface (par exemple um carré, frontière comprise) peut être mise en relation univoque avec une courbe (par exemple um segment de droite, extremités comprises), de telle sorte qu'à tout point de la surface corresponde um point de la courbe, et réciproquement à tout point de la courbe um point de la surface?

Il me semble encore em ce moment que la réponse à cette question presente de grosses difficultés — bien que, ici aussi, l'on soit si fortement enclin à une réponse *négative*, qu'on pourrait presque tenir une démonstration pour superflue.[CAVAILLÉS, p.196, 1962]

Carta de Cantor para Dedekind, em 18 de maio de 1874 (página 160):

10 Dedekind – Halle, 18.5.1874 – II, XII, XVIII

Hochgeehrter Herr Professor!

Das Bedürfnis, mich über wissenschaftliche Gegenstände mit Ihnen auszusprechen und Ihnen im persönlichen Verkehre näher zu treten, lässt in mir den Wunsch entstehen, Sie in diesem Sommer in Braunschweig gelegentlich zu besuchen. Ob ich diesen Wunsch realisiren kann ist noch fraglich, da der Plan fürs erste ein ganz unbestimmter ist; immerhin wäre es möglich, dass ich eines Sonntags von hier abreise und den darauf folgenden Sonntag bei Ihnen bleibe; doch hängt es auch noch davon ab, ob Ihnen in diesem Sommer mein Besuch genehm wäre. Die Pfingsttage wird es nicht gehen, da ich alsdann in Berlin bei meiner Braut sein werde; aber nach Pfingsten wäre es vielleicht möglich.

Wenn Sie gelegentlich mir darauf antworten wollten, so wäre es mir lieb, von Ihnen zu hören, ob Sie an der im Januar Ihnen mitgetheilten Frage hinsichtlich der Zuordnung einer Fläche und einer Linie dieselbe Schwierigkeit finden wie ich, oder ob ich damit einer Täuschung mich hingegeben habe; in Berlin wurde mir von einem Freunde, dem ich dieselbe Schwierigkeit vorlegte, die Sache gewissermassen als absurd erklärt, da es sich von selbst verstünde, daß zwei unabhängige Veränderliche sich nicht auf eine zurückführen lassen.

Zu den letzten Berufungen ist nun auch die des hiesigen Thomae nach Freiburg getreten, wohin derselbe wohl annehmen wird.

Mit herzlichem Grusse
Ihr ergebenster
G. Cantor

Carta de Cantor para Dedekind, em 17 de maio de 1877 (página 58):

Em vous remerciant vivement de votre réponse, je dois reconnaître qu'à la page 25 de votre écrit sur les nombres irrationnels vous énoncez, sous les numéros I, II, III et IV, des propriétés qui sont tout à fait caractéristiques pour le domaine de tous les nombres réels, de telle sorte qu'*aucun* autre système de valeurs de nombres réels ne puisse avoir comme celui-là tout ces propriétés.

Cependant, permettez-moi, je vous prie, de faire cette remarque : l'accent que vous mettez, en divers endroits de votre travail, expressément sur la propriété IV, comme constituant l'essence de la continuité, ne peut-il pas donner lieu à des malentendus, qui ne pourraient pas se produire, à mon avis, au sujet de votre théorie, n'était cette prépondérance donnée à IV (comme en constituant l'essence propre). En particulier, vous dites dans l'avant-propos que l'axiome indiqué par moi est entièrement équivalent à celui que vous présentez au § 3 comme l'essence de la continuité. Mais vous comprenez par là cette même propriété qui, à la page 25, est donnée sous le numéro IV ; or, cette propriété appartient aussi au système de tous les nombres entiers, qui peut pourtant être considéré comme un prototype de la discontinuité.

Dans l'intérêt d'une affaire qui m'est devenue chère à moi aussi, je vous prie, si vous en trouvez le temps, d'examiner de plus près mes réserves.

P.S. Je m'explique de la façon suivante pourquoi vous insistez particulièrement sur IV : c'est dans cette propriété que réside ce qui distingue le domaine complet des nombres du domaine des nombres du domaine des nombres rationnels ; et pourtant il me semble, pour les raisons dites plus haut, que l'on ne peut attribuer à la propriété IV le nom employé par vous : « Essence de la continuité ». [CAVAILLÈS, p. 198, 1962]

De Cantor para Dedekind, 20 de junho de 1877 (página 160):

Hochgeehrter Herr College!

Für Ihr Schreiben vom 18^{ten} Mai dankend, mit dessen Inhalt ich vollkommen übereinstimme, anerkennend, daß die Verschiedenheit unsrer Ansichten nur eine äusserliche war, trete ich heute wieder mit einer Bitte zu Ihnen. Sie sehen, daß die uns verbindenden theoretischen Interessen für Sie den Nachtheil haben, dass ich Sie häufiger belästige, als Ihnen vielleicht lieb ist. —

Ich wünschte von Ihnen zu hören, ob Sie ein von mir angewandtes Schlussverfahren für arithmetisch strenge halten? —

Es handelt sich darum zu zeigen, dass Flächen, Körper, ja selbst stetige Gebilde von ϱ Dimensionen sich eindeutig zuordnen lassen stetigen Linien, also Gebilden von nur *einer* Dimension, daß also Flächen, Körper, ja sogar Gebilde von ϱ Dimensionen, dieselbe *Mächtigkeit* haben, wie Curven; diese Ansicht scheint der allgemein besonders unter den Vertretern der neuern Geometrie herrschenden entgegen zu sein, da man von einfach unendlichen, zweifach, dreifach, ... ϱ fach unendlichen Gebilden redet und sogar manchmal die Vorstellung gefunden wird, als ob die Unendlichkeit von v Puncten einer Fläche gewissermassen durch Quadrierung, die eines Körpers durch Cubirung der Unendlichkeit von Puncten einer Linie zu gewinnen sei. —

Da Gebilde von gleichviel Dimensionen auf einander *analytisch* bezogen werden können, so scheinen mir jene allgemeineren Fragen in folgende rein arithmetische Form zu bringen zu sein:

„Seien $x_1, x_2, \dots, x_\varrho$ ϱ unabhängige veränderliche reelle Grössen, von denen jede alle Werthe annehmen kann die ≥ 0 und ≤ 1 . Sei y eine $\varrho+1^{\text{te}}$ veränderliche reelle GröÙe mit dem gleichen Spielraum ($0 \leq y \leq 1$).

Ist es alsdann möglich die ϱ GröÙen $x_1, x_2, \dots, x_\varrho$ der einen y so zuzuordnen, dass zu jedem bestimmten Werthsystem ($x_1, x_2, \dots, x_\varrho$) ein bestimmter Werth y und auch umgekehrt zu jedem bestimmten Werth y ein und nur ein bestimmtes Werthsystem ($x_1, x_2, \dots, x_\varrho$) gehört?“

Diese Frage ist, *obgleich ich jahrelang das Gegentheil für richtig gehalten*, wie mir nun scheint, zu *bejahen* aus folgenden Gründen:

Jede Zahl $x \in \mathbb{N}_1^0$ läßt sich auf eine und nur eine Weise in Form eines *unendlichen* Decimalbruches darstellen, so dass:

$$x = \alpha_1 \cdot \frac{1}{10} + \alpha_2 \cdot \frac{1}{10^2} + \dots + \alpha_v \cdot \frac{1}{10^v} + \dots$$

wo α_v ganze Zahlen sind die ≥ 0 und ≤ 9 . Jede Zahl x bestimmt also eine unendliche Reihe $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ und umgekehrt.

Wir können also schreiben:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \alpha_{1,1} \cdot \frac{1}{10} + \alpha_{1,2} \cdot \frac{1}{10^2} + \dots + \alpha_{1,v} \cdot \frac{1}{10^v} + \dots \\
 x_2 &= \alpha_{2,1} \cdot \frac{1}{10} + \alpha_{2,2} \cdot \frac{1}{10^2} + \dots + \alpha_{2,v} \cdot \frac{1}{10^v} + \dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 x_\varrho &= \alpha_{\varrho,1} \cdot \frac{1}{10} + \alpha_{\varrho,2} \cdot \frac{1}{10^2} + \dots + \alpha_{\varrho,v} \cdot \frac{1}{10^v} + \dots
 \end{aligned}$$

Aus diesen ϱ Zahlen lässt sich eine $\varrho+1^{\text{te}}$ Zahl y herleiten:

$$y = \beta_1 \cdot \frac{1}{10} + \beta_2 \cdot \frac{1}{10^2} + \dots + \beta_v \cdot \frac{1}{10^v} + \dots$$

wenn man nimmt:

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} \quad \beta_{(n-1)\varrho+1} &= \alpha_{1,n}; \quad \beta_{(n-1)\varrho+2} = \alpha_{2,n}; \quad \dots \\
 \beta_{(n-1)\varrho+\sigma} &= \alpha_{\sigma,n}; \quad \dots \quad \beta_{(n-1)\varrho+\varrho} = \alpha_{\varrho,n}
 \end{aligned}$$

Da jede ganze positive Zahl v auf eine und nur auf eine Weise in die Form gebracht werden kann:

$$v = (n-1)\varrho + \sigma \quad \text{wo} \quad \begin{matrix} \sigma > 0 \\ \sigma \leq \varrho \end{matrix},$$

so sieht man, dass durch die Gleichungen (I) die Reihe $\beta_1, \beta_2, \dots$ und daher auch y völlig bestimmt ist; aber auch umgekehrt, wenn man von der Zahl y und folglich von der Reihe $\beta_1, \beta_2, \dots$ ausgeht, so sind durch die Gleichungen (I) die ϱ Reihen:

$$\begin{aligned}
 &\alpha_{1,1}, \quad \alpha_{1,2}, \quad \dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\alpha_{\sigma,1}, \quad \alpha_{\sigma,2}, \quad \dots \\
 &\dots\dots\dots \\
 &\alpha_{\varrho,1}, \quad \alpha_{\varrho,2}, \quad \dots
 \end{aligned}$$

und folglich auch die ϱ Zahlen $x_1, x_2, \dots, x_\varrho$ *eindeutig* bestimmt.

Mit herzlichem Grusse

Ihr
hochachtungsvoll ergebenster
G. Cantor.

Cartão-postal (postkarte) de Cantor para Dedekind, em 23 de junho de 1877 (página 165):

Cantor akzeptiert diesen Einwand sofort, wie aus einer Postkarte vom 23. 6. hervorgeht. Doch „... glücklicherweise trifft derselbe aber nur den Beweis, nicht die Sache; ich beweise nemlich *gewissermassen mehr* als in meiner Absicht lag, ...“.

Vous avez malheureusement tout à fait raison avec votre objection; heureusement celle-ci n'atteint que la démonstration, et non la chose elle-même; en effet, je demonstre *d'une certaine manière plus* que je ne voulais démontrer, puisque je mets um système $x_1, x_2, \dots, x_\varrho$ de variables réelles (≥ 0 e ≤ 1) sans autre restriction en correspondance univoque avec une variable y , qui est contenue dans le même intervalle et y prend toutes les valeurs l'exception de certaines d'entre elles y' ; mais les valeurs y' qu'elle prend effectivement, elle nes prend *qu'une seule fois*,

et cela est, me semble-t-il, l'essentiel. Car je peux alors mettre y' en relation univoque avec une autre grandeur t qui prend toutes les valeurs ≥ 0 et ≤ 1 .

Je suis seulement content que vous n'ayiez jusqu'à présent rien d'autre à objecter ; je me permettrai de vous écrire plus en détail sur ce sujet.[CAVAILLÈS, p.204, 1962]

De Cantor para Dedekind, em 25 de junho de 1877 (página 166):

„... Seit mehreren Jahren habe ich mit Interesse die Bemühungen verfolgt, denen man sich im Anschluss an Gauss, Riemann, Helmholtz und andern zur Klarstellung aller derjenigen Fragen hingegeben hat, welche die ersten Voraussetzungen der Geometrie betreffen. Dabei fiel mir auf, dass alle in dieses Feld schlagenden Untersuchungen *ihrerseits* von einer unbewiesenen Voraussetzung ausgingen, die mir nicht als selbstverständlich, vielmehr einer Begründung bedürftig erschienen ist. Ich meine die Voraussetzung, dass eine g fach ausgedehnte stetige Mannigfaltigkeit zur Bestimmung ihrer Elemente g von einander unabhängiger reeller Coordinaten bedarf; dass diese Zahl der Coordinaten für eine und dieselbe Mannigfaltigkeit weder vergrößert noch verkleinert werden könne. —

Diese Voraussetzung war auch bei mir zu einer Ansichtssache geworden, ich war von ihrer Richtigkeit fast überzeugt; mein Standpunkt unterschied sich nur von allen andern dadurch, dass ich jene Voraussetzung als einen Satz ansah, der eines Beweises in hohem Grade bedurf-

te und ich spitzte meinen Standpunkt zu einer Frage zu, die ich einigen Fachgenossen, im Besondern auch bei Gelegenheit des Gaussjubiläums in Göttingen vorgelegt habe, nämlich zu folgender Frage: „Lässt sich ein stetiges Gebilde von g Dimensionen, wo $g > 1$ auf ein stetiges Gebilde von einer Dimension eindeutig beziehen, so dass jedem Punkte des einen ein und nur ein Punkt des andern entspricht?“

Die meisten, welchen ich diese Frage vorgelegt, wunderten sich sehr darüber, dass ich sie stellen können, da es *sich ja von selbst verstünde*, dass zur Bestimmung eines Punktes in einer Ausgedehtheit von g Dimensionen immer g unabhängige Coordinaten gebraucht werden. Wer jedoch in den Sinn der Frage eindrang musste bekennen, dass es mindestens eines Beweises bedürfe, warum sie mit dem „selbstverständlichen“ *nein* zu beantworten sei. Wie gesagt gehörte ich selbst zu denen, welche es für das *Wahrscheinlichste* hielten, dass jene Frage mit einem Nein zu beantworten sei, bis ich vor ganz kurzer Zeit durch ziemlich verwickelte Gedankenreihen zu der Überzeugung gelangte, daß jene Frage ohne alle Einschränkung zu *bejahen* ist. Bald darauf fand ich den Beweis, welchen Sie heute vor sich sehen. —

Da sieht man, welch' wunderbare Kraft in den gewöhnlichen reellen rationalen und irrationalen Zahlen doch liegt, dass man durch sie im Stande ist die Elemente einer g fach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeit eindeutig *mit einer einzigen Coordinate* zu bestimmen; ja ich will nur gleich hinzufügen dass ihre Kraft noch weiter geht, indem, wie Ihnen nicht entgehen wird, mein Beweis sich ohne besondere Vergrößerung der Schwierigkeiten auf Mannigfaltigkeiten mit einer unendlich grossen Dimensionenzahl ausdehnen lässt, vorausgesetzt, dass ihre unendlich vielen Dimensionen die Form einer einfach unendlichen Reihe bilden. —

Nun scheint es mir, dass alle philosophischen oder mathematischen Deductionen, welche von jener irrthümlichen Voraussetzung Gebrauch machen, unzulässig sind. Vielmehr wird der Unterschied, welcher zwischen Gebilden von *verschiedener* Dimensionenzahl liegt, in ganz anderen Momenten gesucht werden müssen, als in der für charakteristisch gehaltenen Zahl der unabhängigen Coordinaten....“

Sur une carte postale que je vous ai adressée avant-hier, j'ai reconnu la lacune découverte par vous dans ma démonstration, et remarqué en même temps que j'étais en état de la combler, bien que je ne puisse me retenir de regretter quelque peu que cette question ne se laisse pas régler sans faire intervenir des considérations plus compliquées ; mais cela tient sans doute à la nature même du sujet, il faut donc que je me console ; peut-être se trouvera-t-il plus tard que ce qui

Car, une fois ce théorème (B) démontré, on met alors en correspondance univoque une par une les variables désignées plus haut par $e_1, e_2, \dots, e_p$ et ∂ respectivement avec d'autres variables

$$x_1, x_2, \dots, x_p, y$$

qui ont toutes un domaine de variation sans restrictions dans l'intervalle (0...1). On a ainsi défini également une relation univoque et réciproque entre le système

$$(x_1, x_2, \dots, x_p),$$

d'une part, et l'unique variable y , de l'autre, ce qui conduit à la démonstration du théorème (A).

Pour démontrer maintenant (B), on met d'abord tout les nombres *rationnels* de l'intervalle (0...1) (extrémités comprises) sous forme d'une suite, soit :

$$r_1, r_2, \dots, r_v, \dots$$

Les valeurs que peut prendre la variable e sont alors *toutes* celles de l'intervalle (0...1) à l'exception des nombres r_v .

On prend ensuite arbitrairement dans l'intervalle (0...1) une suite infinie ε_v de nombres *irrationnels*, qui satisfont seulement aux conditions $\varepsilon_v < \varepsilon_{v+1}$ et $\lim(\varepsilon_v) = 1$ pour $v = \infty$, et l'on désigne par f une grandeur variable qui peut prendre tout les valeur réelles ≥ 0 et ≤ 1 à l'exception des valeurs ε_v . Les deux grandeurs variables e et f soumises aux restrictions indiquées peuvent alors être mises en relation univoque et réciproque par les définitions suivantes :

si f n'est égal à aucun r_v , soit alors pour le e correspondant :

$$e = f;$$

si $f = r_v$, soit alors pour le e correspondant $e = \varepsilon_v$; on se convaincra facilement que, réciproquement : si e n'est égal à aucun ε_v , le f correspondant = e et si $e = \varepsilon_v$, alors $f = r_v$.

Le théorème (B) est alors ramené au suivant :

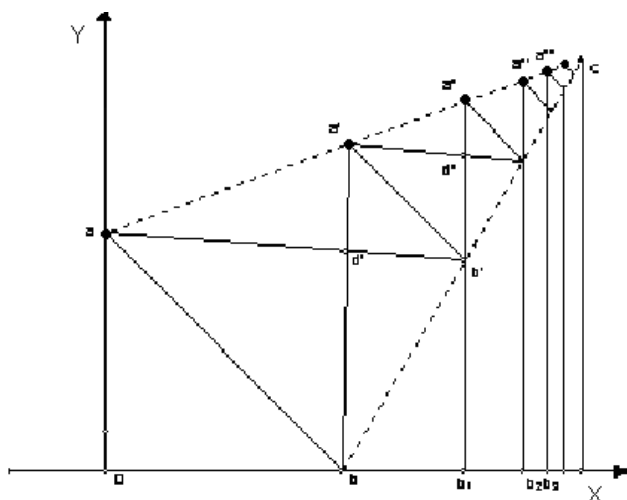
(C) « Un nombre f , qui peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle (0...1), à l'exception de certaines d'entre elles ε_v , satisfaisant aux conditions suivantes : $\varepsilon_v < \varepsilon_{v+1}$ et $\lim(\varepsilon_v) = 1$, peut être mis en correspondance univoque avec une variable continue x qui prend toutes les valeurs de l'intervalle (0...1) sans exception. »

Nous utiliserons ici le fait que les points $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ forment une *suite*, et que, par conséquent, l'intervalle (0...1) est divisé par eux en une infinité d'intervalles partiels.

Comme vous ne manquerez pas de le voir, ce théorème (C) peut alors se démontrer par application successive du théorème suivant :

(D) « Un nombre y , qui peut prendre toutes les valeurs de l'intervalle (0...1) à la seule exception de la valeur 0, peut être mis en correspondance univoque avec un nombre x qui prend toutes les valeurs de cet intervalle sans exception. »

Ce dernier théorème (D) peut alors être reconnu comme vrai par la considération de la curieuse courbe ci-jointe. Les coordonnées d'un point courant m de cette courbe sont mes grandeurs x et y dont l'une est une fonction univoque de l'autre : mais, tandis que x prend toutes les valeurs de l'intervalle (0...1), le domaine de variation de y est le même intervalle à la seule exception de la valeur 0.



La courbe se compose d'une infinité de segments de droite parallèles, devenant toujours plus petit, $\overline{ab}, \overline{a'b'}, \overline{a''b''}, \dots$, et du point c . Les extrémités $b, b', b'', \dots$, ne sont pas considérées comme appartenant à la courbe. Les longueurs des segments sont :

$$\overline{op} = \overline{pc} = 1; \quad \overline{ob} = \frac{1}{2}; \quad \overline{bb_1} = \frac{1}{4}; \quad \overline{b_1b_2} = \frac{1}{8}; \quad \overline{b_2b_3} = \frac{1}{16}, \dots$$

$$\overline{oa} = \frac{1}{2}; \quad \overline{a'd'} = \frac{1}{4}; \quad \overline{a''d''} = \frac{1}{8}; \quad \overline{a'''d'''} = \frac{1}{16}, \dots$$

J'ai suivi avec intérêt depuis plusieurs années les efforts que l'on a consacrés, après Gauss, Riemann, Helmholtz et d'autre, à la clarification des questions qui touchent aux premières hypothèses de la géométrie. Il m'est apparu à cet égard que toutes les recherches faites dans ce domaine partent *elles-mêmes* d'une hypothèse non démontrée, qui ne m'apparaît pas comme allant de soi, mais bien plutôt comme ayant besoin d'être fondée. Je veux parler de l'hypothèse selon laquelle une multiplicité continue p fois étendue nécessite pour la détermination de ses éléments p coordonnées réelles indépendantes entre-elles, le nombre de ces coordonnées ne pouvant être, pour une même multiplicité, ni augmenté ni diminué.

J'en étais venu à croire moi aussi à cette hypothèse, j'étais presque persuadé de son exactitude : mon point de vue différait seulement de tout les autres en ceci, que je considérais cette hypothèse comme un théorème qui nécessitait au plus haut point une démonstration, et j'avais précisé mon point de vue sous forme d'une question que j'avais soumise à quelques collègues, en particulier aussi à l'occasion du jubilé Gauss, à Göttingen, savoir la question suivante :

« Une variété continue à p dimensions, avec $p > 1$, peut-elle être mise en relation univoque avec une variété continue à une dimension, de telle sorte qu'à un point de l'une corresponde un point et un seul de l'autre ? »

La plupart de ceux à qui j'ai soumis cette question se sont beaucoup étonnés que j'aie seulement pu la poser, car il *se comprenait de soi* que, pour la détermination d'un point dans une extension à p dimensions, il fallait toujours employer p coordonnées indépendantes. Celui qui, pourtant, pénétrait le sens de la question, devait reconnaître qu'il fallait au moins démontrer pourquoi la réponse était « évidemment » *non*. Comme je l'ai dit, je faisais partie de ceux, qui tenaient pour vraisemblable que la réponse fût négative – jusqu'au moment tout récent où, par une succession assez complexe de pensées, je suis arrivé à la conviction que la réponse était

affirmative sans aucune restriction. Peu après, je trouvai la démonstration que vous avez aujourd'hui sous les yeux.

On voit ici quelle force prodigieuse il y a dans les nombres réels habituels, rationnels et irrationnels, si bien que par elle on peut déterminer de façon univoque, à l'aide d'une seule coordonnée les éléments d'une multiplicité continue ρ fois étendue ; et je veux ajouter tout de suite que leur force va plus loin encore, puisque, comme vous ne manquerez pas pas de le voir, ma démonstration peut s'étendre, sans que les difficultés en soient sensiblement accrues, à des multiplicités à un nombre infini de dimensions, pourvu que ces dimensions en nombre infini prennent la forme d'une suite simplement infinie.

Il me semble donc que toutes les déductions philosophiques ou mathématiques qui utilisent cette hypothèse erronée sont inadmissibles. Il faut plutôt rechercher la différence qui existe entre deux variétés à un nombre *différent* de dimensions, dans quelque raison tout autre que celle, généralement tenue pour caractéristique, du nombre de coordonnées indépendantes. [CAVAILLÈS, p. 205, 1962]

Carta de Cantor para Dedekind, em 29 de junho de 1877 (página 173):

„Entschuldigen Sie es gütigst meinem Eifer für die Sache, wenn ich Ihre Güte und Mühe so oft in Anspruch nehme; die Ihnen jüngst von mir zugegangenen Mittheilungen sind für mich selbst so unerwartet, so neu, dass ich gewissermassen nicht eher zu einer gewissen Gemüthsruhe kommen kann, als bis ich von Ihnen, sehr verehrter Freund, eine Entscheidung über die Richtigkeit derselben erhalten haben werde. Ich kann so lange Sie mir nicht zugestimmt haben, nur sagen: je le vois, mais je ne le crois pas. ...“

Veillez excuser mon zèle pour cette affaire, si je fais appel tellement souvent à votre bonté et à votre peine ; ce que je vous ai communiqué tout récemment est pour moi-même si inattendu, si nouveau, que je ne pourrai pour ainsi dire pas arriver à une certaine tranquillité d'esprit avant que je n'aie reçu, très honoré ami, votre jugement sur son exactitude. Tant que vous ne m'aurez pas approuvé, je ne puis que dire : Je le vois, mais je ne le crois pas. C'est pourquoi je vous prie de m'envoyer une carte postale pour me dire quand vous pourriez avoir terminé l'examen de la chose et si je peux compter vous voir exaucer ma demande, certainement bien exigeante.

La démonstration du théorème (C) sera considérablement facilitée par l'emploi du symbolisme suivant :

Si a et b sont deux grandeurs variables qui peuvent être mises en relation univoque l'une avec l'autre, on écrit :

$$a \sim b$$

Si alors $a \sim b$ et $b \sim c$, on a aussi:

$$a \sim c$$

Si de plus $a', a'', \dots$ est une suite finie ou infinie de variables bien définies ou de constantes, qui ne prennent deux à deux aucune valeur commune, mais telles que la réunion de leurs domaines de variations soit exactement celui de la variable unique a , on pose :

$$a \equiv (a', a'', \dots).$$

On a alors le théorème suivant :

(E) « Si :

$$a \equiv (a', a'', \dots)$$

$$b \equiv (b', b'', \dots)$$

et si di de plus :

$$\begin{aligned} a' &\sim b' \\ a'' &\sim b'' \\ a''' &\sim b''' \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

on a alors aussi :

$$a \sim b$$

Grâce aux substitutions :

$$y = \frac{z - \alpha}{\beta - \alpha}; \quad x = \frac{u - \alpha}{\beta - \alpha}$$

on déduit de (D) la généralisation suivante :

(F) « Un nombre z , qui peut prendre toutes les valeurs d'un intervalle $(\alpha \dots \beta)$ à l'exception de α , peut être mis en correspondance univoque avec un nombre u , qui prend toutes les valeurs de l'intervalle $(\alpha \dots \beta)$ sans exception. »

De là résulte immédiatement le théorème suivant :

(G) « un nombre w , qui prend toutes les valeurs de l'intervalle $(\alpha \dots \beta)$, à l'exception des deux valeurs extrêmes α , β , peut être mis en correspondance univoque avec un nombre variable u qui prend toutes les valeurs de l'intervalle $(\alpha \dots \beta)$. »

Démonstration. Soit un nombre $\alpha < \gamma < \beta$.

w' une variable qui prend toutes les valeurs de l'intervalle $(\alpha \dots \gamma)$ à l'exception de α et de γ ; w'' une variable qui prend toutes les valeurs de l'intervalle $(\gamma \dots \beta)$ à l'exception de la seule extrémité β .

On a alors :

$$(3) \quad w \equiv (w', w'')$$

Si l'on désigne alors par u'' une variable qui prend toutes les valeurs de l'intervalle $(\gamma \dots \beta)$ sans exception, par z une variable qui prend toutes les valeurs de l'intervalle $(\alpha \dots \beta)$ à l'exception de α , on a :
d'après (F) :

$$(4) \quad w'' \sim u''$$

et, à cause de (1) et (E) :

$$w \sim (w', u'')$$

Mais : $(w', u'') \equiv z$, donc :

$$w \equiv z.$$

Mais d'après (F) on a aussi :

$$z \sim u, \text{ donc enfin :}$$

$$w \sim u, \text{ q.e.d.}$$

Pour démontrer maintenant (C), nous décomposons f en variables $f', f'', \dots$ et la valeur isolée 1, f' prenant toutes les valeurs de l'intervalle $(0 \dots \varepsilon_1)$ à l'exception de ε_1 ; $f^{(v)}$ toutes les valeurs de l'intervalle $(\varepsilon_{v-1} \dots \varepsilon_v)$ à l'exception des valeurs extrêmes ε_{v-1} et ε_v . On a alors :

$$f \equiv (f', f'', f''', \dots, f^{(v)}, \dots, 1).$$

Soit x'' une variable qui prend toutes les valeurs de $(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_2)$ sans exception, $x^{(IV)}$ une variable qui prend toutes les valeurs de $(\varepsilon_3 \dots \varepsilon_4)$ sans exception, $x^{(2v)}$ une variable qui prend toutes les valeurs de l'intervalle $(\varepsilon_{2v-1} \dots \varepsilon_{2v})$ sans exception, alors on a, à cause de (G) :

$$\begin{aligned} f'' &\sim x'' \\ f^{IV} &\sim x^{IV} \\ &\dots\dots\dots \\ f^{(2v)} &\sim x^{(2v)} \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

par suite :

$$f \sim (f', x'', f''', x^{IV}, \dots, f^{(2v-1)}, x^{(2v)}, \dots, 1).$$

Mais :

$$(f', x'', f''', x^{IV}, \dots, f^{(2v-1)}, x^{(2v)}, \dots, 1) \equiv x,$$

donc :

$$f \sim x.$$

[CAVAILLÈS, p.211, 1962]

Carta de Dedekind para Cantor em 2 de julho de 1877 (página 175):

„Gelingt es, eine gegenseitige eindeutige und vollständige Correspondenz zwischen den Punkten einer stetigen Mannigfaltigkeit A von a Dimensionen einerseits und den Punkten einer stetigen Mannigfaltigkeit B von b Dimensionen andererseits herzustellen, so ist diese Correspondenz selbst, wenn a und b ungleich sind, nothwendig eine durchweg unstetige.“

„...Ich hoffe, mich deutlich genug ausgedrückt zu haben; die Absicht meines Schreibens besteht nur darin Sie zu bitten, nicht ohne eine gründliche Prüfung meines Einwandes gegen die bisher für wahr gehaltenen Glaubensartikel der Mannigfaltigkeitslehre öffentlich zu polemisieren. ...“

J'ai examiné encore une fois votre démonstration, et n'y ai pas trouvé de lacune ; je suis convaincu que votre intéressant théorème est exact et je vous en félicite. Mais je voudrais, comme je vous l'ai déjà annoncé sur ma carte postale, faire une remarque, qui est dirigée *contre* les conséquences que vous avez ajoutées dans votre lettre du 25 juin à la communication et à la démonstration du théorème, et qui ont trait au concept d'une multiplicité continue à ρ dimensions. D'après ce que vous dites, il pourrait sembler – mais mon opinion peut être inexacte – que vous vouliez, à partir de votre théorème, mettre en doute la signification ou l'importance de ce concept ; vous dit par exemple à la fin de cette lettre : « *Il me semble donc* que toutes les déductions philosophiques ou mathématiques qui utilisent cette hypothèse erronée » [celle du caractère déterminé du nombre de dimensions] « sont inadmissibles. Il faut plutôt rechercher la différence qui existe entre deux variétés à un nombre *différent* de dimensions, dans quelque raison tout autre que celle, généralement tenue pour caractéristique, du nombre de coordonnées indépendantes. »

A l'encontre de ce point de vue, je déclare être convaincu (malgré votre théorème, ou plutôt par suite des considérations occasionnées par votre théorème ou croire (je n'ai pas encore eu le temps de faire même seulement l'essai d'une démonstration) que le nombre de dimensions d'une multiplicité continue est, après comme avant, le premier et le plus important de ses invariants, et je dois prendre ici la défense de tout ceux qui ont écrit sur cet sujet jusqu'à ce jour. Je vous concède volontiers que cette constance du nombre de dimensions exige absolument une démonstration, et que, aussi longtemps que cette démonstration n'a pas été faite, l'on est en droit de mettre en doute la proposition. Mais je ne doute pas de cette constance bien qu'elle semble anéantie par votre théorème. Mais tous les auteurs ont évidemment fait l'hypothèse tacite, tout à fait naturelle, que pour une nouvelle détermination de points d'une multiplicité continue à l'aide de nouvelles coordonnées, ces dernières doivent être aussi des fonctions *continues* (en général) des anciennes coordonnées afin que ce qui apparaît comme étant continuellement connexe dans la première détermination de position) reste continuellement lié dans la deuxième détermination de position. Je crois donc provisoirement à l'exactitude du théorème suivante : « Si l'on réussit à établir une correspondance complète univoque et réciproque entre les points d'une multiplicité continue A à $\mathbf{a}$ dimensions d'une part, et les points d'une multiplicité continue B à $\mathbf{b}$ dimensions, d'autre part, alors, si $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ sont inégaux, cette correspondance est nécessairement partout *discontinue*. Ce théorème expliquerait aussi le phénomène qui s'est manifesté lors de votre première démonstration de votre théorème, à savoir justement l'insuffisance de cette démonstration ; la relation que vous vouliez y établir (à l'aide de fractions décimales) entre les points d'un domaine à ρ dimensions et les points d'un « segment à une dimension » aurait été, si je ne me trompe, *continue*, pourvu seulement qu'elle ait englobé *tous* les points du segment à une dimension ; de même, dans votre démonstration actuelle, la correspondance *initiale* entre les points du segment à ρ dimensions dont les coordonnées sont toutes irrationnelles et les points à une coordonnée également irrationnelle du segment à une dimension est, me semble-t-il, aussi continue que possible en un certain sens (petitesse des changements) ; mais, pour remplir les lacunes, vous êtes obligé d'introduire dans la correspondance une discontinuité, à donner le vertige, une descontinuité que réduit tout en atomes, telle que toute partie continuellement connexe, si petite qu'elle soit, de l'un des domaines a une image complètement déchirée, discontinue. J'espère m'être expliqué assez clairement ; cette lettre n'a d'autre but que de vous prier de ne pas entreprendre publiquement des polémiques contre les articles de foi admis jusqu'à présent de la théorie des multiplicités avant d'avoir soumis mon objection à un examen approfondi. [CAVAILLÈS, p.215,1962]

Carta de Cantor para Dedekind, em 4 de julho de 1877 (página 178):

Hochgeehrter Herr College!

Ich war sehr erfreut über Ihren Brief v. 2^{ten} Juli und danke Ihnen für Ihre eingehenden und außerordentlich treffenden Bemerkungen.

Durch die Schlußworte meines Briefes v. 25^{ten} Juni habe ich gegen meine Absicht den Schein hervorgerufen, als wollte ich durch meinen Beweis dem Begriffe der ρ fach ausgedehnten stetigen Mannigfaltigkeit überhaupt entgegenzutreten, während mein ganzes Streben vielmehr darauf gerichtet ist, ihn zu klären und auf den richtigen Standpunkt zu führen. Wenn ich sagte: „nun scheint es mir, dass alle philosophischen und mathem. Deduktionen, welche von jener irrthümlichen Voraussetzung Gebrauch machen —“ so meinte ich mit dieser Voraussetzung *nicht* „die Bestimmtheit der Dimensionenzahl“, sondern die Bestimmtheit der unabhängigen Coordinaten, deren Anzahl von gewissen Autoren unter allen Umständen gleich der Anzahl der Dimensionen vorausgesetzt wird, während, wenn man den Coordinatenbegriff *allgemein* fasst, ohne jede Voraussetzung über die Natur der vermittelnden Functionen, die Anzahl der unabhängigen, eindeutigen, vollständigen Coordinaten, wie ich gezeigt, auf jede vorgegebene Zahl gebracht werden kann. Ich bin auch Ihrer Ansicht, dass, wenn die Beschränkung gemacht wird, dass die Correspondenz eine stetige sein soll, alsdann nur Gebilde von gleich viel Dimensionen sich eindeutig auf einander werden beziehen lassen und dass auf diese Weise in der Zahl der unabhängigen Coordinaten eine Invariante gewonnen werden kann, welche zur Definition der Dimensionenzahl eines stetigen Gebildes führen dürfte. —

Ich vermag jedoch noch nicht zu erkennen, bis zu welchem Grade die Schwierigkeiten auf diesem Wege (zu dem Begriffe der Dimensionenzahl zu gelangen) steigen können, weil ich nicht weiss, ob man im Stande ist, den Begriff der *im Allgemeinen stetigen Correspondenz* zu begrenzen. Von der Möglichkeit einer solchen Begrenzung scheint mir aber auf diesem Wege Alles abzuhängen.

Eine fernere Schwierigkeit glaube ich darin zu erkennen, dass dieser Weg versagen dürfte, sobald das Gebilde aufhört ein durchweg stetiges zu sein; und dennoch möchte man doch auch in diesem Falle Etwas der Dimensionenzahl entsprechenden haben, um so mehr, als von den in der Natur vorkommenden Mannigfaltigkeiten ihre durchgehende Stetigkeit schwer nachzuweisen scheint. —

Ich möchte Ihnen durch diese Zeilen nur andeuten, dass ich, weit davon entfernt, mein Resultat gegen die Glaubensartikel der Mannigfaltigkeitslehre unbedingt kehren zu wollen, vielmehr vom Wunsche erfüllt bin, durch dasselbe zur Sicherstellung ihrer Sätze, so weit als möglich, Etwas beitragen zu können.

Ich möchte heute Ihre Zeit nicht mehr in Anspruch nehmen und bitte Sie noch, falls Sie Zeit finden sollten, die sich aufdrängenden Fragen zu untersuchen, solches nicht zu verschmähen und mich alsdann mit Ihren Resultaten bekannt machen zu wollen.

Mit herzlichem Grusse
Ihr ergebenster G. Cantor

J'ai été très heureux de recevoir votre lettre du 2 juillet, et je vous remercie de vos remarques précises et extraordinairement pertinentes.

A la fin de ma lettre du 25 juin, j'ai, contre ma volonté, donné l'impression de vouloir, par ma démonstration, m'opposer au concept même de multiplicité continue ρ fois étendue, alors que tous mes efforts n'ont d'autre but que de clarifier ce concept et de lui donner un fondement correct. Lorsque je disais : « *Il me semble donc* que toutes les déductions philosophiques ou

mathématiques qui utilisent cette hypothèse erronée sont inadmissibles. », ce n'est pas au « caractère déterminé du nombre de dimensions » que se rapportait cette hypothèse, mais bien au caractère déterminé des coordonnées indépendantes dont le nombre est supposé par certains auteurs égal en toute circonstance au nombre de dimensions, alors que, si l'on prend le concept de coordonnées *dans sa généralité*, sans aucune hypothèse sur la nature des fonctions utilisées, le nombre de coordonnées indépendantes, univoques, complètes peut, comme je l'ai démontré, être ramené à tout nombre donné. Je sais aussi de votre avis que, si l'on impose à la correspondance d'être continue, on ne peut plus alors mettre en relation univoque que des variétés à un nombre égal de dimensions, et que, de cette manière, le nombre de coordonnées indépendantes constitue un invariant que pourrait conduire à la définition du nombre de dimensions d'une variété continue.

Je ne suis pourtant pas encore capable de reconnaître à quel degré peuvent s'élever les difficultés dans cette voie (celle qui conduit au concept du nombre de dimensions), parce que je ne sais pas si l'on est en état de délimiter le concept de *correspondance continue en général*. Mais de la possibilité d'une telle délimitation me paraît tout dépendre dans cette voie.

Je crois apercevoir une autre difficulté en ceci que cette voie n'aboutirait sans doute pas dès que la variété cesse d'être partout continue ; et pourtant l'on aimerait avoir dans ce cas aussi quelque chose qui corresponde au nombre de dimensions, d'autant que, pour les multiplicités qui se présentent dans la nature, leur continuité partout semble difficile à établir.

Je voudrais seulement indiquer par ces lignes que je suis bien loin d'avoir voulu utiliser utiliser inconditionnellement mon résultat contre les articles de foi de la théorie des multiplicités, et, bien au contraire, que je souhaite pouvoir contribuer avec son aide à en raffermir autant que possible les théorèmes. Je ne voudrais pas vous déranger davantage aujourd'hui ; je vous prie, si vous en trouvez le temps, d'examiner les questions qui s'imposent, de ne pas dédaigner ce travail, et de me faire connaître ensuite vos résultats.

[CAVAILLÉS, p.216, 1962]

Carta de Cantor para Dedekind, em 23 de outubro de 1877 (página 183):

...Sur les recherches que j'ai faites l'été dernier, il y a chez Monsieur Borchardt, depuis un trimestre, un travail que j'ai rédigé sous le titre « Une contribution à la théorie des multiplicités ». J'espère qu'il va très bientôt être publié. Comme il m'a été permis d'y mettre à profit vos conseils amicaux, cela vous intéressera peut-être de savoir que j'ai trouvé pour l'un de mes théorèmes une démonstration encore plus simple. Si deux multiplicités bien définies peuvent être mises en correspondance univoque et complète, élément par élément, l'une avec l'autre, je me sers alors du mode d'expression qu'elles ont *même puissance* ou encore qu'elles sont *équivalentes* ; j'appelle aussi *équivalentes* deux variables réelles a et b , lorsqu'elles peuvent être mises en correspondance univoque et complète l'une avec l'autre, et j'écris dans ce cas, comme vous le savez :

$$a \sim b$$

Il s'agit alors du théorème suivant :

Si e est une variable, qui doit prendre toutes les valeurs irrationnelles > 0 et < 1 , et x une variable, qui prend toutes les valeurs rationnelles et irrationnelles ≥ 0 et ≤ 1 , on a :

$$e \sim x$$

Démonstration : Soit φ_v le terme général d'une suite, qui se compose de tous les nombres rationnels ≥ 0 et ≤ 1 ; soit η_v le terme général d'une suite formée de n'importe quels nombres irrationnel inégaux > 0 et < 1 , par exemple :

$$\eta_v = \frac{\sqrt{2}}{2^v}$$

h désignera la variable qui prend toutes les valeurs de l'intervalle $(0... 1)$ à l'exception des φ_v et des η_v .

Alors

$$(d) \quad x \equiv \{h, \eta_v, \varphi_v\} \\ e \equiv \{h, \eta_v\}.$$

Pour la dernière formule, nous pouvons aussi écrire :

$$(2) \quad e \equiv \{h, \eta_{2^v-1}, \eta_{2^v}\}.$$

Si l'on compare les formules (1) et (2) et que l'on remarque que :

$$h \sim h ; \eta_v \sim \eta_{2^v-1} ; \varphi_v \sim \eta_{2^v},$$

il en résulte que :

$$x \sim e, \text{ C.Q.F.D.}$$

Peut-être avez vous davantage étudié la question de savoir si, pour la détermination du concept de la multiplicité n -upla continue, la condition de la correspondance continue suffit pour que le concept soit affermi en lui-même, assuré contre toute contradiction ?

P.S. : J'ai regardé le nouveau manuel d'analyse de Lipschitz ; vous plaît-il ?

[CAVAILLÈS, p. 218, 1962]

Carta de Cantor para Dedekind, em 29 de Dezembro de 1878 (página 189):

Hochgeehrter Herr College!

Ich möchte das Jahr nicht vorübergehen lassen, ohne Ihnen meine herzlichen Glückwünsche zum neuen zu senden; hoffentlich erfahre ich gelegentlich auch von Ihnen wie Sie sich befinden. Bei uns ist Alles munter; die beiden Kinder entwickeln sich zu unserer Freude.

Sie werden wohl auch in den Besitz des Werkes „fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali di *Ulisse Dini*, Pisa 1878“ gelangt sein. Es scheint mir dasselbe mit Sachkenntnis und vielem Geschick verfasst zu sein; zur Einführung der Zahlen bedient er sich Ihrer Methode. — Obgleich ich mit derselben vollkommen übereinstimme, so glaube ich dennoch, dass ihr die von mir in einer Arbeit über trigonometrische Reihen [[11]] angedeutete äquivalent ist und dass durch die formelle Unterscheidung von Zahlgrößen verschiedener Ordnung, womit ich *allein* die verschiedenen Modi ihres Gegebenseins durch einfach unendliche Reihen,

(deren Glieder mit wachsendem Index sich *einander* unendlich nähern) zum Ausdruck bringen wollte, die Gefahr nicht eintritt, dass man glauben könnte, ich hätte das Gebiet der reellen Zahlen erweitern wollen. Ein solcher Missgriff ist von mir *nie auch nur entfernt* beabsichtigt worden; ich sage ausdrücklich in meiner Arbeit, dass jede von mir mit c bezeichnete Zahl einer Zahl b gleichgesetzt werden kann. Uebrigens ist dieser Missgriff, von einer andern Seite wirklich gemacht worden, so unerhört dies auch klingen mag; ich weiss nicht, ob Ihnen Thomae's Abriss einer Theorie der complexen Functionen und der Thetafunctionen bekannt ist; in der zweiten Auflage pag. 9. findet man Zahlen, welche (*horribile dictu*) kleiner als jede denkbare reelle Zahl und dennoch von Null verschieden sind.

Ueber die Frage, ob sich stetige Mannigfaltigkeiten mit verschiedener Dimensionenzahl einander eindeutig und stetig zuordnen lassen oder vielmehr über den Satz, dass dies nicht möglich ist, ist seit dem Erscheinen meiner Arbeit über Mannigfaltigkeitslehre von Thomae [T. [2]], Lüroth [L. [1]], Jürgens [J. [1]] und vor einigen Tagen im Borchardtschen Journal von Netto [N. [1]] geschrieben worden; es scheint mir jedoch die Sache noch nicht ganz fertig gestellt zu sein.

Mit der Bitte, mich Ihrer Familie freundlichst zu empfehlen schliesse ich mit herzlichem Grusse

als Ihr ganz ergebener
Georg Cantor.

De Cantor para Dedekind, em 28 de agosto de 1899 (página 110):

Hochverehrter Freund.

In der Hoffnung, daß Sie Zeit gefunden haben, sich in meine Mittheilungen über das System aller transfiniten Cardinalzahlen oder Mächtigkeiten zu versenken und deren Inhalt in Ihrem Geiste zu wägen und zu prüfen, möchte ich mir erlauben noch einen wesentlichen Punct zu berühren, auf den ich absichtlich in der ersten Vorlage nicht eingegangen bin, der Ihnen aber sicherlich von selbst (gewissermaassen durch seine Abwesenheit) sich bemerklich gemacht haben wird.

Man muß die Frage aufwerfen, woher ich denn wisse, daß die wohlgeordneten Vielheiten oder Folgen, denen ich die Cardinalzahlen

$$\aleph_0, \aleph_1, \dots, \aleph_{\omega_0}, \dots, \aleph_{\omega_1}, \dots$$

zuschreibe, auch wirklich „Mengen“ in dem erklärten Sinne des Wortes, d. h. „consistente Vielheiten“ seien. Wäre es nicht denkbar, daß schon *diese* Vielheiten „inconsistent“ seien, und daß der Widerspruch der Annahme eines „Zusammenseins aller ihrer Elemente“ sich *nur noch nicht bemerkbar* gemacht hätte? Meine Antwort hierauf ist, daß diese Frage auf *endliche Vielheiten ebenfalls auszudehnen* ist und daß eine genaue Erwägung zu dem Resultate führt: sogar für endliche Vielheiten ist ein „Beweis“ für ihre „Consistenz“ nicht zu führen. Mit anderen Worten:

Die Thatsache der „Consistenz“ endlicher Vielheiten ist eine einfache, unbeweisbare Wahrheit, es ist „*Das Axiom* der Arithmetik (im alten Sinne des Wortes)“. Und ebenso ist die „Consistenz“ der Vielheiten, denen ich die Alephs als Cardinalzahlen zuspreche, „das Axiom der erweiterten, der transfiniten Arithmetik“

Ich würde sehr gerne diese Sachen mündlich mit Ihnen genauer durchsprechen, wozu ja die Gelegenheit für mich leicht zu ergreifen wäre. Allein ich weiß nicht, ob es nicht für Sie momentan eine Störung in Ihren Arbeiten wäre, wenn ich mich von hier aus für ein paar Stunden zu Ihnen auf den Weg machte?

Mit herzlichem Gruß

Ihr

Georg Cantor.

...On doit se demander, d’où je sais que les multiplicités bien ordonnées ou suites auxquelles j’assigne les nombres cardinaux

$$\aleph_0, \aleph_1, \dots, \aleph_{\omega_0}, \dots, \aleph_{\omega_1}, \dots$$

son réellement des “ensembles” dans le sens du mot qui a été expliqué, c’est-à-dire des “multiplicités consistantes”. Ne serait-il pas concevable que déjà *ces* multiplicités-ci soient “inconsistantes”, mais que la contradiction qu’il y a à supposer une “existence simultanée de tous leurs éléments” ne se soit pas encore fait remarquer? Ma réponse est que cette question peut être *étendue également aux multiplicités finies*, et que, si l’on y réfléchit exactement, on aboutit alors au résultat: même pour les multiplicités finies, *il n’y a pas* de démonstration de leur “consistance”. En d’autres termes: le fait de la “consistance” des multiplicités finies est une vérité simple, indémonstrable, c’est « l’axiome de l’arithmétique » (dans l’ancien sens du mot). Et, de même, la “consistance” des multiplicités auxquelles j’attribue comme nombres cardinaux les alephs, c’est “l’axiome de l’arithmétique transfinie élargie”[CAVAILLÈS, p.244,1962]