UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
CENTRO DE CIÊNCIAS MATEMÁTICAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM HISTÓRIA DAS CIÊNCIAS E DAS TÉCNICAS E EPISTEMOLOGIA

JEAN LOUIS LEBLANC

RELATIVIDADE DE GALILEU, ARTEFATO EPISTEMOLÓGICO E TRANSFORMAÇÕES CINEMÁTICAS

RIO DE JANEIRO
2025

JEAN LOUIS LEBLANC

RELATIVIDADE DE GALILEU, ARTEFATO EPISTEMOLÓGICO E TRANSFORMAÇÕES CINEMÁTICAS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre.

Orientador: Prof. Carlos Benevenuto Guisard Koehler

RIO DE JANEIRO

2025

FICHA CATALOGRÁFICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

Dedico esta dissertação de mestrado com muito amor e reconhecimento aos meus dois filhos, Antonio e Frederico, e aos meus falecidos pais, Claude e Arlette. Ao meu primeiro orientador, fonte de inspiração e produção, que veio a falecer durante o curso da história, Ricardo Kubrusly. Ao seus infinitos e paradoxos. Por último, uma dedicação e homenagem especial para a curiosidade, inventividade e criatividade, despertadas pelas artes, ciências e pela filosofia.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer à CAPES, por ter me acordado bolsa de estudos durante dois anos, e ao HCTE/UFRJ, que contribuiu imensamente para a produção e o desenvolvimento do meu conhecimento. Ao meu orientador, Carlos Benevenuto Guisard Koehler, que me transmitiu muito de seu enorme conhecimento em história e filosofia da ciência, além de ser cultíssimo e generoso. Ao meu colega de HCTE, companheiro de discussões filosóficas e cientificas, e amigo, César Palmieri Martins Barbosa. Ao Maurício Bevilacqua, que a partir do meu projeto, confeccionou o artefato epistemológico, o Bi-Toro Articulado, de maneira funcional, artesanal e ágil, em sua oficina de efeitos especiais. Obrigado a Antonio e Frederico, meus filhos, que acompanharam, leram, aconselharam e opinaram.

A realidade não está no fim das divergências,
mas no ponto em que coincidem.

JORGE LUIS BORGES, *O Aleph*

RESUMO

Partindo de um único fenômeno — a queda de uma pedra do alto do mastro de um navio em movimento — esta dissertação percorre um caminho original, filosófico, técnico e matemático para enfrentar um problema fundamental da física clássica: como articular os diferentes movimentos observados por distintos referenciais inerciais sem recorrer a meras abstrações simbólicas. A hipótese aqui desenvolvida afirma que, ao invés de se contentar com a multiplicidade de pontos de vista, é possível construir uma operação objetiva que revele a correspondência ponto a ponto entre os movimentos relativos. A partir dessa hipótese, foi concebido e construído um artefato físico inédito — o Bi-Toro Articulado — que demonstra, de forma cinemática, a bijeção entre trajetórias retilíneas e parabólicas, estabelecendo um campo de equivalência dinâmica entre referenciais distintos.

O artefato revelou-se não apenas um operador de transformação entre referenciais galileanos, mas também um operador epistemológico, abrindo o caminho para a criação de dois modelos matemáticos inéditos: o Rotovetorial-G (gravidade como base angular) e o Rotovetorial-T (trajetória como base angular). Esses modelos descrevem, com precisão formal e beleza geométrica, a conversão de trajetórias retilíneas em curvas aceleradas por meio de funções angulares progressivas. Diferente das equações galileanas clássicas, esses modelos se baseiam na rotação e oferecem uma interpretação física da transformação, até então ausente na história da cinemática.

A dissertação alcança, assim, não apenas um resultado experimental e matemático, mas também filosófico: demonstra que a realidade do movimento não se reduz a uma questão de ponto de vista, mas emerge da interseção concreta entre sistemas. A rotação deixa de ser um ruído ou exceção e passa a ser o fundamento das transformações. A verdade, nesse sentido, não está em nenhum referencial isolado, mas na rotação que os une.

Palavras-chave: epistemologia do movimento; Bi-Toro Articulado; interseção de trajetórias; modelos Rotovetoriais; operador rotacional; transformações galileanas.

ABSTRACT

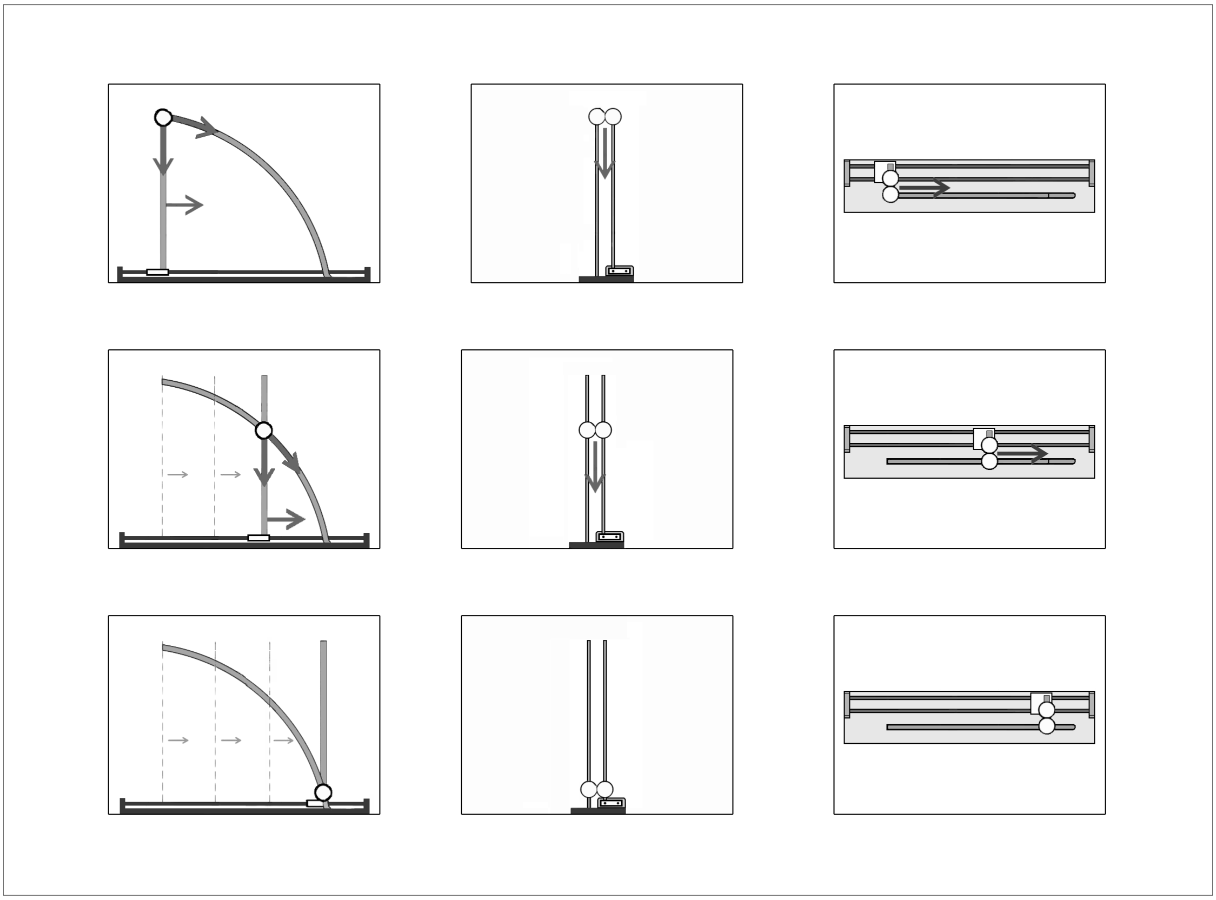
Starting from a single phenomenon — the fall of a stone from the top of a moving ship's mast — this dissertation follows an original philosophical, technical, and mathematical path to address a fundamental problem of classical physics: how to articulate the different motions observed by distinct inertial frames without resorting to mere symbolic abstractions. The central hypothesis developed here states that, rather than accepting the multiplicity of viewpoints, it is possible to construct an objective operation that reveals a point-to-point correspondence between relative motions. Based on this hypothesis, a novel physical artifact was conceived and constructed — the *Bi-Toro Articulado* — which cinematically demonstrates the bijection between rectilinear and parabolic trajectories, establishing a field of dynamic equivalence between distinct frames of reference.

The artifact proved to be not only a transformation operator between Galilean reference frames, but also an epistemological operator, leading to the creation of two original mathematical models: *Rotovetorial-G* (gravity as angular base) and *Rotovetorial-T* (trajectory as angular base). These models describe, with formal precision and geometric elegance, the conversion of rectilinear trajectories into accelerated curves through progressive angular functions. Unlike classical Galilean equations, these models are based on rotation and offer a physical interpretation of transformation — an interpretation hitherto absent in the history of kinematics.

The dissertation thus achieves not only an experimental and mathematical result, but also a philosophical one: it demonstrates that the reality of motion is not reducible to a matter of perspective, but emerges from the concrete intersection between systems. Rotation ceases to be a disturbance or exception and becomes the foundation of transformations. Truth, in this sense, lies not in any isolated reference frame, but in the rotation that unites them.

Keywords: epistemology of motion; *Bi-Toro Articulado*; trajectory intersection; Rotovetorial models; rotational operator; Galilean transformations.

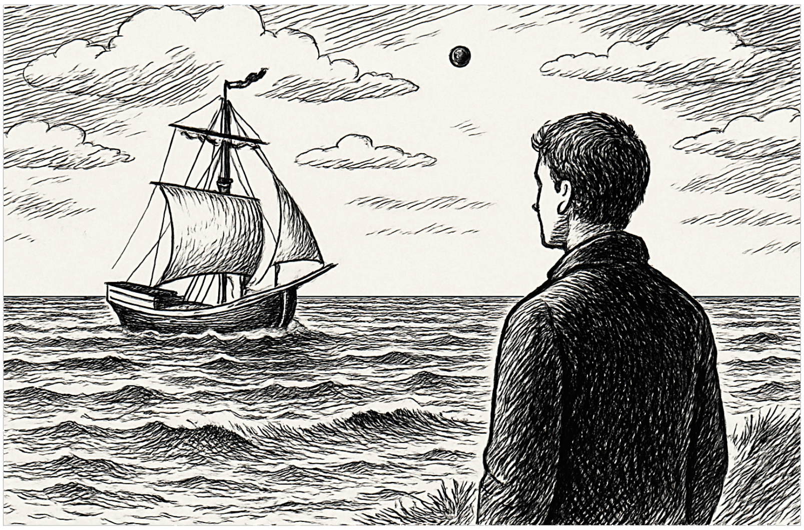
Link: https://youtu.be/CjvJzGBoh_M



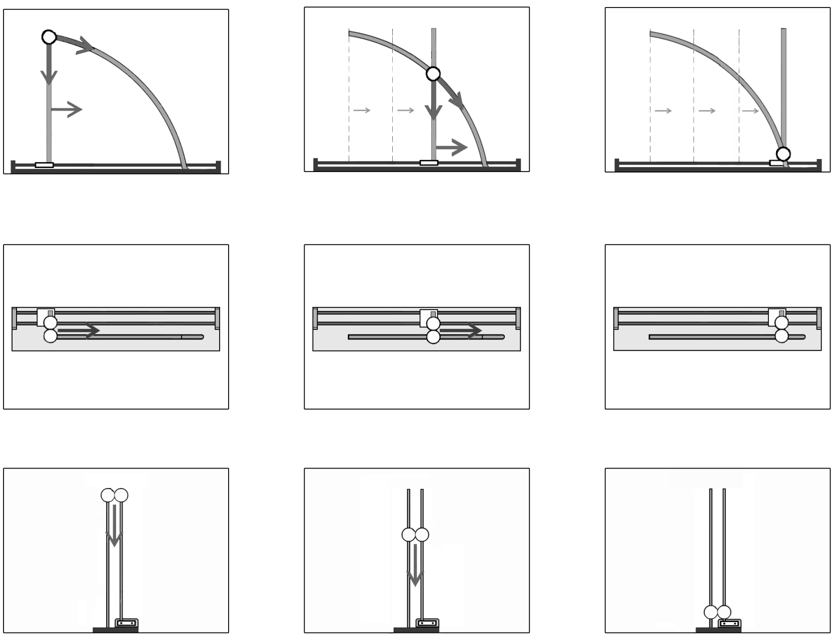
LISTA DE FIGURAS

LISTA DE GRÁFICOS

SUMÁRIO



1 Introdução



SAGREDO: *Por isso pergunto, em primeiro lugar, ao Sr. Simplício se ele acredita que ao mesmo corpo simples móvel possam naturalmente pertencer movimentos diferentes ou, ao contrário, que um só lhe convenha, que seja o seu próprio e natural*.

GALILEI, 2011, p. 203

1.1 Apresentação do Tema Geral

Esta dissertação parte de uma reflexão sobre uma das experiências mais influentes na história da ciência moderna: a queda de uma pedra solta do topo de um mastro de um navio em movimento. A cena, citada por Galileu Galilei nos seus escritos (*Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo ptolomaico e copernicano*, e *Dialogues Concerning Two New Sciences*), tem sido tradicionalmente mobilizada para ilustrar o princípio da relatividade galileana — que afirma a equivalência das leis do movimento em referenciais inerciais distintos.

Segundo a descrição galileana, a pedra em queda, para o observador que se encontra a bordo do navio, desce verticalmente em linha reta, caindo aos pés do mastro. Para um segundo observador, fixo na margem do porto, a mesma pedra descreve uma trajetória curva, parabólica, resultante da composição do movimento horizontal do navio com o movimento de queda livre. Ambas as descrições são consideradas válidas dentro de seus respectivos referenciais. Ainda assim, o tratamento tradicional tende a enfatizar a equivalência algébrica entre esses dois sistemas, deixando de explorar o que pode haver de mais fecundo no entrelaçamento físico e conceitual entre tais trajetórias contraditórias. Mas como é possível que um mesmo evento admita duas descrições geométricas tão opostas? A própria obra de Galileu já captura essa tensão com notável profundidade filosófica. Sagredo, personagem central de seus diálogos, interroga se um mesmo corpo pode pertencer a mais de um movimento natural. A pergunta dirigida a Simplício refere-se à própria estrutura do mundo físico: como pode um único corpo — simples, móvel, real — participar de dois regimes de movimento ao mesmo tempo? Essa inquietação, longe de ser uma curiosidade retórica, revela o núcleo do problema abordado nesta dissertação: a coexistência de trajetórias contraditórias num mesmo fenômeno físico e a possibilidade de sua articulação por meio de um operador físico concreto— e pelas leis físicas e modelos matemáticos que o descrevem com precisão. É no espaço conceitual entre a reta e a parábola que esta pesquisa se instala.

A presente investigação propõe uma releitura deste problema, sustentando que é possível construir um modelo físico que intersecione simultaneamente essas duas trajetórias — reta e parábola — e que dessa interseção derive um novo entendimento sobre a transformação entre referenciais inerciais. Essa proposta será realizada por meio da construção e análise de um artefato mecânico experimental denominado **Bi-Toro Articulado**. O nome remete à sua peça-chave, um corpo que, por sua topologia e articulação, é forçado a existir em dois mundos cinemáticos ao mesmo tempo. O Bi-Toro é constituído por duas hastes metálicas: uma reta e móvel (referencial do navio), outra curva e fixa (referencial da Terra), ambas percorridas por um corpo com dois furos e um eixo rotacional. Um dos furos se move ao longo da haste retilínea, enquanto o outro acompanha a curvatura parabólica. Com isso, a peça descreve, simultaneamente, dois movimentos contraditórios — realizando, a cada instante, uma correspondência ponto a ponto entre os dois referenciais inerciais.

A hipótese que orienta esta dissertação é que a transformação entre referenciais não é apenas um cálculo formal de translação, mas o resultado de uma interseção física entre trajetórias contraditórias, tornada possível por uma articulação geométrica e cinemática. A partir disso, formula-se a seguinte tese central: é possível sobrepor dois referenciais inerciais distintos por meio da interseção de suas trajetórias ponto a ponto e, dessa sobreposição decorre uma transformação física expressável por um ângulo de rotação articulado entre os sistemas. Essa rotação é mensurável e pode ser formalizada — ainda que neste trabalho ela será, prioritariamente, interpretada dentro do campo da mecânica clássica. Isso significa que não se pretende ultrapassar os limites da cinemática newtoniana, mas reformular o modo como ela pode ser materializada. Ao invés de depender da tradicional expressão $x' = x - vt$, a transformação descrita como um giro entre dois campos referenciais, onde o artefato torna-se o próprio operador da transformação.

A proposta metodológica desse trabalho inverte, portanto, a lógica usual das transformações: não se parte de um sistema de coordenadas abstrato para descrever o movimento — parte-se da materialidade do gesto, do traçado simultâneo das duas trajetórias, que se entrelaçam no corpo físico da peça. O Bi-Toro torna-se, assim, um operador físico de sobreposição referencial. Ele traduz a tensão entre mundos, não por uma equação simbólica, mas por uma estrutura cinemática concreta, visível, tátil e analisável. Essa mudança de perspectiva será acompanhada por um tratamento integrado do contexto histórico e epistemológico. A física aristotélica do repouso e do lugar natural, a ruptura galileana, e a formulação newtoniana do espaço absoluto não serão apresentados em blocos estanques, mas entrelaçados aos argumentos técnicos e conceituais. Citações dos textos fundadores serão utilizadas sempre que necessário para sustentar ou tensionar os conceitos desenvolvidos. Figuras, gráficos e equações estarão inseridos ao longo do texto principal, contribuindo para a articulação entre construção teórica e análise experimental.

O artefato em questão foi inteiramente desenvolvido para esta pesquisa, com especial atenção ao funcionamento sincronizado das duas guias (reta e curva) e à precisão da articulação rotacional. Ele não deve ser visto como um recurso pedagógico auxiliar, para ilustrar uma teoria preexistente, mas sim como elemento central do argumento epistemológico: ele produz teoria, ao mostrar como um corpo pode existir em dois referenciais ao mesmo tempo, articulando movimentos contraditórios num só gesto contínuo.

1.2 Hipótese e tese

O experimento mental proposto por Galileu — a queda de uma pedra do topo do mastro de um navio em movimento — parece, à primeira vista, de uma simplicidade elementar. No entanto, ele mobiliza, de forma concentrada, alguns dos conceitos mais fundamentais da física clássica: o princípio da inércia, a queda livre sob a ação da gravidade, a composição de movimentos, a simultaneidade relativa, a escolha do referencial, entre outros. A força filosófica do experimento está justamente na maneira como essas noções se entrelaçam para dar corpo a um problema que transcende a descrição local: o problema da transformação entre mundos descritivos.

Ao longo da história da ciência, esse problema foi reformulado de acordo com os instrumentos conceituais disponíveis. Em Aristóteles, o movimento dos corpos obedecia a uma ordem natural e orientada — os pesados descendo em direção ao seu lugar próprio, os leves ascendendo. Com o desenvolvimento da física moderna, esse paradigma foi gradualmente substituído por uma abordagem cinemática, onde o movimento passou a ser descrito por trajetórias, coordenadas e leis gerais. Galileu desempenha um papel crucial nesse processo, mas é importante lembrar que ele se insere em uma linhagem de pensadores que já haviam tensionado a ideia de um cosmos ordenado por finalidades. Sua contribuição foi dar forma matemática e coerência experimental a uma noção de movimento relativo.

No entanto, mesmo reconhecendo a equivalência entre os dois pontos de vista — o do homem no barco e o do homem no cais — Galileu ainda não dispunha de uma formalização matemática que articulasse os dois referenciais entre si. Cada descrição permanecia ancorada em seu próprio sistema: uma física aplicável à referência embarcada, outra ao solo fixo. A noção de transformação entre referenciais, tal como viria a ser expressa nas fórmulas do século XVIII e XIX, ainda não havia emergido. O problema das transformações foi posteriormente resolvido por meio de uma equação muito pertinente e simples, mas que mantinha epistemologicamente os referenciais inerciais separados. A comparação era possível, mas a conversão seguia como uma operação simbólica, externa ao fenômeno. O que o Bi-Toro propõe, por meio de sua articulação física, é justamente a realização concreta dessa transformação — não mais como abstração, mas como operação mensurável, definida pelo ângulo de sobreposição entre as trajetórias contraditórias.

A hipótese que orienta esta pesquisa é que a transformação entre referenciais inerciais não deve ser pensada como um cálculo formal, mas como uma interseção física entre mundos de descrição distintos, realizada por um mesmo corpo que percorre, simultaneamente, duas trajetórias contraditórias. Essa interseção é articulada por um dispositivo construído para esse fim, o Bi-Toro Articulado, cuja função não é ilustrar uma equivalência preexistente, mas produzir a própria condição da equivalência — isto é, materializar a transformação como um gesto cinemático tangível. Dessa hipótese decorre a seguinte tese central: a transformação entre referenciais inerciais pode ser compreendida como consequência de sua interseção física, na qual a articulação simultânea de trajetórias contraditórias gera uma rotação incorporada — e não uma simples translação de eixos ou substituição algébrica. Essa rotação, visível e mensurável, não depende do ponto de vista de um observador específico. Ao contrário, é a própria interseção que estabelece a equivalência entre os referenciais, tornando o observador secundário. Em vez de uma descrição condicionada à posição daquele que observa, o que se propõe aqui é uma descrição relacional e invariável, construída a partir da continuidade entre os mundos. A verdade do movimento não se encontra em um ou outro referencial, mas na operação que os costura.

Essa operação revela, ainda, a importância de se investigar o movimento composto como estrutura própria. A física tradicional, diante da dificuldade de descrever o composto, tende a decompô-lo: separa-se a queda vertical (gravidade) do deslocamento horizontal (inércia), e trata-se cada vetor isoladamente. O Bi-Toro propõe o caminho inverso: observar diretamente o composto, sem fragmentação, como forma indivisa que se articula por rotação — e que pode ser descrita por um campo vetorial composto, cujos elementos locais combinam vetores horizontais constantes com vetores verticais acelerados. A geometria resultante não é uma simples sobreposição vetorial, mas uma estrutura organizada por uma lógica de rotação contínua e progressiva. É nesse ponto que emerge a possibilidade de uma descrição rotacional da parábola.

Tal abordagem culmina na formulação de dois modelos matemáticos originais, desenvolvidos nesta dissertação: o modelo Rotovetorial-G, que adota a altura vertical como parâmetro angular em função da gravidade; e o modelo Rotovetorial-T, que descreve a trajetória parabólica como resultado de uma rotação progressiva tangencial ao tempo horizontal. Ambos os modelos permitem derivar a curva clássica da queda com notável precisão, sem recorrer diretamente à equação quadrática $y = ax^2 + bx + c$, mas a partir de uma rotação aplicada ponto a ponto no campo vetorial composto. Esses modelos, além de representarem uma contribuição técnica, propõem uma reformulação ontológica da cinemática clássica: o movimento não é apenas resultado da soma de vetores, mas da aplicação de uma operação de rotação ao longo do tempo e do espaço.

Com isso, o artefato torna-se mais do que um experimento mecânico — ele se torna um operador epistemológico. Ele não apenas representa um problema clássico da física, mas propõe uma nova fundamentação para sua descrição: a transformação como giro físico universal entre referenciais. Essa rotação não é abstrata, nem simbólica, mas visível e mensurável; e não depende do observador, mas da estrutura do campo vetorial em que os movimentos se entrelaçam. O Bi-Toro, nesse sentido, materializa a possibilidade de reformular a própria ontologia do movimento, propondo que a rotação — e não a translação — seja o verdadeiro operador de transformação entre referenciais.

A transformação, nesse sentido, deixa de ser uma passagem algébrica entre descrições independentes e torna-se um gesto físico, contínuo e analítico, expresso por rotação, articulado por vetores e formalizado por equações. Uma operação que unifica mundos, costura trajetórias e propõe uma nova leitura da física clássica — mais concreta, mais relacional, mais rotacional.

1.3 Justificativa epistemológica, filosófica e científica

A motivação mais profunda desta pesquisa nasce de um paradoxo que se esconde no coração da física clássica, muitas vezes tratado com naturalidade, mas raramente enfrentado em toda sua radicalidade. Um mesmo fenômeno físico — uma pedra solta do alto de um mastro — pode originar múltiplas trajetórias, dependendo do referencial adotado. Para o homem no navio, a pedra cai em linha reta. Para o homem no cais, a mesma pedra descreve uma parábola. Ambas as descrições são consideradas corretas. Mas como pode um único evento produzir dois movimentos distintos? O que ocorre, exatamente, entre a pedra e os observadores, para que surjam descrições tão divergentes da realidade? E mais: quantas outras trajetórias poderiam ser descritas por observadores situados em referenciais inerciais equivalentes, mas com velocidades diferentes? Uma terceira, quarta, quinta interpretação, até o infinito? É nesse ponto que emerge um paradoxo central: como o mesmo fenômeno pode dar origem a tantas descrições distintas, sem perder sua identidade física?

Esse raciocínio conduz inevitavelmente a uma multiplicação excessiva de versões possíveis de um mesmo fenômeno. E se cada uma dessas versões é igualmente legítima, a física se vê às voltas com um relativismo que dissolve a própria noção de realidade objetiva. Foi diante desse abismo que esta pesquisa se constituiu: como é possível que um só fenômeno dê origem a múltiplos movimentos, e ainda assim preserve uma verdade física partilhada? O que esta dissertação propõe é que essa verdade não está em nenhum dos referenciais isoladamente, mas na operação que os conecta — e que essa operação pode ser construída, realizada e medida.

Do ponto de vista filosófico e epistemológico, a relevância da pesquisa está em seu desafio ao paradigma representacional. Em vez de perguntar "como nossas teorias representam o mundo?", esta investigação pergunta "como nossos artefatos constroem mundos e pontes entre eles?". O Bi-Toro não é uma maquete ilustrativa. Ele é um operador fenomenotécnico, no sentido proposto por Gaston Bachelard e Ian Hacking: um dispositivo que não apenas mostra o fenômeno, mas o produz e o estrutura. Ao permitir a sobreposição de duas trajetórias contraditórias — reta e parábola — ele resolve fisicamente o paradoxo da multiplicidade de descrições, unificando os referenciais por meio de uma rotação mensurável. A verdade não está na escolha de um ponto de vista, mas na articulação objetiva entre os pontos de vista possíveis.

Essa articulação objetiva não se limita à justaposição simbólica de descrições distintas: ela se realiza por meio de uma operação rotacional contínua que conecta, ponto a ponto, dois campos vetoriais de natureza diferente. Em cada instante, um vetor horizontal constante — ligado ao movimento inercial do navio — se compõe a um vetor vertical variável — correspondente à aceleração gravitacional. Essa composição vetorial, aplicada sobre o plano de queda, estrutura um campo orientado de transformação, no qual cada direção resulta de uma rotação local e progressiva.

Foi a partir dessa construção que emergiram os dois modelos matemáticos propostos nesta dissertação: o Rotovetorial-G, fundamentado na altura como variável angular, e o Rotovetorial-T, que adota a posição horizontal como eixo da rotação. Ambos descrevem a parábola clássica não como curva estática, mas como trajetória emergente de um giro contínuo entre vetores atuantes. Essa abordagem não apenas supera a decomposição tradicional entre eixos ortogonais, mas propõe uma nova lógica para o movimento composto: em vez de ser decomposto, ele é entendido como entidade rotacional primária — contínua, tangível e expressável por equações inéditas.

A justificativa histórica também é significativa. O Bi-Toro constitui uma espécie de arqueologia experimental do conceito de relatividade. Galileu, embora não tenha formalizado as equações que hoje associamos ao seu nome, poderia perfeitamente ter concebido — e até mesmo construído — um dispositivo semelhante ao que propomos aqui. Todos os elementos estavam à sua disposição: o mastro, a pedra, o movimento do navio, a composição dos deslocamentos. Ao refazer esse percurso com ferramentas contemporâneas, esta pesquisa não pretende corrigir o passado, mas iluminar uma bifurcação não tomada: e se a física tivesse desenvolvido seus princípios a partir de mecanismos construtivos e geométricos, em vez de fórmulas simbólicas e generalizações algébricas? O Bi-Toro não substitui a história, mas revela a plasticidade de seus caminhos possíveis.

Já no plano pedagógico e intuitivo, o artefato revela-se uma ferramenta de rara potência. Sua aplicação em escolas e universidades oferece um meio concreto de pensar e demonstrar o princípio da relatividade galileana, permitindo que estudantes não apenas visualizem, mas também manipulem e experimentem o movimento relativo. Em vez de depender exclusivamente da abstração matemática, o Bi-Toro transforma o conceito em experiência tátil e visual, tornando acessíveis temas que, muitas vezes, são compreendidos apenas formalmente. Mais do que um recurso didático, ele provoca o pensamento ao romper com as convenções da decomposição vetorial, oferecendo o composto como forma primária — um gesto, um encadeamento, uma curvatura articulada do real. Dessa forma, o estudo do movimento composto torna-se não apenas possível, mas necessário, sendo abordado como uma estrutura coerente, contínua e não redutível à soma de vetores elementares.

Por essas razões — pela natureza do problema enfrentado, pela originalidade da proposta e pelas possibilidades que ela abre em múltiplos domínios —, esta dissertação se justifica como uma contribuição relevante para o campo da história e filosofia das ciências. Seu valor não está apenas na resposta que propõe, mas na forma como essa resposta é construída: pela convergência entre raciocínio conceitual, experimentação física e reflexão epistemológica. Trata-se de uma investigação que não busca esgotar o problema, mas reabri-lo por outro ângulo, devolvendo à física do movimento um de seus desafios mais fundamentais: o de articular o múltiplo sem perder o comum.

1.4 Propósitos e horizontes da pesquisa

O objetivo central desta dissertação é propor uma nova descrição do movimento e de suas trajetórias em referenciais inerciais equivalentes, concebida como uma universalização física, matemática, ontológica, epistemológica e filosófica. Essa proposta nasce da tentativa de reconstruir, a partir da experiência de Galileu com a pedra que cai do mastro, um outro modo de pensar a transformação entre mundos em movimento. Em vez de tratar os referenciais como domínios separados e suas relações como meras translações algébricas, busca-se aqui uma abordagem na qual a transformação emerge da própria articulação física entre trajetórias contraditórias — e que pode, portanto, ser realizada, observada, medida e pensada a partir de um artefato concreto: o Bi-Toro Articulado.

Essa transformação não é abstrata, nem meramente teórica. Ela ocorre dentro de um dispositivo que permite a sobreposição simultânea de dois movimentos — o da reta e o da parábola —, realizando ponto a ponto a interseção entre sistemas inerciais distintos. O Bi-Toro, neste contexto, torna-se o operador central de uma nova linguagem físico-conceitual. Por meio de sua análise e funcionamento, será possível desenvolver uma física e uma matemática próprias, articuladas em torno do ângulo de rotação que define a bijeção entre os referenciais. Essa matemática não substitui a galileana: ela a desdobra, tornando visível o que antes permanecia implícito — a curvatura invisível que une duas descrições do mesmo fenômeno.

Mais do que formalizar uma operação, este trabalho deseja investigar como uma realidade física pode emergir não da escolha de um observador, mas da relação que se estabelece entre observadores diversos. Em outras palavras, a verdade do movimento não está num ponto fixo, mas na ponte que liga pontos divergentes. E aqui, com certa ousadia filosófica, aproxima-se uma imagem platônica: a de que o real não reside nas aparências móveis do mundo, mas nas estruturas invisíveis que ligam os elementos entre si. O Bi-Toro, ao articular dois regimes de movimento numa única peça, permite vislumbrar essas relações ocultas — não como alegoria, mas como operação cinemática concreta.

Essa transformação não é abstrata, nem meramente teórica. Ela ocorre dentro de um dispositivo que permite a sobreposição simultânea de dois movimentos — o da reta e o da

parábola —, realizando ponto a ponto a interseção entre sistemas inerciais distintos. O Bi-Toro, neste contexto, torna-se o operador central de uma nova linguagem físico-conceitual. Por meio de sua análise e funcionamento, será possível desenvolver uma física e uma matemática próprias, articuladas em torno do ângulo de rotação que define a bijeção entre os referenciais. Essa matemática não substitui a galileana: ela a desdobra, tornando visível o que antes permanecia implícito — a curvatura invisível que une duas descrições do mesmo fenômeno. A realidade física torna-se, assim, produto da inter-relação: um campo de articulações, e não de essências isoladas.

Nesse processo, ganha destaque o estudo do movimento composto, frequentemente ignorado ou diluído na prática didática e nas formulações algébricas clássicas. A queda da pedra — fenômeno aparentemente simples — revela-se, no fundo, um movimento duplo, simultâneo, cuja coerência interna não se deixa reduzir à justaposição de vetores independentes. O Bi-Toro oferece uma oportunidade única de investigar esse composto em sua forma primária: sem decomposição, sem abstração, como uma estrutura física unificada e contínua. Esse gesto não apenas amplia o campo da análise científica, mas também recupera uma dimensão esquecida do real: a de que os fenômenos, como os conceitos, se entrelaçam — e que sua inteligibilidade depende do modo como se articulam.

Por fim, a dissertação assume o Bi-Toro como operador heurístico e epistemológico. Ele não é apenas um modelo para ilustrar uma teoria, mas um instrumento para pensar. Seu movimento não representa: ele propõe. A rotação que ele executa — discreta, articulada, mensurável — opera como um mediador entre mundos, entre regimes de descrição, entre campos do saber. A potência dessa abordagem permite vislumbrar, ainda que de forma preliminar, possíveis extensões para além da física clássica. As transformações geradas pelo Bi-Toro poderão, futuramente, ser exploradas em contextos como a relatividade restrita, a relatividade geral, a teoria dos campos ou mesmo a física quântica. Embora essas extrapolações estejam fora do escopo desta dissertação, elas apontam para um horizonte fecundo, onde o conceito de transformação não é mais uma operação simbólica, mas uma rotação real entre mundos — uma estrutura da verdade.

1.5 Metodologia interdisciplinar e construtiva

Esta pesquisa opera na intersecção entre história e filosofia da ciência, modelagem físico-matemática e construção experimental. Trata-se, portanto, de uma investigação de caráter explicitamente interdisciplinar — mas que não se limita à justaposição de áreas distintas. O percurso metodológico aqui adotado é transdutivo: envolve a transferência e a transformação mútua de conceitos, práticas e materiais entre diferentes domínios do saber, articulados em torno de um problema comum, num ciclo de produção e refinamento do conhecimento. O que está em jogo não é apenas compreender a relatividade galileana em sua formulação clássica, mas explorar como essa estrutura pode ser reconstruída, reinterpretada e materializada. O autor, nesse processo, assume o papel de vetor integrador, garantindo que as abordagens históricas, construtivas, físicas e filosóficas não se convertam em compartimentos isolados, mas em camadas que se entrelaçam numa unidade conceitual e operatória.

A primeira vertente metodológica é a abordagem histórico-conceitual, entendida aqui como uma arqueologia das ideias de movimento e de transformação. Não se trata de uma cronologia linear, mas da tentativa de reconstruir os obstáculos epistemológicos — no sentido de Bachelard — que marcaram a emergência do conceito de referencial inercial. Foram analisadas fontes primárias como os *Discorsi* e o *Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo*, de Galileu Galilei, com foco especial na cena do navio e na formulação do movimento como algo relativo. Também foram mobilizados textos de Aristóteles (especialmente a *Física* e o *De Caelo*), com sua doutrina do lugar natural, e de Newton, cuja formulação do espaço absoluto será retomada em contraste com a proposta desta dissertação. Por fim, é importante ressaltar que a matematização explícita do problema do navio, que hoje conhecemos como "transformações galileanas", não foi feita por Galileu, mas por Joseph-Louis Lagrange, no final do século XVIII, como parte de um esforço mais amplo de formalização da mecânica clássica. Essa distinção entre a intuição experimental e a estrutura algébrica será retomada criticamente ao longo do trabalho. Autores como Giordano Bruno, Nicole Oresme e Jean Buridan são mobilizados como precursores fundamentais, capazes de abrir o campo para a ideia de um movimento interno, relativo, e não necessariamente visível. A leitura histórica é reforçada por fontes secundárias como Alexandre Koyré, que destaca a ruptura entre o mundo qualitativo aristotélico e a geometria galileana, Stillman Drake, com sua valorização do aspecto técnico e experimental da obra de Galileu, e Paolo Galluzzi, que mostra o cientista como engenheiro e projetista. A travessia conceitual entre essas fontes permite situar o problema do movimento relativo dentro de uma genealogia maior — e justificar a necessidade de um artefato capaz de operá-lo fisicamente.

A segunda camada é a metodologia de design e construção do artefato, ancorada no paradigma da pesquisa baseada em design, ou *Design-Based Research* (DBR), uma abordagem que integra a criação de artefatos com a produção de conhecimento, alinhada com a filosofia da fenomenotécnica de Gaston Bachelard, para quem o instrumento não apenas revela, mas produz o fenômeno estudado. No contexto desta dissertação, o Bi-Toro Articulado não é um suplemento à reflexão teórica — ele é o núcleo da investigação. A ideia do Bi-Toro emergiu da tentativa de traduzir a transformação galileana — convencionalmente expressa por $x' = x - vt$— em uma estrutura concreta e operativa. Era preciso não apenas representá-la, mas executá-la fisicamente: permitir que um mesmo corpo percorresse, simultaneamente, duas trajetórias contraditórias, correspondentes a dois referenciais distintos. O corpo articulado com dois furos e um eixo interno foi projetado para deslizar sobre duas guias — uma reta móvel e uma curva parabólica fixa — de modo a realizar uma bijeção ponto a ponto entre as trajetórias. Esse modelo passou por sucessivos refinamentos construtivos, incorporando aprendizados técnicos e conceituais. A resistência dos materiais, o ajuste dos eixos, a precisão da rotação e a sincronia dos movimentos se tornaram parte integrante da pesquisa, revelando como cada falha técnica continha um problema teórico em potência. Por exemplo, dificuldades em garantir a suavidade do deslizamento das guias instigaram reflexões sobre a própria natureza da continuidade na transformação cinemática, realimentando o processo de design. O processo de construção revelou-se, assim, uma forma ativa de pensamento.

A terceira vertente é a análise físico-matemática. O Bi-Toro Articulado não é apenas sugestivo ou intuitivo: ele foi projetado para expressar com exatidão as condições de uma transformação entre referenciais inerciais equivalentes. O movimento do corpo sobre as guias — simultaneamente retilíneo e parabólico — realiza uma correspondência contínua entre as duas descrições do fenômeno, convertendo a translação algébrica em uma operação rotacional concreta. O ângulo entre as guias torna-se o parâmetro que formaliza a transformação. Gráficos, diagramas vetoriais, equações do movimento acelerado, representações da trajetória composta e simulações geométricas foram produzidos ao longo do processo. Essa modelagem permitiu validar o artefato como operador legítimo de transformação e como proposta física alternativa à abstração matemática. A articulação entre trajetória, tempo, aceleração e rotação foi analisada em seus aspectos quantitativos e qualitativos. Esta atenção aos aspectos qualitativos do movimento — sua forma, sua natureza relacional — dialoga com as críticas à redução da física ao puramente quantitativo (como em Koyré) e encontra eco na ênfase de Ernst Mach na crítica ao espaço absoluto e na visão relacional do movimento, o que permite estabelecer uma ponte entre a descrição matemática e a construção mecânica.

A quarta dimensão metodológica é a reflexão filosófico-epistemológica, na qual o Bi-Toro é interpretado como operador de sentido e produtor de conhecimento. Esta dimensão epistemológica, ao conferir ao artefato um papel ativo na validação ou refinamento de conceitos, alinha-se com a filosofia de Karl Popper, para quem a força de uma proposta reside em sua abertura à testabilidade. A filosofia dos objetos técnicos de Gilbert Simondon também é convocada: o Bi-Toro é analisado como indivíduo técnico, cuja articulação interna expressa uma lógica de individuação e resolução de tensões. A ontologia do movimento — presente em autores como David Bohm, com sua ideia de ordem implícita — inspira a concepção de que o real não está nos elementos isolados, mas na relação que os une. Com isso, a relatividade de Galileu é retirada do plano das representações e reconduzida ao plano da operação. O artefato não serve apenas para ilustrar uma teoria já pronta — ele força o pensamento a se reorganizar. Ele atua como um mediador epistemológico, um construtor de conceitos, um elo entre o visível e o inteligível. Nesse sentido, a metodologia adotada é também uma ontologia em ato: um modo de fazer surgir o pensamento a partir do gesto e da matéria, um ciclo de produção do conhecimento que encontra na fenomenotécnica (Bachelard) sua justificação fundamental — ao conceber o conhecimento como algo que se constrói no ato, pela interação entre gesto, matéria e pensamento.

A quinta e última dimensão é a reflexão matemática propriamente dita, entendida não como simples linguagem auxiliar, mas como instância autônoma de organização do real e de revelação da estrutura do cosmos. A matemática é aqui convocada tanto em sua vertente clássica — como forma de descrever leis naturais — quanto em sua dimensão profunda, quase pitagórica, como arquitetura invisível da natureza. No contexto desta dissertação, essa dimensão se expressa especialmente na construção de modelos rotacionais que não apenas calculam, mas explicam e interpretam: o Rotovetorial-G e o Rotovetorial-T. Eles revelam que a parábola não precisa ser apenas a solução de uma equação do segundo grau, mas pode ser compreendida como produto de um giro progressivo, regulado por funções angulares suaves. Essa transição da álgebra para a rotação reabilita a geometria como forma ativa do pensamento e reintroduz a noção de continuidade como essência do movimento físico. Ao adotar, por exemplo, a raiz quadrada como base angular, a pesquisa reencontra a potência dos números irracionais e das curvas analógicas — formas que se aproximam do infinito sem jamais alcançá-lo, como as assimptotas ou o próprio tempo. A matemática é, assim, revalorizada em sua força epistemológica e ontológica: ela não apenas descreve fenômenos, mas os gera, os organiza, os torna possíveis. A crítica implícita à transformação galileana como abstração simbólica ganha aqui novo contorno: não se trata de negar a álgebra, mas de devolver à matemática sua função mediadora entre o sensível e o inteligível, entre a experiência e a estrutura. Nesse sentido, o Bi-Toro e seus modelos não são apenas aplicações da matemática — são expressões dela, construções que tornam visível o invisível e que, ao fazê-lo, ampliam o próprio campo daquilo que pode ser pensado, formulado e, por fim, conhecido.

1.6 Estrutura da dissertação

A presente dissertação organiza-se em sete capítulos principais e cinco apêndices, seguindo um fio contínuo que parte de uma pergunta fundadora — como um único fenômeno físico pode gerar duas trajetórias distintas em dois referenciais inerciais diferentes? — até a construção de um artefato experimental e conceitual capaz de propor uma resposta. A lógica que estrutura este percurso é a seguinte: inicia-se por descrever o problema em seu contexto original; em seguida, apresenta-se uma nova visão teórica para esse problema; a partir daí, constrói-se um artefato que materializa e opera essa nova visão; analisam-se então os conceitos físicos, matemáticos e rotacionais implicados neste artefato e na nova perspectiva; expõem-se as potências, os alcances e as implicações desta proposta em diversos campos; e, finalmente, conclui-se. Este roteiro guia a organização dos capítulos principais.

O Capítulo 1 introduz o tema, formula a hipótese e a tese centrais, justifica a relevância da investigação e apresenta os fundamentos metodológicos que a sustentam. Trata-se de um capítulo de abertura e ancoragem: nele se delineia a proposta de reconstrução do problema da relatividade galileana por meio da articulação entre cinemática, rotação e interseção física entre trajetórias. As linhas gerais da pesquisa são estabelecidas, incluindo a abordagem interdisciplinar e o papel central do Bi-Toro Articulado como operador experimental, pedagógico e epistemológico.

O Capítulo 2 mergulha na cena clássica do navio descrita por Galileu e na riqueza de conceitos físicos que dela emergem: a inércia, a queda livre, o movimento composto, a independência das forças, a relatividade do movimento e o papel do observador na determinação do fenômeno físico. A densidade conceitual dessa experiência exige sua inserção num contexto histórico e filosófico mais amplo, permitindo compreender por que esse experimento, aparentemente simples, toca nos fundamentos da física clássica e moderna. O capítulo introduz também a ideia de campos vetoriais diferenciados nos dois referenciais — uma antecipação da formulação futura dos modelos. Com o problema clássico apresentado em sua profundidade, o percurso avança para uma nova abordagem.

O Capítulo 3 propõe uma reinterpretação cinemática da experiência galileana. Em vez de tratá-la como uma justaposição de dois pontos de vista equivalentes, propõe-se entendê-la como a possibilidade de uma interseção física entre trajetórias contraditórias, uma sobreposição dinâmica entre referenciais, e uma bijeção ponto a ponto entre os referenciais que descrevem o mesmo fenômeno de maneiras distintas. A tese é que a verdade do movimento não está nem em um referencial, nem no outro — mas na articulação entre eles. Exposta a reinterpretação teórica, o passo seguinte é sua materialização.

O Capítulo 4 apresenta a concepção e a realização do Bi-Toro Articulado, artefato desenvolvido especialmente para esta pesquisa. São descritas sua origem, seu princípio operacional, seus desenhos técnicos, sua construção física e sua documentação imagética e audiovisual. Trata-se de uma peça cinemática que encarna, com precisão, a transformação entre trajetórias contraditórias por meio de uma estrutura articulada de rotação. Com base no método da épura e no rigor da representação espacial, o capítulo insere o artefato no campo das práticas científicas construtivas, aliando engenho mecânico e operação epistemológica. Com o artefato materializado, a investigação volta-se para sua análise intrínseca.

O Capítulo 5 analisa o funcionamento do Bi-Toro do ponto de vista físico e matemático. As equações do movimento, os campos vetoriais, a aceleração na curva, a rotação da peça central, a decomposição e a recomposição de vetores — todos esses elementos são integrados na descrição de uma transformação concreta entre referenciais. A proposta substitui a translação algébrica das fórmulas tradicionais por uma equivalência rotacional contínua e mensurável. Desenvolvem-se dois modelos matemáticos originais — o Rotovetorial-G, baseado na variação angular em função da altura (gravidade), e o Rotovetorial-T, centrado na progressão rotacional a partir da posição horizontal. Ambos utilizam campos vetoriais compostos (movimento retilíneo + acelerado) como substrato físico, e propõem que a parábola seja compreendida não apenas como curva algébrica, mas como o resultado de uma rotação regulada sobre um campo. Esse capítulo representa o núcleo formal da dissertação, propondo uma ontologia cinemática baseada na rotação e uma reinterpretação da matemática como arquiteta de trajetórias físicas.

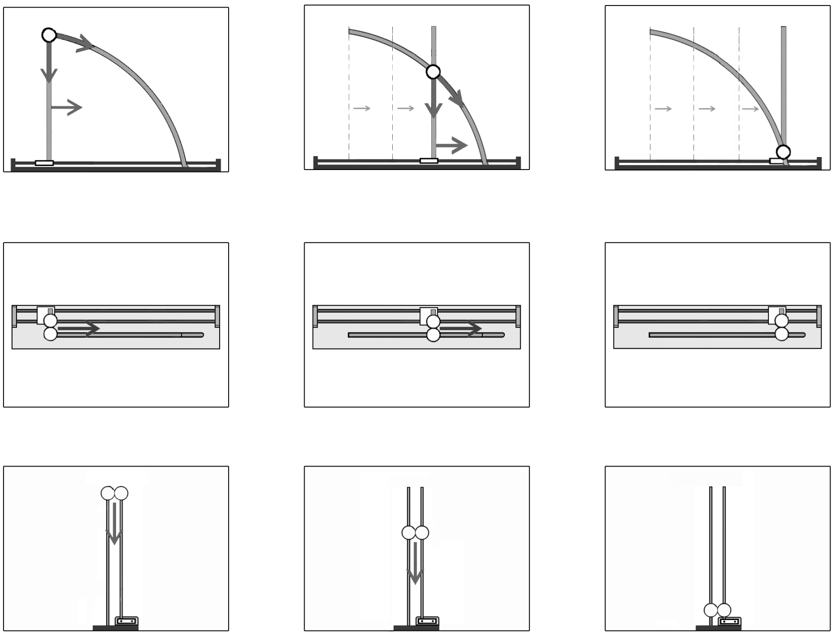
O Capítulo 6 explora as potências do Bi-Toro como artefato demonstrativo, instrumento pedagógico e operador epistemológico. Sua capacidade de representar o movimento composto sem decomposição, sua função heurística para o pensamento físico e filosófico, sua crítica à abstração das transformações simbólicas e sua formulação de uma rotação como operação física de equivalência são discutidas em profundidade. O capítulo propõe ainda uma nova fórmula de deformação angular baseada nos modelos anteriores e uma reflexão sobre a hierarquia entre referenciais e a memória do movimento. A rotação é reafirmada como linguagem fundamental da natureza, e o Bi-Toro como mediação concreta entre física e forma.

O Capítulo 7, final, apresenta a conclusão. Retoma os pontos principais do percurso, reflete sobre as implicações filosóficas e conceituais da proposta, discute sua contribuição para a epistemologia da ciência e aponta possíveis desdobramentos futuros. A cinemática clássica é reestruturada a partir da ideia de interseção rotacional entre referenciais, e o movimento é reconceituado como produto de campos vetoriais compostos e operações geométricas. O capítulo reafirma que a rotação não é apenas uma descrição possível — mas uma estrutura da verdade física.

A dissertação se complementa com cinco apêndices, que oferecem material detalhado ou perspectivas adicionais. O Apêndice A, *Investigações futuras: a ontologia expandida do Bi-*

Toro, explora o potencial teórico do modelo para além do escopo central, aplicando-o a outros campos da física. O Apêndice B, *Do sistema solar à galáxia: aplicação cósmica do Bi-Toro*, sugere uma analogia cosmológica do artefato, descrevendo o movimento dos planetas em dois referenciais distintos: o plano elíptico (heliocêntrico) e o plano galáctico. Os Apêndices C, D e E reúnem a documentação técnica, fotográfica e audiovisual do Bi-Toro, oferecendo um panorama completo de sua concepção, execução e demonstração.

2 Relatividade de Galileu e a pedra que cai do mastro



SAGREDO: *Quando seja verdade que o ímpeto com o qual se move o navio fica indelevelmente impresso na pedra, depois que ela se separa do mastro e se, além disso, for verdade que esse movimento não causa impedimento ou retardamento ao movimento retilíneo para baixo, natural para a pedra, é necessário que disso se siga um efeito maravilhoso na natureza [...] e, em suma, aumentando-se quanto se desejar a velocidade do navio, a pedra cadente descreverá suas transversais cada vez mais compridas, e ainda assim percorrerá todas nas mesmas duas batidas de pulso.*

GALILEI, 2011, p. 236.

2.1 Introdução

A queda de uma pedra solta do alto de um mastro em movimento parece, à primeira vista, um evento trivial. No entanto, como frequentemente ocorre na história da ciência, é na simplicidade de um experimento bem formulado que se revelam as maiores complexidades. A densidade conceitual dessa experiência se justifica pelo objeto que ela busca descrever e compreender: o movimento. Esta dissertação parte da constatação de que o movimento — em sua multiplicidade de formas, causas e efeitos — é não apenas o tema central do experimento proposto por Galileu, mas também o eixo fundamental da física clássica, da filosofia natural e da própria narrativa científica sobre o mundo. Compreender o movimento implica articular espaço, tempo, distância, velocidade, deslocamento, trajetória, aceleração positiva e negativa, geometria, mas também conceitos mais profundos e, ainda hoje, em aberto, como continuidade e descontinuidade, evento e acontecimento, ponto de vista e perspectiva. O movimento, nesse sentido, não é apenas um fenômeno físico: é uma chave epistemológica, uma estrutura de inteligibilidade e um operador de realidade.

Mais que isso, o movimento é, em sua essência, um fenômeno relacional: algo se move somente se houver outro ente em relação ao qual tal movimento possa ser percebido. Essa ideia, embora frequentemente associada à modernidade, já estava presente em Aristóteles, que escreve em sua *Física*: “Não haveria movimento se não houvesse algo distinto do que se move." (*Física*, Livro III, 201a10). Retomaremos essa citação no próximo item, onde analisaremos os fundamentos históricos e epistemológicos do movimento. Por ora, basta reconhecer que, mesmo em um experimento aparentemente simples, Galileu convoca uma herança longa e densa de pensamento filosófico e científico — e abre as portas para sua reformulação profunda.

Essa riqueza nos obriga a abrir um leque de análise vasto e multidisciplinar, que atravessa a história e a filosofia da ciência, a epistemologia, a física e a matemática, mas que também nos convoca a enfrentar a questão ontológica do movimento em sua profundidade: pois sem movimento não há tempo, e sem tempo não há acontecimento, nem sucessão, nem narrativa — e, portanto, nenhuma realidade experienciável. O movimento é aquilo que introduz a diferença, que inaugura a ordem e a desordem, que faz emergir o próprio campo da existência. Pensar o movimento, nesse sentido, é pensar as condições de possibilidade da realidade tal como ela se manifesta a nós. O experimento imaginado por Galileu revela-se assim um dispositivo privilegiado, não apenas para descrever fenômenos físicos com precisão, mas para explorar a constituição mesma da realidade — tal como percebida, pensada, descrita e quantificada.

Aristóteles buscou classificá-lo em função dos lugares naturais e das causas, enquanto Heráclito o tomou como essência de toda realidade sensível — "tudo flui", dizia ele. Essa tradição filosófica foi herdada e reinterpretada por pensadores medievais, como Jean Buridan e Nicole Oresme, que devem ser reconhecidos como precursores importantes, especialmente no desenvolvimento da noção de *ímpeto* e na representação gráfica do movimento. Com Galileu, porém, inaugura-se uma nova abordagem: quantitativa, matemática, sistemática. Ele não apenas observa e descreve fenômenos com precisão, mas formaliza e, em muitos casos, inventa os próprios conceitos físicos com os quais lidamos até hoje — como a aceleração, o movimento composto, a trajetória parabólica, a queda uniforme e a independência dos movimentos. Muitos desses conceitos, mais tarde, serão elevados à condição de leis. A partir de Galileu, a física se transforma, preparando o terreno para os grandes seguidores do século seguinte, como Newton e Leibniz, que consolidarão — cada um a seu modo — a mecânica clássica. No entanto, é precisamente nesse novo paradigma que surgem questões ainda mais profundas. A invenção do movimento relativo, tal como enunciada por Galileu, inaugura um espelhamento entre observador e fenômeno, entre sistemas de referência e realidade percebida. A verdade física deixa de ser absoluta e passa a depender do ponto de vista de quem observa. Assim, a realidade torna-se relacional, e a noção de verdade passa a emergir entre os sistemas, no espaço intermediário das transformações.

As transformações galileanas, posteriormente formalizadas por Lagrange, são eficazes do ponto de vista algébrico e instrumental, permitindo a transposição de coordenadas entre sistemas em movimento retilíneo uniforme. No entanto, essas transformações revelam-se conceitualmente insuficientes para dar conta da complexidade relacional que emerge quando diferentes trajetórias, observadas a partir de distintos referenciais, se entrecruzam em um mesmo fenômeno. Elas operam sobre posições e velocidades, mas deixam intocado o entrelaçamento profundo que constitui a experiência física do movimento.

Nos capítulos que seguem, investigaremos detalhadamente o experimento da pedra solta do mastro, percorrendo suas origens históricas, os fundamentos epistemológicos que o sustentam, os conceitos físicos e matemáticos envolvidos, e as diferentes interpretações que ele suscitou. Trata-se de compreender não apenas o que acontece quando a pedra cai, mas o que está em jogo, conceitualmente, quando observadores distintos descrevem esse mesmo evento de maneiras distintas — e, no entanto, coerentes. É nesse terreno que se instala o problema da relatividade galileana, e é a partir dele que nossa investigação se desenvolverá.

2.2 Fundamentos históricos e epistemológicos do movimento

A reflexão sobre o movimento atravessa toda a história do pensamento ocidental, desde suas origens na filosofia grega. Parmênides negava a possibilidade do movimento, pois toda mudança implicaria passar do ser ao não-ser — o que lhe parecia logicamente impossível. Zenão, seu discípulo, formulou célebres paradoxos que desafiavam a compreensão do deslocamento contínuo no espaço e no tempo. Heráclito, em contrapartida, afirmava que tudo flui, e que o movimento é a própria essência da realidade. Platão, por sua vez, introduziu a tensão entre o mundo sensível — instável, mutável — e o mundo das ideias — eterno, imutável —, estabelecendo as bases para uma ontologia dualista.

É com Aristóteles, no entanto, que o movimento se torna objeto de uma classificação sistemática e de um tratamento ontológico profundo. Em sua *Física*, ele distingue quatro tipos de mudança: geração e corrupção (*génesis kai phthorá*), alteração qualitativa (*alloiôsis*), crescimento e diminuição (*auxêsis kai phthisis*), e translação (*phorá*), esta última sendo aquela que corresponderá ao movimento no espaço, foco da física moderna. Aristóteles compreende intuitivamente a relatividade do movimento: “Não haveria movimento se não houvesse algo distinto do que se move” (*Física*, III, 201a10). E em outro trecho, prenunciando com clareza a ideia de referencial, escreve: “Suponha-se que um navio está se movendo calmamente, e que alguém a bordo nada perceba da sua movimentação. Se esse alguém visse outro navio fora do seu próprio, teria a impressão de que esse outro está em movimento, embora possa ser o seu próprio navio que se move.” (*Física*, IV, 212a15-20, paráfrase adaptada)

É por isso que não se pode tomar Aristóteles de modo simplista e ingênuo, como se ignorasse a relatividade do movimento. Ele a conhece, mas não a adota como modelo descritivo, optando por uma ordem natural em que cada ser tende ao seu lugar próprio no cosmos. Essa decisão se explica tanto por convicções filosóficas quanto por limites matemáticos e experimentais. Para Aristóteles, *kinêsis* é toda *metabolê* — toda passagem da potência ao ato, toda transformação. Nesse sentido, o movimento não é apenas deslocamento espacial, mas mudança ontológica. Com a revolução científica, no entanto, essa dimensão qualitativa do movimento será gradualmente eclipsada: o movimento passa a ser concebido quase exclusivamente como deslocamento no espaço, passível de ser descrito por coordenadas numéricas. O que antes era *transformação* torna-se *traço* — e a natureza torna-se, progressivamente, um gráfico.

Na transição para a Idade Média, autores como João Filopono, Jean Buridan e Nicole Oresme desempenham papel importante na reelaboração do pensamento sobre o movimento. Buridan desenvolve a teoria do *ímpeto*, antecipando a ideia de inércia, e Oresme ensaia representações gráficas que prefiguram os eixos cartesianos. Sua obra, como notou Pierre Duhem, revela uma sensibilidade precoce ao uso da matemática para modelar fenômenos físicos. Como salientam Alexandre Koyré e Ernst Mach, a física medieval esboça um primeiro passo em direção à abstração moderna, embora ainda subordinada ao paradigma escolástico. No caso de Oresme, suas tentativas de representar graficamente o movimento não devem ser vistas como aproximações da álgebra, mas sim como uma aproximação intuitiva e poderosa à geometria analítica, e até mesmo aos princípios do cálculo diferencial, que apenas séculos depois seriam desenvolvidos por Descartes, Newton e Leibniz.

A partir do Renascimento, o pensamento europeu inicia uma inflexão decisiva. A redescoberta crítica da Antiguidade, o avanço técnico e a crescente autonomia do saber humano criam as condições para uma nova abordagem do mundo natural. Nesse contexto emergem precursores imediatos de Galileu, como Nicolau Copérnico, com seu modelo heliocêntrico, e sobretudo Giordano Bruno, que propõe um universo infinito, em expansão, povoado por múltiplos mundos. Bruno formula com clareza o experimento do navio, antecipando a relatividade do observador. Seu pensamento dialoga diretamente com as inquietações que Galileu desenvolveria mais tarde, e sua obra — escrita sob a forma de diálogos filosófico-literários — apresenta fortes afinidades estilísticas com os *Diálogos* de Galileu. A influência é evidente, embora Galileu jamais tenha citado Bruno em seus escritos. Essa omissão pode ser compreendida à luz da censura e da repressão da época: Bruno fora executado pela Inquisição em 1600, acusado de heresia. Como observa Paolo Galluzzi, Galileu operava com extrema cautela para não sofrer a mesma sorte. A ausência de menção direta a Bruno talvez tenha sido menos uma escolha intelectual do que uma exigência de sobrevivência política.

Esse ambiente de repressão não afetou apenas Galileu. O próprio René Descartes, ao saber da condenação de Galileu em 1633, decidiu não publicar seu manuscrito *Le Monde, ou Traité de la lumière*, em que defendia, com base racional e matemática, um sistema heliocêntrico. O tratado, concluído e pronto para publicação, foi imediatamente retirado de circulação por precaução e só seria publicado postumamente, décadas mais tarde. O episódio ilustra o peso da censura e o risco real que rondava qualquer tentativa de romper com a cosmologia oficial imposta pela Igreja. A ciência nascente, nesse momento, avançava entre sombras.

Por fim, é importante lembrar que alguns relatos historiográficos — muitas vezes apoiados em uma leitura retrospectiva da física moderna — tendem a minimizar a originalidade de Galileu, diluindo-a entre os muitos precursores que o antecederam. Essa postura, embora útil para restaurar a continuidade do pensamento, perde de vista aquilo que Stillman Drake chamou de *salto qualitativo* operado por Galileu: a união inédita entre observação, experimentação e matematização. Galileu não apenas reconhece ideias dispersas

— ele as converte em sistema, em demonstração, em ciência. E é por isso que, mesmo vacilando em certas formulações iniciais, ele deve ser reconhecido como o verdadeiro precursor da revolução científica: não apenas pelas ideias que acolhe, mas pelo modo como as transforma em leis, conceitos e práticas.

2.3 O experimento da pedra solta do alto do mastro

Entre os muitos experimentos imaginados por Galileu Galilei, um dos mais ricos em implicações físicas, epistemológicas e conceituais é o da pedra solta do alto de um mastro, a bordo de um navio em movimento uniforme. Embora menos lembrado que o célebre experimento do cômodo fechado no porão da embarcação, esse exemplo específico permite uma abordagem mais direta da relatividade do movimento, indo além da inércia e tocando a noção de referencial — ainda que de forma embrionária. Enquanto o cômodo fechado descreve sobretudo a conservação do estado de repouso ou movimento dos corpos (o que mais tarde será formalizado como princípio da inércia), a queda da pedra revela a diferença de trajetória que emerge quando se altera o ponto de vista do observador.

O experimento, no entanto, não aparece de forma clara e centralizada nos textos de Galileu. Em vez de uma descrição linear, ele é apresentado de forma fragmentária, distribuído ao longo da Segunda Jornada do *Diálogo sobre os Dois Máximos Sistemas do Mundo*. O objetivo da obra é claro: demonstrar a plausibilidade física do modelo heliocêntrico, defendendo a rotação da Terra sobre seu próprio eixo e sua translação revolucionária ao redor do Sol. Para isso, Galileu constrói um discurso persuasivo e engenhoso, que contrapõe o sistema de Ptolomeu-Aristóteles ao de Copérnico, abrindo espaço para uma nova física. O estilo da obra é dialógico, por vezes prolixo, com repetições, digressões e formulações indiretas. A estratégia é deliberada: Galileu estrutura a discussão como um debate entre três personagens — Salviati, Simplicio e Sagredo — que lançam objeções, levantam condições e exploram argumentos e raciocínios, muitas vezes empregando recursos de demonstração que recorrem ao absurdo, característicos da lógica dialética aristotélica (*ex hypothesi ad impossibile*). Salviati representa o porta-voz das ideias modernas; Simplicio, o defensor da tradição aristotélica; Sagredo, o interlocutor imparcial. A verdade, então, não é afirmada dogmaticamente, mas construída dialeticamente no entrechoque das posições. Por isso, muitos experimentos — como o da pedra no mastro — aparecem entrelaçados a outros, como o da queda de corpos da torre, a rotação da Terra, a artilharia, as carruagens e os cavalos.

Para compreender o experimento da pedra solta do alto do mastro, é preciso visualizá-lo em dois momentos. Imaginemos o navio atracado no porto de Veneza, em repouso junto ao cais. Um homem sobe ao alto do mastro e, de lá, solta uma pedra. O observador situado no convés do navio vê a pedra cair verticalmente até tocar o chão, bem ao pé do mastro. O mesmo ocorre para o observador que se encontra no cais: a trajetória é reta e vertical, e todos concordam quanto ao movimento.

Agora, imaginemos que o navio zarpa suavemente, deslocando-se paralelamente ao cais com velocidade constante. O mesmo homem sobe novamente ao mastro e, mais uma vez, solta uma pedra. Para o observador que permanece no convés, nada muda: a pedra cai, como antes, exatamente ao pé do mastro, descrevendo uma trajetória reta e vertical. No entanto, para o observador que se mantém no cais, a trajetória da pedra é curva: ela descreve uma parábola, acompanhando o avanço horizontal do navio enquanto cai. E ainda assim — e isso é essencial —, também para esse segundo observador a pedra toca o solo exatamente ao pé do mastro. Galileu chega a chamar essa curva de linha transversal, curva, semiparábola ou simplesmente parábola. O fenômeno é único — a pedra solta do mastro —, mas sua descrição depende do referencial adotado. Está aí a chave da relatividade galileana: um mesmo movimento físico pode ser descrito por trajetórias diferentes, segundo o ponto de vista do observador.

Segundo Aristóteles, no entanto, se o navio estivesse em movimento, a pedra cairia atrás do mastro, pois não conservaria o movimento horizontal. Não há comprovação de que Aristóteles tenha pensado especificamente nesse experimento, mas formas análogas de raciocínio já circulavam entre os aristotélicos e os precursores. Giordano Bruno, por exemplo, descreve explicitamente o experimento do navio como uma defesa da rotação da Terra.

Curiosamente, o experimento do cômodo fechado a bordo do navio é aquele que se tornou mais célebre, talvez por estar descrito de forma mais clara e sistemática na mesma Segunda Jornada do *Diálogo*. Galileu o anuncia com ênfase e o descreve em apenas duas ou três páginas de modo objetivo e completo, o que facilita sua assimilação. Ainda que, indiretamente, esse experimento possa conduzir aos conceitos físicos implicados na relatividade do movimento, o que ele descreve diretamente é o princípio da inércia. Já o experimento da pedra, embora mais disperso e entremeado de digressões, permite uma abordagem direta de uma série de conceitos fundamentais: movimento composto, superposição de vetores, independência de forças, trajetória parabólica, relatividade do referencial, transformação de coordenadas e correspondência entre observações distintas.

No contexto do *Diálogo*, o experimento do navio e da pedra desempenha um papel central na elaboração de uma nova física do movimento. Trata-se de um fenômeno relativamente simples — uma pedra solta no ar —, mas que permite ilustrar com clareza a dependência do movimento em relação ao referencial. Para o observador no navio, a pedra cai em linha reta, no pé do mastro; para o observador no cais, sua trajetória é curva, descrita por uma parábola. A diferença entre essas observações não decorre de erro, mas de transformação: trata-se do mesmo fenômeno físico, descrito por sistemas distintos. Com isso, o experimento introduz, implicitamente, a ideia de movimento composto, de independência entre forças e de superposição de vetores — todos conceitos centrais da física moderna. E ao mesmo tempo, torna-se claro que a descrição do movimento exige um ponto de vista: a trajetória é sempre relacional.

Essa constatação leva a uma profunda reestruturação da mecânica. O movimento deixa de ser natural ou absoluto, e passa a ser descrito como relativo a um sistema de coordenadas. Como observa Alexandre Koyré, esse é o momento em que a física abandona a qualidade em favor da quantidade: o movimento, que para Aristóteles era uma transformação do ser, torna-se agora um deslocamento no espaço, definido por grandezas mensuráveis. O intrínseco cede lugar ao extrínseco; o substancial ao relacional. É esse o núcleo da revolução científica galileana.

Ainda que o experimento mental do navio parta de uma simplificação — ignorando resistência do ar, atrito e forças secundárias —, sua potência explicativa é enorme. Podemos imaginá-lo adaptado a balões, helicópteros, aviões, foguetes: qualquer corpo que se mova uniformemente em um meio isolado pode dar origem a experimentos análogos. A generalização, portanto, é não apenas possível, mas necessária. Galileu antecipa o método do pensamento experimental moderno: reduzir para compreender. A idealização não é um erro — é uma estratégia heurística. Como reforça Paolo Galluzzi, Galileu combina a força da abstração matemática com uma notável habilidade técnica: é ao mesmo tempo teórico e engenheiro, filósofo e artesão. Seus experimentos se dividem entre os realizados de fato — como os das esferas rolando por planos inclinados, cuidadosamente polidos em mármore — e os experimentos mentais, fruto de uma imaginação científica treinada, que opera com rigor e economia. Mesmo esses últimos, quando devidamente idealizados, podem ser validados por ensaios simples. Nós mesmos, por exemplo, repetimos o experimento com uma bola de frescobol solta de um cabo de vassoura em movimento retilíneo, e, observando em câmera lenta, verificamos que a trajetória era parabólica, e a bola caía exatamente ao pé do cabo: uma reprodução clara, simples e fiel da experiência galileana.

Galileu escreve o *Diálogo* em italiano, e não em latim, com o intuito explícito de alcançar um público mais amplo e influenciar não apenas os especialistas, mas os homens cultos de sua época. Publicada em 1632, a obra representa o ponto culminante de décadas de observações, formulações e disputas. Mas também marca o início de sua queda. Apesar de ter recebido, anos antes, autorização para discutir o sistema copernicano como hipótese matemática, Galileu ultrapassa os limites toleráveis à ortodoxia da Igreja. O *Diálogo* deixa de lado a neutralidade e busca claramente provar o heliocentrismo, ainda que por meio da voz dos personagens. A reação foi severa: em 1633, Galileu é condenado pela Inquisição, forçado a abjurar suas ideias, sentenciado à prisão domiciliar pelo resto da vida e proibido de publicar qualquer nova obra. Sua defesa das marés — embora fisicamente incorreta — aparece como tentativa ousada de oferecer uma evidência empírica da rotação e translação da Terra. O gesto é sintomático: mesmo onde erra, Galileu insiste na substituição de dogmas por hipóteses testáveis. A ciência, para ele, só se realiza quando se mede, se observa, se demonstra.

Por fim, é importante notar que o *Diálogo* precede a publicação de sua obra *Duas Novas Ciências*, de 1638, onde Galileu retoma o experimento do navio e o insere em uma estrutura conceitual mais madura. Nesse novo livro, ele desenvolve com mais profundidade os conceitos matemáticos e físicos implicados — em especial, a aceleração constante, a lei da queda dos corpos, a decomposição dos movimentos e a geometria da parábola —, oferecendo, enfim, a base sólida para o nascimento da mecânica clássica.

2.4 Conceitos de física e matemática envolvidos

Mas afinal, o que ocorre de maneira física e matemática durante o experimento da pedra que cai do alto do mastro? Quais leis, grandezas e relações estão envolvidas nesse fenômeno aparentemente simples? Para responder a essas questões, é necessário identificar e formalizar os principais conceitos da mecânica clássica que emergem da experiência galileana — muitos dos quais foram, senão descobertos, ao menos profundamente reformulados e matematizados por Galileu.

Apresentaremos a seguir, um a um, os conceitos envolvidos, com base em sua descrição experimental, sua formulação qualitativa por Galileu e sua posterior expressão matemática em Newton e na física clássica.

1. Queda livre dos corpos (aceleração constante)

Quando a pedra é solta do alto do mastro, ela realiza um movimento de queda livre vertical. Galileu foi o primeiro a afirmar a universalidade desse fenômeno: todos os corpos, independentemente de sua massa ou constituição, caem com a mesma aceleração, desde que em meio uniforme (como no vácuo idealizado). Embora sua linguagem fosse descritiva, Galileu já delineava a futura equação do movimento uniformemente acelerado.

Em *Duas Novas Ciências*, Galileu (na voz de Salviati) escreve: "[…] demonstra como a aceleração do movimento reto dos graves se faz segundo os números ímpares *ab unitate*, ou seja, que indicados quais e quantos tempos iguais forem necessários, se no primeiro tempo, partindo o móvel do repouso, tiver percorrido um tal espaço, como, por exemplo, uma cana, no segundo tempo percorrerá três canas, no terceiro cinco, no quarto sete, e assim sucessivamente segundo os números ímpares sucessivos; o que, em suma, é o mesmo que dizer que os espaços percorridos pelo móvel, partindo do repouso, têm entre si o quadrado daquela proporção que têm os tempos nos quais tais espaços são medidos, ou queremos dizer que os espaços percorridos estão entre si como os quadrados dos tempos." (GALILEI, 2011, p. 301)

Essa proposição corresponde, na notação moderna, à fórmula:

$$s = \frac{1}{2} g t^2$$

Onde s é a distância percorrida, g é a aceleração da gravidade, e t é o tempo decorrido.

Além disso, Galileu estabelece que essa queda independe do peso do corpo, contrariando frontalmente Aristóteles, para quem os corpos mais pesados caíam mais rapidamente. Essa ruptura aparece de maneira explícita no seguinte trecho do *Diálogo*, durante o debate entre os personagens:

Sagredo: "Tomando, porém, uma bola de um determinado peso, e a mesma para a qual queremos efetuar o cálculo do tempo da descida da Lua."

Salviati: "Isto não tem qualquer importância, porque bolas de uma, dez, cem e mil libras, todas medirão as mesmas cem braças no mesmo tempo."

Simplicio: "Oh! Nisso eu não acredito, muito menos o acreditaria Aristóteles, que escreve que as velocidades dos graves descendentes têm entre si a mesma proporção que seus pesos." (GALILEI, 2011, p. 301)

Esse novo entendimento da independência da aceleração em relação à massa viria a ser formalizado com precisão na segunda lei de Newton:

$$F = m \cdot a \Rightarrow a = \frac{F}{m}$$

Ou seja, se a força da gravidade é proporcional à massa, então todas as massas caem com a mesma aceleração. Esse novo entendimento da independência da aceleração em relação à massa viria a ser formalizado com precisão por Newton, ao mostrar que a força da gravidade é proporcional à massa. Assim, todas as massas caem com a mesma aceleração:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{G \cdot M \cdot m}{m \cdot r^2} = \frac{G \cdot M}{r^2}$$

Tal concepção ganhou fama com o suposto experimento da Torre de Pisa, atribuído a Galileu, no qual duas esferas de massas muito diferentes teriam sido soltas simultaneamente do alto da torre e atingido o solo ao mesmo tempo. Não há registros escritos de que Galileu tenha de fato realizado essa experiência, e ela talvez tenha sido apenas imaginada ou recontada por terceiros. No entanto, o episódio ilustra com força dramática a ruptura entre a física aristotélica e a nova física experimental e matemática que Galileu propunha.

A compreensão galileana da gravidade, ainda que anterior à formalização matemática da Lei da Gravitação Universal por Newton, revela uma notável intuição sobre a natureza mútua e universal da atração entre os corpos. Em um dos momentos mais filosóficos de *Duas Novas Ciências*, Galileu, pela voz de Salviati, afirma que "[…] as coisas graves são anteriores ao centro comum da gravidade, de modo que não é um centro, que outra coisa não é que um ponto indivisível, e por isso mesmo de nenhuma eficácia, aquilo que atrai para si as matérias pesadas, mas que essas matérias, conspirando naturalmente à união, formam um centro comum [...]" (GALILEI, 2011, p. 325). Ao rejeitar a ideia de um centro atrativo fixo e absoluto — uma concepção herdada do pensamento aristotélico e ptolemaico — Galileu propõe que são os próprios corpos graves que, por sua natureza, "conspiram" para se unir, formando um centro comum de gravidade. Essa interpretação não apenas antecipa o conceito de interação mútua entre massas, como sugere que o fenômeno gravitacional não depende de uma força externa ou de um ponto privilegiado, mas emerge da relação entre os corpos. Em termos modernos, é possível ver nessa visão uma prefiguração do princípio da atração gravitacional universal, no qual toda massa atrai toda outra massa com uma força diretamente proporcional ao produto das massas e inversamente proporcional ao quadrado da distância. Embora Galileu não tenha formulado essa lei em termos quantitativos, sua concepção qualitativa aponta para uma gravidade relacional, dinâmica e distribuída, onde o movimento das partes se determina pela composição do todo.

2. Inércia e conservação do movimento

A pedra, ao ser solta, mantém o movimento horizontal do navio. Este é o fenômeno da inércia, que já havia sido intuído por precursores medievais (como Buridan), mas foi claramente ilustrado por Galileu em seus experimentos mentais. Para ele, um corpo em movimento continuará em movimento, na ausência de forças externas. No *Diálogo*, Galileu descreve esse princípio com notável clareza e antecipação, utilizando o próprio navio como exemplo:

Salviati: “Portanto, um navio que navegue na calmaria do mar é um daqueles móveis que transita sobre uma daquelas superfícies que não são nem declives nem aclives; e, por isso, está em condição, quando lhe fossem removidos todos os obstáculos acidentais e externos, de mover-se contínua e uniformemente com o impulso que lhe foi dado.”

Simplício: “Parece que deve ser assim.”

Salviati: “E aquela pedra que está no topo do mastro não se move, levada pelo navio, também ela pela circunferência de um círculo em torno do centro e, por consequência, com um movimento indelével nela, removidos os impedimentos externos? E esse movimento não é tão veloz quanto aquele do navio?” (GALILEI, 2011, p. 229–230)

Com isso, Galileu propõe que a pedra — assim como qualquer outro corpo — possui um movimento inercial próprio, herdado do sistema em que se encontra (neste caso, o navio). Ao cair, ela não perde esse movimento horizontal, e portanto cai ao pé do mastro, mesmo que o navio esteja em deslocamento. Essa concepção será posteriormente sistematizada por Newton como a Primeira Lei da Mecânica, no *Principia Mathematica* (1687):

“Todo corpo persevera em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em linha reta, a menos que seja compelido a mudar esse estado por forças impressas sobre ele.”

Matematicamente, a inércia se traduz pela constância da velocidade:

$$v = \text{constante} \Rightarrow a = 0 \Rightarrow F = 0$$

Trata-se, portanto, de uma transição radical entre duas concepções de movimento: a aristotélica, na qual todo corpo tende ao repouso e só se move enquanto for forçado; e a galileana, onde o repouso e o movimento retilíneo uniforme são estados equivalentes, distinguíveis apenas por convenção do observador.

3. Composição de movimentos (movimento composto)

O movimento da pedra no referencial do cais é o resultado da superposição entre o movimento horizontal uniforme (herdado do navio) e o movimento vertical uniformemente acelerado (pela gravidade). Galileu compreendeu esse efeito, mesmo sem dispor ainda da linguagem vetorial moderna.

O resultado é uma trajetória parabólica, que Galileu associa às chamadas curvas "transversais" ou "mistas". Em *Duas Novas Ciências*, ele demonstra que a composição dos dois movimentos resulta geometricamente numa parábola.

Esse conceito da composição simultânea de dois movimentos é também tratado no *Diálogo*, quando Salviati sugere que, se se conhecessem com precisão os movimentos que se combinam — no caso, o da queda dos corpos e o da rotação da Terra —, seria possível determinar com exatidão a trajetória real do corpo:

Salviati: "Pensei algumas vezes sobre isso: e não tenho qualquer dúvida de que se outros tivessem certeza acerca da natureza do movimento com o qual o grave desce conduzindo-se ao centro do globo terrestre, misturando-o depois com o movimento circular comum da rotação diurna, encontrar-se-ia precisamente que espécie de linha é aquela que é descrita pelo centro de gravidade do móvel na composição desses dois movimentos." (GALILEI, 2011, p. 238 e p. 244)

Essa reflexão revela que Galileu reconhecia a complexidade das trajetórias compostas — e que, embora não tivesse à disposição os instrumentos matemáticos modernos (como o cálculo vetorial), intuía com clareza a estrutura do fenômeno.

Com o advento do cálculo, Newton e Leibniz conseguiram descrever a equação dessa curva com precisão:

$$y = \frac{2v^2}{g} \cdot x^2$$

ou, na forma mais geral:

$$r(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

A curva parabólica é, assim, a assinatura matemática do movimento composto — um conceito que inaugura a compreensão moderna das trajetórias e fundamenta a aplicação das leis da física aos sistemas em movimento.

4. Independência entre forças e direções

Um dos avanços conceituais mais significativos em Galileu foi a noção de que movimentos em direções perpendiculares podem ocorrer simultaneamente e de forma independente. O movimento horizontal da pedra não interfere em sua aceleração vertical.

Essa separação de componentes será mais tarde formalizada pela decomposição vetorial das forças. O princípio é essencial para toda a mecânica clássica e, posteriormente, para a física moderna.

No *Diálogo*, Galileu já formula essa ideia ao distinguir claramente as duas causas motrizes — a gravidade, que atrai o corpo para o centro da Terra, e a "virtude impressa", que o conduz na direção horizontal. As forças são distintas e atuam simultaneamente, sem se anular. Esse reconhecimento da complexidade e da simultaneidade das trajetórias é complementado por outro momento do *Diálogo*, em que Galileu, pela voz de Salviati, deixa explícita a independência das duas forças atuantes sobre o corpo em queda: a gravidade, que o atrai para o centro da Terra, e a "virtude impressa" (isto é, o movimento horizontal herdado do navio), que o desloca lateralmente:

Salviati: "[…] e posto que a causa motriz não é uma só, que se possa, através da nova operação, enfraquecer, mas são duas distintas entre si, das quais a gravidade serve somente para puxar o móvel para o centro e a virtude impressa para levá-lo em torno do centro, não fica ocasião alguma de impedimento." (GALILEI, 2011, p. 229 e p. 231)

Essa formulação já antecipa, qualitativamente, o princípio moderno da composição ortogonal de vetores: cada força contribui para o movimento de forma independente, e a trajetória resultante é a soma dessas influências. Trata-se de um passo decisivo rumo à matematização rigorosa da física.

5. Referenciais inerciais e observadores distintos

O experimento mostra que dois observadores — um no navio, outro no cais — descrevem trajetórias distintas para o mesmo fenômeno físico. Para o observador no navio, a pedra cai verticalmente, no pé do mastro; para o observador no cais, a pedra descreve uma curva parabólica. Essa diferença não indica erro, mas revela uma condição estrutural do conhecimento: o movimento depende do referencial adotado.

Embora Galileu trate os dois referenciais de forma separada, ele os considera indiretamente equivalentes, pois as leis da natureza se mantêm invariantes em ambos. A universalidade da queda livre dos corpos garante que a pedra cairá no mesmo instante, independentemente de estar em repouso no cais ou em movimento uniforme com o navio. O que muda é apenas a descrição da trajetória em relação ao sistema de coordenadas adotado.

Essa distinção inaugura a noção de sistemas de referência inerciais: estruturas conceituais nas quais os fenômenos físicos seguem as mesmas leis, mesmo que descritos sob diferentes pontos de vista. Galileu ainda não define formalmente essa equivalência, mas planta as sementes do conceito, ao mostrar que a relatividade do movimento não compromete a objetividade dos fenômenos. Pelo contrário, ela revela que a natureza obedece a princípios invariantes, mesmo quando descrita por trajetórias distintas. A partir dessa constatação, começa a emergir o princípio da relatividade galileana.

6. Geometrização do movimento – das cônicas à física

Uma das particularidades mais marcantes do trabalho de Galileu é sua intimidade com a cinemática e com a linguagem geométrica. Em sua busca por descrever corretamente a trajetória da pedra em queda sobre um navio em movimento, nota-se uma progressão conceitual: inicialmente ele fala em movimento transversal, depois em movimento curvo sem parábola, até finalmente nomear e identificar a parábola como a figura precisa que descreve esse fenômeno. Essa formalização é alcançada plenamente em sua obra *Duas Novas Ciências*, onde Galileu não apenas define a parábola como trajetória composta, mas associa explicitamente essa curva às chamadas cônicas estudadas por Apolônio.

As cônicas de Apolônio — parábolas, elipses e hipérboles — foram concebidas na Grécia antiga como objetos puramente geométricos, derivados da interseção de um plano com um cone duplo. Durante séculos, essas curvas permaneceram como figuras abstratas da geometria, sem aplicação direta à descrição da natureza. Galileu foi um dos primeiros a converter essas figuras em instrumentos físicos: a parábola, antes apenas uma forma ideal, passa a ser uma trajetória mensurável, resultante da combinação de dois movimentos independentes.

Em *Duas Novas Ciências*, Galileu chega a citar o próprio livro de Apolônio, mostrando que não apenas conhecia os fundamentos da geometria clássica, mas que soube reinterpretá-los em um novo contexto físico: "*These theorems are, indeed, given by Apollonius, but after many preceding ones, to follow which would take a long while. I wish to shorten our task by deriving the first property purely and simply from the mode of generation of the parabola and proving the second immediately from the first*". GALILEI, Galileo. **Dialogues Concerning Two New Sciences**, p. 246. Ao aplicar as cônicas à queda dos corpos, Galileu abre caminho para uma geometria aplicada, uma verdadeira proto-geometria analítica, na qual formas e movimentos se correspondem.

O mesmo processo será levado adiante por Kepler, que utiliza a elipse — outra seção cônica — para descrever com precisão as órbitas dos planetas. Com isso, torna-se claro que a geometria deixa de ser apenas uma arte da medida e da forma para se converter numa ferramenta essencial da física moderna. A união entre forma e movimento, entre figura e fenômeno, inaugura uma nova concepção científica do mundo, onde a regularidade da natureza se expressa por meio da pureza das curvas matemáticas.

7. O método científico por idealização

Todos os conceitos discutidos neste capítulo — queda dos corpos, inércia, composição de movimentos, independência entre direções, sistemas de referência e geometrização do movimento — só se tornam claros graças à prática da idealização científica. Galileu isola os princípios essenciais do fenômeno eliminando, no plano teórico, as perturbações acidentais da experiência concreta: vento, atrito, imperfeições do solo, variações de densidade ou de forma. Longe de ser um erro, essa escolha constitui um método rigoroso e deliberado, que fundamenta a ciência moderna do movimento.

No *Diálogo*, Galileu, pela voz de Salviati, afirma: "[…] quando o filósofo geômetra quer reconhecer em concreto os efeitos demonstrados em abstrato, é necessário que desconte os impedimentos da matéria; pois, se souber fazer isso, asseguro-vos que as coisas se corresponderão de modo não menos ajustado que os cálculos aritméticos. Os erros, portanto, não residem nem no abstrato nem no concreto, nem na geometria ou na física, mas no calculador que não sabe fazer bem as contas." *(GALILEI, 2011, p. 287)*

A idealização torna-se, assim, a ponte entre o pensamento e a experiência, entre o modelo teórico e a realidade observável. Mas o método galileano não se resume à abstração: ele integra também a observação concreta e a experimentação controlada. Galileu realizava experimentos reais — como o uso de planos inclinados de mármore para observar o tempo de queda de esferas — e os articulava com experimentos mentais rigorosamente deduzidos. O experimento do navio, por exemplo, pode ser pensado, descrito e, em certa medida, reproduzido com instrumentos simples, como uma vassoura vertical em movimento com uma esfera solta no topo — e filmado com precisão.

Essa combinação de observação, abstração e realização experimental constitui a base de um método empirista que supera tanto a mera indução por repetição quanto a especulação sem controle. A partir da construção de modelos idealizados e sua posterior validação por meio de observações e testes, Galileu lança as bases de uma ciência racional, experimental e dedutiva.

Essa postura antecipa, em muitos aspectos, o que Karl Popper no século XX chamaria de falseabilidade como critério de cientificidade. Para Popper, nenhuma teoria pode ser considerada científica se não puder, em princípio, ser refutada por um contraexemplo. O próprio Galileu expressa, com clareza notável, essa visão em uma passagem do *Diálogo*: "[…] E, posto que entendo muito bem que uma só experiência ou demonstração concludente que se tivesse em contrário é suficiente para jogar por terra estes e outros cem mil argumentos prováveis […]" *(GALILEI, 2011, p. 204)*

Essa citação, ao antecipar o espírito do teste crítico, mostra que Galileu não buscava apenas confirmar suas hipóteses, mas submetê-las a provas rigorosas — e estava disposto a abandoná-las diante de um experimento decisivo em contrário. Com isso, seu método se afasta tanto da autoridade dogmática quanto da indução pura defendida por alguns círculos da filosofia empírica, como o chamado Círculo de Viena.

A prática científica galileana, portanto, não apenas funda uma física matemática, mas estabelece os fundamentos da epistemologia moderna, ao articular idealização racional, experimentação concreta e disposição à refutação — em busca de uma verdade que emerge da tensão constante entre o modelo e a realidade.

2.5 – Aplicação prática dos conceitos físicos e matemáticos

Para demonstrar com precisão a articulação entre os conceitos físicos e matemáticos analisados até aqui, propomos uma simulação prática do experimento galileano da pedra solta do alto do mastro de um navio. Trata-se de um exemplo concreto que permite aplicar as equações da cinemática e visualizar a composição de movimentos em dois referenciais distintos.

Suponhamos que um navio se desloca com velocidade constante de 25 km/h (ou 6,94 m/s) ao longo de um cais, e que, em determinado instante, uma pedra é solta do topo de um mastro com 10 metros de altura. O objetivo é determinar:

1. O tempo de queda da pedra;
2. O deslocamento horizontal do navio durante esse tempo;
3. A equação da trajetória da pedra, tal como observada do cais — ou seja, a forma da parábola.

<u>1. Tempo de queda da pedra</u>

A equação da queda livre é dada por:

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Substituindo os valores:

$$t = \sqrt{\frac{2 \cdot 10}{9{,}8}} \approx \sqrt{2{,}04} \approx 1{,}43 \text{ segundos}$$

Esse tempo é o mesmo para ambos os observadores, seja no navio, seja no cais, pois a gravidade atua igualmente em todos os referenciais inerciais. E mais: o local onde a pedra atinge o solo — o pé do mastro — também será o mesmo nos dois referenciais. A única diferença entre as observações estará na trajetória descrita pela pedra: vertical para o observador no navio, parabólica para o observador no cais.

2. Deslocamento horizontal do navio

Durante o tempo de queda, o navio continua seu movimento com velocidade constante. O deslocamento horizontal do navio — que será também o deslocamento da pedra no referencial do cais — é dado por:

$$x = v \cdot t = 6{,}94 \cdot 1{,}43 \approx 9{,}92 \text{ metros}$$

Ou seja, para o observador no cais, a pedra atinge o solo 9,92 metros à frente do ponto de soltura.

3. Equação da trajetória (forma da parábola)

O movimento da pedra é composto por dois vetores independentes: um vertical (aceleração gravitacional) e outro horizontal (velocidade do navio). Essa composição gera, no referencial do cais, uma curva parabólica. A equação da trajetória, eliminando o tempo *t* entre as funções resulta em:

$$x(t) = v \cdot t \quad \text{e} \quad y(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 :$$

$$y = 10 - 4{,}9 \left(\frac{x}{6{,}94} \right)^2$$

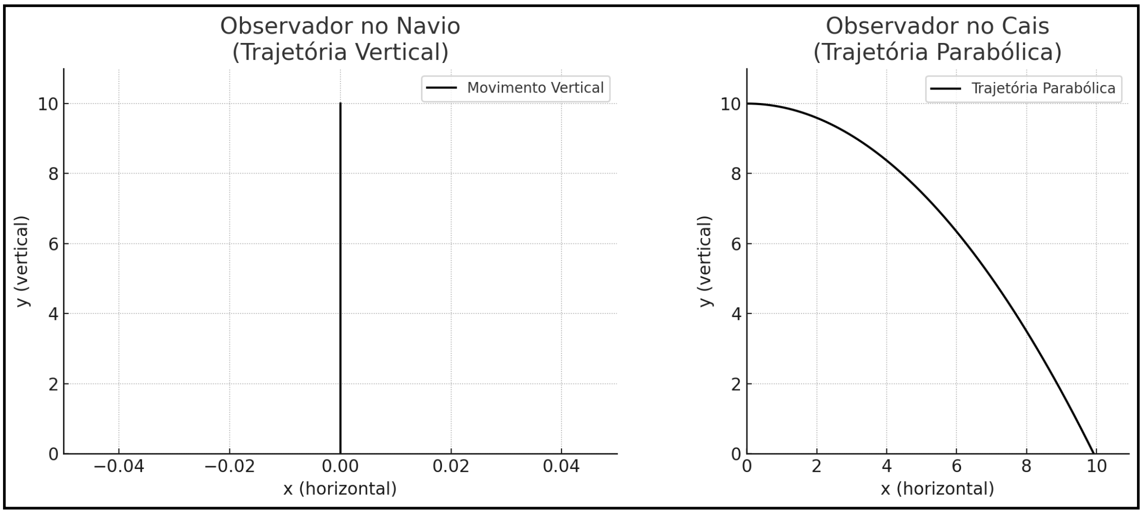
Resolvendo a expressão:

$$y = 10 - 0{,}1017\, x^2$$

Essa é a forma explícita da parábola, com concavidade voltada para baixo. Seu vértice está no ponto $(x = 0,\ y = 10)$ — ou seja, o ponto de soltura — e sua base se estende até aproximadamente $x \approx 9{,}92$, quando $y = 0$. Trata-se de uma função quadrática negativa, que representa geometricamente a soma vetorial dos dois movimentos.

É importante ressaltar que essa equação da parábola vale apenas para o observador no cais. Para quem está no navio, a trajetória permanece uma linha vertical: não há deslocamento horizontal relativo entre a pedra e o mastro.

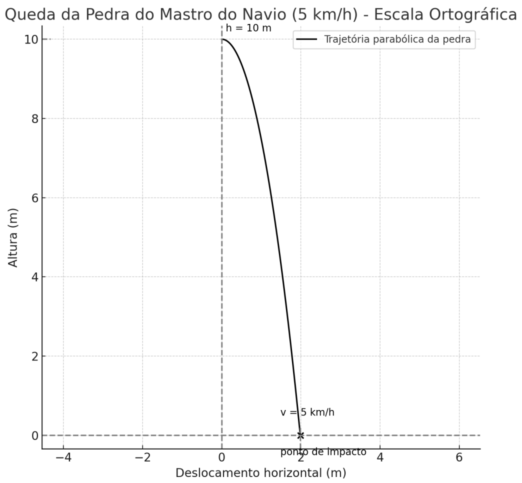
Este exemplo simples, mas robusto, permite compreender em termos quantitativos a composição do movimento, a relatividade da trajetória e a equivalência dos referenciais inerciais. Além disso, oferece base empírica para visualizações gráficas e comparações entre as descrições newtoniana e galileana do fenômeno. Ao mesmo tempo, confirma a eficácia da idealização como método científico: desprezando resistências e perturbações externas, isolamos os elementos essenciais e alcançamos uma descrição formal rigorosa do movimento composto.

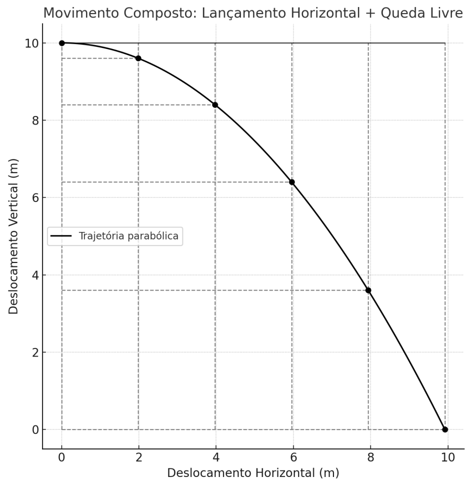


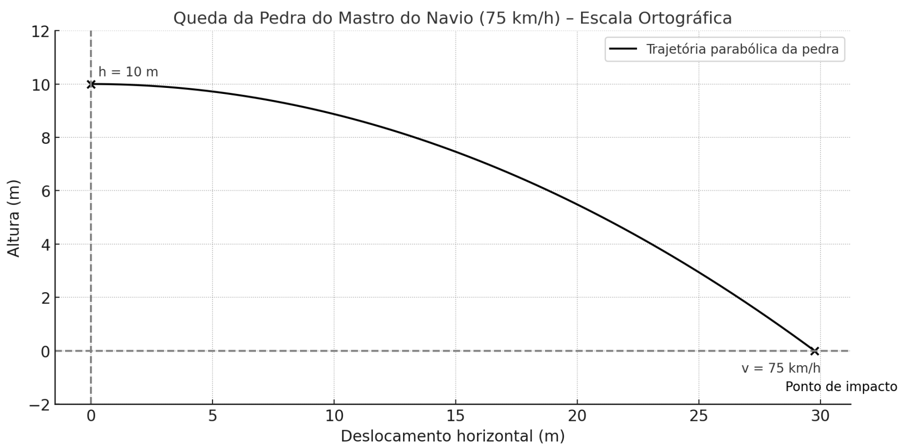
Para concluir este subitem, consideramos três gráficos que ilustram a aplicação dos conceitos físicos e matemáticos discutidos até aqui, variando apenas a velocidade horizontal do navio, enquanto a altura da queda permanece constante em 10 metros. No primeiro gráfico, o navio desloca-se a 5 km/h. A trajetória parabólica observada do cais é bastante curta, próxima da vertical. A pedra praticamente cai em linha reta, e sua trajetória tem curvatura acentuada. Já no segundo gráfico, com o navio a 25 km/h, temos uma parábola quase simétrica: o deslocamento horizontal é praticamente igual à altura do mastro. É a curva mais harmoniosa, que dá origem à equação padrão da parábola do movimento composto. No terceiro gráfico, com o navio deslocando-se a 75 km/h, a curva da parábola alonga-se nitidamente. O deslocamento horizontal atinge cerca de 30 metros, e a parábola se achata, aproximando-se cada vez mais de uma trajetória retilínea horizontal.

E, no entanto, o tempo de queda permanece exatamente o mesmo para todos os três casos. A pedra cai no mesmo intervalo de tempo e atinge sempre o mesmo ponto em relação ao navio — o pé do mastro. Essa constância nos leva, como Galileu, ao maravilhamento diante da regularidade dos fenômenos naturais.

Refletimos, assim, sobre o caráter profundo do movimento composto. Em vez de decompor este movimento em inércia horizontal e gravidade vertical — como faz a física analítica moderna —, procuramos observar o fenômeno em sua inteireza. Afinal, se a pedra percorre uma trajetória parabólica mais alongada, para que o tempo de queda se mantenha igual, sua velocidade média ao longo da curva deve ser maior. O mesmo vale para a aceleração tangencial: ela muda conforme a curvatura da parábola.



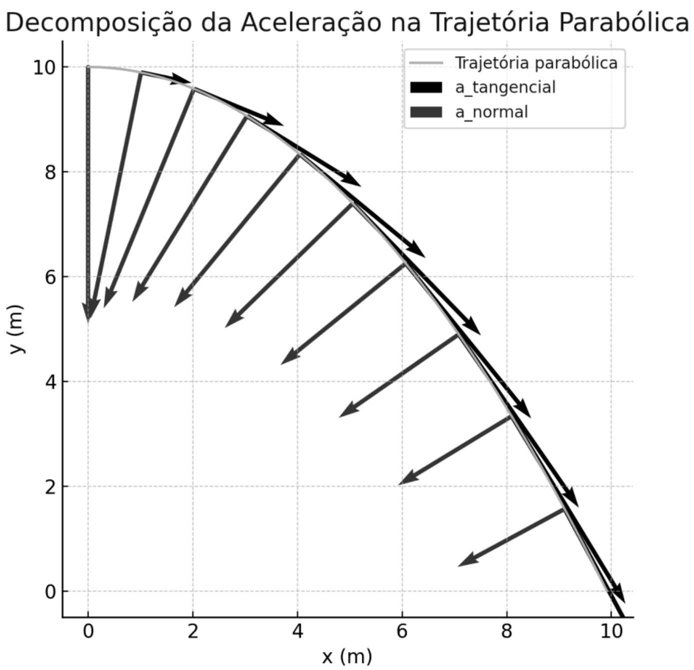




Esses aspectos são ilustrados no gráfico ortográfico vetorial a seguir, onde representamos a aceleração tangencial, a velocidade e a força normal ao longo da trajetória parabólica. Notamos que:

- Os vetores da força normal são maiores no início do movimento, onde a curvatura da parábola é maior, e diminuem conforme a curva se aproxima do chão do navio.
- Em sentido inverso, os vetores de velocidade e aceleração tangencial aumentam progressivamente, acompanhando o ganho de velocidade do corpo em queda.
- A soma vetorial desses dois componentes — a tangencial e a normal — resulta sempre numa força constante, que corresponde à aceleração da gravidade, ou seja, $g = 9{,}81\ m/s^2$.

Essa constância da resultante é a assinatura da regularidade física. É uma das expressões da beleza da natureza, como a compreendia Galileu: a harmonia entre forma e força, entre curva e causa. Esse tipo de análise será retomado em maior profundidade quando tratarmos do artefato físico criado para representar essas transformações: o Bi-Toro, que permite visualizar a transição entre referenciais e os efeitos da composição vetorial de movimentos.



2.6 O observador, o fenômeno e o movimento relativo

O experimento da pedra que cai do alto do mastro do navio, descrito no *Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo*, revela uma descoberta fundamental: um mesmo fenômeno físico pode gerar múltiplas trajetórias, dependendo do ponto de vista do observador. Para quem está no navio, a pedra cai em linha reta; para quem está no cais, descreve uma parábola. Não se trata de erro, ilusão ou engano, mas de um princípio estrutural do movimento: a trajetória depende do referencial. Essa constatação inaugura um novo modo de pensar o real — não mais como algo absoluto e imóvel, mas como um entrelaçamento de relações, que exige sempre a consideração do observador.

Galileu expande essa intuição para outros contextos. Um exemplo especialmente esclarecedor é o de duas flechas disparadas ao mesmo tempo por arqueiros posicionados numa carruagem em movimento: uma flecha é lançada para frente, e a outra para trás, enquanto a carruagem avança com velocidade constante. Para um observador que se encontra na própria carruagem — isto é, dentro de seu sistema de referência —, ambas as flechas percorrem trajetórias simétricas, com velocidades iguais e opostas. Já para um observador fixo no solo, referenciado pela Terra, a flecha lançada para frente parece mais veloz (pois sua velocidade se soma à da carruagem), enquanto a flecha que vai para trás parece mais lenta (pois sua velocidade é diminuída pela da carruagem). No entanto, quando ambas atingem o solo, a carruagem estará exatamente no ponto médio entre os dois locais de impacto. Trata-se de uma confirmação direta da relatividade galileana: o movimento observado é sempre composto, e suas descrições variam conforme o sistema em que se insere o observador. Uma intuição aristotélica talvez esperasse que a carruagem se aproximasse da flecha dianteira durante o voo — mas a física moderna mostra que o fenômeno deve ser descrito por sistemas de referência distintos, nos quais as leis permanecem invariantes.

O mesmo raciocínio vale para um artilheiro que dispara em movimento sobre um inimigo estacionário, ou para a observação da rotação da Terra em relação aos astros fixos. Galileu avança assim para uma generalização fundamental: as leis da física são válidas em todos os referenciais inerciais, e o movimento é relativo à posição e ao estado de quem observa.

Essa constatação impõe uma mudança de perspectiva não apenas na física, mas também na filosofia da natureza: a realidade não é mais concebida como um bloco absoluto e imóvel, mas como uma rede de relações, cuja inteligibilidade depende da posição e do movimento do observador. A verdade física passa a emergir entre os sistemas, no espaço intermediário das transformações. No entanto, Galileu não chega a formalizar plenamente essa equivalência entre referenciais. Ele os descreve separadamente, com leis próprias e consistentes, mas ainda não formula uma operação matemática que transforme um sistema no outro. Somente cerca de um século e meio mais tarde, com a formulação das transformações galileanas — assim nomeadas retrospectivamente — e sua sistematização algébrica por Joseph-Louis Lagrange, é que essa equivalência será formalizada por meio de translações de coordenadas entre sistemas inerciais. A partir daí, consolida-se a ideia de que as leis da física permanecem invariantes em qualquer referencial inercial, tornando a relatividade galileana uma base sólida para a física clássica.

Essa limitação não diminui a importância do avanço galileano. Ao contrário, sua escolha de separar os sistemas de referência e analisá-los isoladamente permitiu uma descrição precisa dos fenômenos. Sua ênfase está na cinemática, não ainda na dinâmica; no movimento, mais do que nas forças. E justamente por isso, Galileu foi capaz de matematizar com clareza o comportamento dos corpos — antes de discutir suas causas.

Quando comparamos essa abordagem à de Newton, percebemos uma mudança de paradigma. A física newtoniana se estrutura em torno da ideia de força, leis universais, pontos abstratos e um espaço vazio onde tudo se move. O cálculo permite generalizações poderosas, mas também afasta a física da experiência concreta. Galileu, por outro lado, ancora sua física no contato direto com os fenômenos: pedra, barco, mastro, corpo em queda. Seu método é o da observação combinada à idealização racional. Essa maneira de trabalhar — que parte de experimentos reais ou imaginados, passa por uma idealização matemática, e retorna à verificação empírica — acaba despertando e desencadeando a própria noção de relatividade em função dos observadores. Galileu, ao exercitar constantemente esse deslocamento de pontos de vista, antecipa a importância fundamental do referencial na descrição do mundo físico — uma intuição que nasce do fazer cotidiano e da experiência vivida, antes de se tornar conceito sistematizado.

No plano filosófico e epistemológico, essa transição marca a substituição de uma ontologia da substância por uma ontologia relacional. O mundo deixa de ser feito de essências estáticas e passa a ser compreendido como uma rede de relações. A física abandona o divino e o natural como fundamentos últimos, e passa a descrever regularidades empíricas a partir do ponto de vista do observador. Trata-se de uma revolução do olhar.

Se cada observador descreve o mundo a partir de um referencial distinto, somos levados a uma consequência tão inquietante quanto inevitável: a multiplicidade de pontos de vista pode gerar uma multiplicidade de realidades. E se houver uma infinidade de observadores — como parece plausível, dado o caráter distribuído da experiência — então haverá também uma infinidade de realidades possíveis, cada uma consistente dentro de seu próprio sistema, mas potencialmente incompatível com as demais. Como, então, manter uma noção de verdade física que possa atravessar esses referenciais diversos? A física passa a enfrentar não apenas um problema de cálculo, mas uma crise de fundamento: a realidade, que antes era única e objetiva, revela-se dependente da posição e do movimento de quem a contempla.

Quando comparamos essa abordagem à de Newton, percebemos uma mudança de paradigma. A física newtoniana se estrutura em torno da ideia de força, leis universais, pontos abstratos e um espaço vazio onde tudo se move. O cálculo permite generalizações poderosas, mas também afasta a física da experiência concreta. Galileu, por outro lado, ancora sua física no contato direto com os fenômenos: pedra, barco, mastro, corpo em queda. Seu método é o da observação combinada à idealização racional. Essa maneira de trabalhar — que parte de experimentos reais ou imaginados, passa por uma idealização matemática, e retorna à verificação empírica — acaba despertando e desencadeando a própria noção de relatividade em função dos observadores. Galileu, ao exercitar constantemente esse deslocamento de pontos de vista, antecipa a importância fundamental do referencial na descrição do mundo físico — uma intuição que nasce do fazer cotidiano e da experiência vivida, antes de se tornar conceito sistematizado.

Galileu, ao introduzir essas ideias, não relativiza a verdade, mas a complexifica. A verdade física depende do ponto de vista — e é preciso um sistema lógico e matemático para articular os múltiplos olhares. Por isso, mesmo sem propor transformações entre referenciais, ele planta a semente para que outros o façam. Sua tentativa de provar a rotação da Terra e o heliocentrismo por meio de experimentos físicos busca estabelecer uma nova forma de movimento natural — aquele que não se percebe diretamente, mas que pode ser inferido pelas suas consequências. Ainda não há relatividade no sentido moderno, mas já há uma física da observação. E isso muda tudo.

Um parêntese ontológico e ilustrativo se impõe: a relatividade do movimento pode ser pensada não apenas como uma relação entre observador e fenômeno, mas também entre o fenômeno e o meio em que ele ocorre. Essa dimensão é muitas vezes negligenciada nas formulações clássicas, mas retorna com força na física contemporânea, sobretudo nos trabalhos de Mário Novello, que propõe repensar a estrutura do espaço-tempo como emergente das interações entre campos e meios físicos, não como um palco neutro onde os fenômenos se desenrolam. A relação entre meio e fenômeno torna-se, assim, tão fundamental quanto a entre observador e objeto.

Retornando ao mundo clássico e ao experimento do navio, propomos agora uma variação conceitual: a pedra é solta do alto do mastro, e consideramos o ponto de vista do observador no navio. Para ele, a pedra cai verticalmente, em linha reta até o pé do mastro, pois compartilha o mesmo movimento horizontal do navio. Contudo, imaginemos que, ao longo da queda, a pedra interaja ponto a ponto com o ar — um meio que, na ausência de ventos ou turbulências, acompanha o referencial da Terra. Suponhamos que cada uma dessas interações com as moléculas de ar provoque uma breve incandescência, tingindo de vermelho a região do impacto. O observador no navio, que vê a pedra cair verticalmente, poderá então virar-se e, olhando para trás, verá desenhada no céu uma parábola vermelha — o rastro do movimento da pedra no referencial da Terra.

Esse rastro luminoso, produto da interação com o meio, é ao mesmo tempo memória e revelação: memória porque registra o passado do movimento, revelação porque permite ao observador acessar uma trajetória que, em seu próprio referencial, é invisível. A parábola vermelha é, nesse sentido, a inscrição do movimento no meio — uma “escrita” deixada pelo corpo no mundo. Assim como a fumaça que se eleva de uma vela já apagada revela onde ela esteve, o meio registra o acontecimento e dá a ele permanência. A física do presente se combina com a memória do passado, e o movimento torna-se uma relação não apenas com o espaço, mas com o tempo e com o meio.

Este exemplo serve como reflexão complementar, para além dos limites desta dissertação, sobre o modo como os fenômenos físicos são sempre codeterminados por seu meio. A relatividade do movimento, nesse contexto ampliado, não se limita à relação entre um observador e um fenômeno: ela pode — e talvez deva — ser pensada como uma triangulação entre observador, fenômeno e meio. É o meio que permite que o fenômeno se inscreva no mundo, e é também ele que condiciona o modo como o observador o percebe. O ar, o espaço, o vácuo, o campo quântico, o éter hipotético — ao longo da história da ciência, o "meio" assumiu diferentes nomes e formas, mas permaneceu como instância essencial na constituição dos fenômenos. Ainda que a presente investigação se concentre na relatividade galileana e na transformação entre referenciais inerciais, reconhecemos aqui o valor e a fecundidade de expandir essa reflexão, incorporando o meio como categoria epistemológica e física fundamental.

2.7 As transformações galileanas

A partir do experimento do navio e da queda da pedra, emerge uma das consequências matemáticas mais potentes da relatividade galileana: a possibilidade de descrever o mesmo fenômeno em diferentes referenciais por meio de uma simples transformação algébrica. Essa formalização, no entanto, não foi feita por Galileu, mas mais de um século depois, por Joseph-Louis Lagrange. É ele quem expressa, com clareza e rigor, as chamadas transformações galileanas, que se tornariam uma das ferramentas fundamentais da mecânica clássica.

A beleza dessas equações está justamente em sua simplicidade: elas expressam a mudança de um referencial inercial para outro como uma translação uniforme no espaço e no tempo. Em sua forma mais básica, temos:

$$x' = x - vt \quad \text{e} \quad t' = t$$

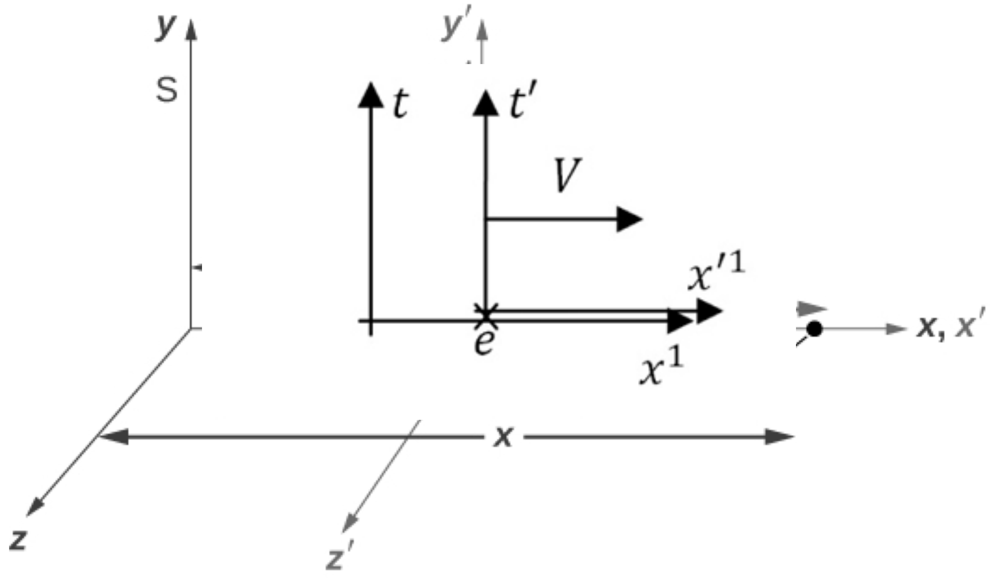
Essa equação representa o deslocamento de um ponto x no espaço quando observado a partir de um referencial que se move com velocidade v. O tempo t é considerado absoluto e idêntico para ambos os referenciais. O novo ponto x', portanto, é obtido por uma subtração ou adição escalar, conforme a direção do movimento relativo.

Apesar de sua simplicidade e grande eficácia prática, essa formulação é, ao mesmo tempo, redutora. Ela separa completamente os dois referenciais — como se fossem visões distintas e estanques da realidade — e estabelece a relação entre eles unicamente por meio de uma operação algébrica. Não há composição de fenômenos, nem interseção dinâmica entre os sistemas: trata-se de uma transposição de coordenadas, ponto a ponto, como se fosse possível "copiar" um fenômeno de um mundo para outro apenas ajustando seus números.

Isso se torna particularmente evidente quando se tenta aplicar essas transformações à descrição de uma trajetória curva, como a parábola observada na queda da pedra. A cada instante, há uma nova posição, uma nova velocidade, e uma nova configuração. A equação galileana, nesse caso, precisa ser aplicada ponto por ponto — e os resultados devem ser "ligados" posteriormente para reconstruir a curva, como num jogo de ligar os pontos. A operação permanece válida, mas perde sua potência explicativa: ela não descreve a inter-relação dos sistemas, apenas as projeta em paralelo.

Esse modo de pensar a transformação — como uma sobreposição lateral de dois sistemas, colocados lado a lado, e diferenciados por um vetor de velocidade constante — será mantido, com variações, em formulações posteriores. Mesmo as complexas transformações de Lorentz, desenvolvidas no século XX, seguem essa mesma lógica estrutural: são equações algébricas que traduzem um ponto de um sistema para outro. No caso de Lorentz, incluem também a dilatação do tempo e a contração do espaço, mas a estrutura algébrica do pensamento é similar.

A genialidade das transformações galileanas reside em sua utilidade prática e elegância formal. Porém, elas expressam apenas um modelo de relação: o da equivalência algébrica entre dois referenciais separados. Não abordam a gênese do movimento nem os processos dinâmicos que fazem surgir as diferenças entre trajetórias. Por isso, ao mesmo tempo que são fundamentais, revelam também seus limites: a física que se constrói sobre elas é eficaz, mas requer uma epistemologia mais rica para lidar com os entrelaçamentos reais entre fenômenos, sistemas e observadores.



2.8 Conclusão

O capítulo que ora se conclui teve por objetivo reconstruir, passo a passo, a gênese da relatividade do movimento no interior da física galileana, desde suas raízes na mecânica clássica até sua formulação como princípio, já prenhe de fecundidade epistemológica. O movimento, enquanto pilar da descrição da realidade física, é tratado por Galileu com rara clareza, apoiando-se em experimentos, em dispositivos técnicos e em argumentos lógicos que desafiam a tradição aristotélica. É nessa articulação entre empiria e idealização que reside a força de sua filosofia natural.

Galileu não inventa sozinho os conceitos que mobiliza. É herdeiro de Aristóteles, de Aristarco, de Arquimedes. Contudo, ao questionar os fundamentos da mecânica qualitativa e finalista, introduz uma nova maneira de pensar os fenômenos. Seus experimentos, descrições e construções técnicas (como planos inclinados, esferas e balanças) não se encerram em si: articulam uma epistemologia nascente, onde o fenômeno é pensado como algo que se repete, que pode ser modelado, medido e descrito matematicamente. Ainda que sua física permaneça limitada aos domínios da cinemática e da inércia, ela oferece as bases sobre as quais Newton, Leibniz e os físicos do século XVIII e XIX construirão, com o auxílio do cálculo, uma estrutura teórica mais ampla.

Mas ainda assim, permanece a estupefação: como um único fenômeno — a queda de uma pedra — pode gerar duas trajetórias tão distintas e, ao mesmo tempo, duas descrições igualmente válidas? Como vimos, a relatividade do movimento se impõe como uma constatação empírica e teórica, e sua formulação galileana desafia o senso comum ao mostrar que a trajetória não pertence ao corpo, mas ao sistema de referência. Galileu não ignora esse paradoxo; antes, faz dele o centro de sua demonstração.

A experiência do navio, amplamente discutida neste capítulo, é exemplar. Mas Galileu vai além: propõe situações alternativas, como o célebre exemplo dos arqueiros em uma carruagem em movimento, antecipando com notável precisão as transformações algébricas que só seriam formalizadas por Lagrange, muito mais tarde. A beleza da física galileana está nessa capacidade de fundir o raciocínio geométrico à observação prática, e de lançar sementes que floresceriam séculos depois. Salviati, seu alter ego no *Diálogo*, pergunta com ironia: “Muito bem! Fizestes alguma vez a experiência do navio?” (GALILEI, 2011, p. 226). E responde que provavelmente ninguém a fez, mas todos creram nela como se a tivessem feito. Galileu nos mostra que o experimento mental, quando apoiado em boa física e raciocínio rigoroso, pode ter tanto valor quanto a experiência concreta.

Outro exemplo poderoso da articulação entre física e lógica aparece quando Galileu, ainda em *Duas Novas Ciências*, trata do infinito com impressionante lucidez. Ao estabelecer uma correspondência biunívoca entre os números naturais e seus quadrados, conclui que “do infinito uma parte não é maior que a outra” (GALILEI, 2011, p. 205). Antecipando os fundamentos da teoria dos conjuntos de Cantor, ele mostra que mesmo uma parte dos naturais — como os quadrados — pode ser colocada em correspondência com o todo, desafiando a intuição comum. Essa concepção matemática do infinito ressoa com sua concepção do movimento: ambos envolvem estrutura, repetição e relação.

O paradigma aristotélico, que rejeitava o movimento misto de reto e circular (GALILEI, 2011, p. 222), é finalmente superado. Galileu reconhece que a pedra pode sim descrever uma parábola, tanto em um navio quanto ao cair de uma torre — e é nesse ponto que o experimento do navio se torna uma metáfora da Terra em rotação. O argumento de Salviati é cristalino: “por ser a mesma razão válida para a Terra e para o navio, da queda da pedra sempre perpendicularmente ao pé da torre nada se pode inferir sobre o movimento ou o repouso da Terra” (GALILEI, 2011, p. 226). Ou seja, o movimento da Terra não pode ser refutado pela observação local da queda de corpos.

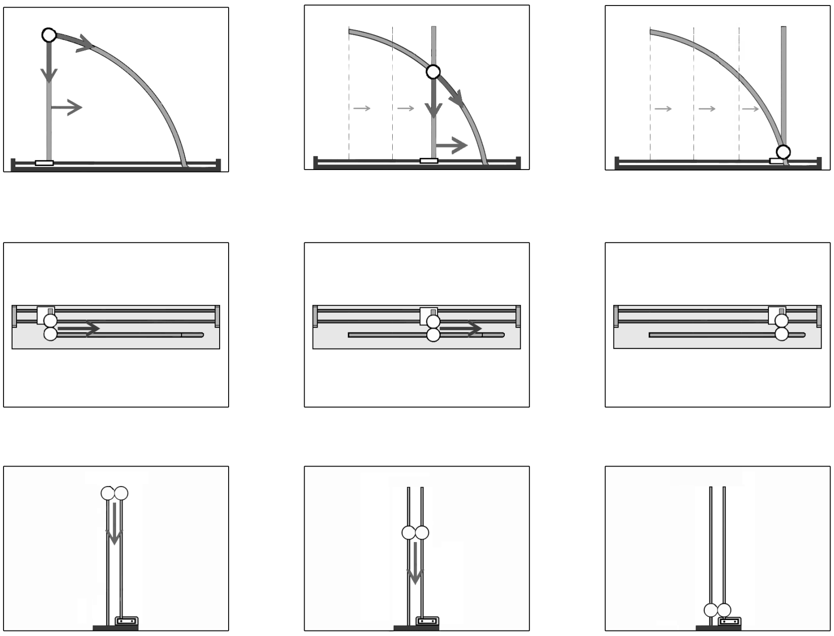
Além disso, a famosa experiência do balde, tantas vezes atribuída a Newton, já aparece esboçada em Galileu, no mesmo *Diálogo*. “Faça-se girar velozmente o balde [...] acontecerá que a água não sairá para fora [...]” (GALILEI, 2011, p. 270). Esse experimento mostra como a força centrífuga aparece como um efeito relativo ao referencial em rotação, antecipando problemas que só seriam plenamente formalizados no século seguinte. Newton irá retomá-lo, mas sua origem está na engenhosidade física e conceitual de Galileu.

Nesse contexto, autores como Alexandre Koyré (1957) e E. J. Dijksterhuis (1961) destacaram que a ruptura operada por Galileu não está apenas no conteúdo de suas descobertas, mas na transformação do próprio modo de pensar. Ainda mais enfaticamente, Stillman Drake (1978) sublinha o papel da matemática como linguagem que permite articular teoria e experimento, tornando Galileu o primeiro físico moderno. Não por acaso, foi também um engenheiro, um construtor de instrumentos, e o primeiro a apontar o telescópio — uma recente invenção — para o céu, descobrindo as luas de Júpiter e mudando para sempre a cosmologia ocidental. Em Pádua, vizinho de Veneza, conviveu com os melhores artesãos de lentes e participou diretamente da criação de instrumentos óticos.

Esse lado técnico de Galileu — o Galileu das lentes, do balde, dos planos inclinados, da torre de Pisa, dos diagramas e dos cálculos — está presente em toda sua obra. É também ele que inspira esta dissertação e o artefato nela apresentado. O contato entre pensamento e matéria, entre ideal e experiência, entre movimento e sua descrição, define a força de sua física. E é esse espírito, inquieto e rigoroso, que seguimos ao investigar a relatividade galileana e ao propor uma nova maneira de entender as transformações entre referenciais.

Por fim, voltamos ao ponto de partida: como pode um único fenômeno gerar múltiplas descrições, múltiplas trajetórias, múltiplas verdades? A resposta talvez esteja em reconhecer que a realidade física não se encerra nos objetos, mas se revela nas relações — entre fenômeno e observador, entre evento e referencial, entre presente e rastro, entre cálculo e experiência. Galileu não apenas descreveu essas relações: viveu-as, construiu-as, deu-lhes forma e conteúdo. Com isso, não só inaugurou a física moderna — inaugurou também a possibilidade de pensar o mundo como sistema de transformações, de simetrias e de observações cruzadas. E isso, ainda hoje, nos estupefaz.

3 Reinterpretação cinemática do experimento



Nada permanece de si mesmo; tudo é em relação, tudo é em movimento.

GIORDANO BRUNO, *De la causa, principio e uno*, 1584.

3.1 – Introdução

A ciência da cinemática nasceu da necessidade de compreender e descrever o movimento em sua pura expressão, antes mesmo de se perguntar por suas causas. No entanto, descrever o movimento não é tarefa simples. Ao contrário da posição, da forma ou da massa — que parecem fixar-se em instantes e lugares — o movimento é, por definição, transição. E mais: é uma transição que não se deixa interromper sem perder sua essência. Ao tentar captá-lo, seja por uma imagem fotográfica, seja por uma anotação numérica, somos levados a congelar aquilo que, em si, só existe na passagem. Como nos mostram os paradoxos de Zenão, o instante isolado é um falso repouso — a flecha, parada no ar, não se move; Aquiles, se medido em fatias de tempo, jamais alcança a tartaruga. Gilles Deleuze, refletindo sobre o cinema, observa que o movimento é algo que se dá entre imagens, não em cada imagem isolada. A foto captura apenas o corpo, jamais o gesto. O movimento, quando é verdadeiro, é indivisível. Ele só pode ser segmentado quando muda de natureza, quando há um salto qualitativo. Essa dificuldade em apreender o movimento em sua inteireza reaparece de modo ainda mais complexo quando não se trata de um só movimento, mas de dois — ou mais — que se compõem, se cruzam ou se contradizem. Como entender um corpo que descreve, ao mesmo tempo, duas trajetórias distintas? Que ciência seria capaz de dar conta dessa simultaneidade? E mais: o que acontece quando essas trajetórias pertencem a sistemas distintos de referência, cada um com sua própria estrutura geométrica e temporal?

É esse o caso descrito por Galileu no experimento da pedra que cai do alto do mastro: um único corpo, um único gesto, mas dois caminhos — uma linha reta para o observador no navio, uma parábola para quem observa do cais. E ambas as trajetórias são, em si, verdadeiras. É aqui que a dificuldade epistemológica se intensifica: se um observador A observa e mede um fenômeno, obtendo X, e se um observador B observa o mesmo fenômeno e obtém Y, e ambos estão corretos dentro de seus referenciais, então a ciência parece dissolver-se num relativismo que depende essencialmente do ponto de vista. A verdade torna-se local, contingente, e a física se fragmenta em múltiplas versões de um mesmo mundo. Esta constatação, embora poderosa, pode se tornar excessiva. Diante dela, este capítulo propõe uma busca: a de uma verdade cinemática mais universal, que não dependa dos infinitos possíveis pontos de vista, mas que emerja da própria estrutura do movimento — não do observador, mas da articulação entre os referenciais.

A elegante formalização das transformações galileanas, tal como vimos ao final do percurso anterior, resolve o problema da conversão entre referenciais de um ponto de vista algébrico. Contudo, ela nos deixa com uma pergunta incômoda: a transformação entre mundos é realmente apenas uma subtração de vetores, uma cópia de coordenadas ajustadas por uma fórmula? Neste capítulo, propomos uma reinterpretação. E se fosse possível conceber essa transformação não como um cálculo abstrato, mas como uma operação física e concreta? E se, em vez de separar os referenciais, fosse possível construir um mecanismo que os intersecionasse, forçando um mesmo corpo a viver em ambos simultaneamente? A verdade do movimento, talvez, não resida na equação que projeta uma trajetória sobre a outra, mas na articulação física, na costura real que permite a passagem contínua entre elas.

O segredo pode estar no fato — por vezes esquecido — de que, durante toda sua queda, a pedra realmente descreve dois movimentos simultâneos. Para o observador no navio, ela cai verticalmente. Para o observador no cais, ela percorre uma curva parabólica. Mas para o mundo, para o real, para o gesto completo, a pedra descreve *ambos* ao mesmo tempo. O que nos resta entender, então, é essa conjunção, essa interseção viva entre formas geométricas distintas. Onde estão os pontos que pertencem, simultaneamente, à reta e à parábola? Onde está o “entre”, o espaço cinemático onde as trajetórias se costuram? Qual é a forma composta do movimento que engloba essas duas expressões?

Estas são as perguntas centrais que orientam o percurso deste capítulo. Avançaremos progressivamente: da busca por uma verdade cinemática mais profunda, à compreensão da sobreposição de referenciais inerciais; da formulação de uma bijeção ponto a ponto entre trajetórias contraditórias, à reflexão sobre o papel do observador e da invariância nas descrições físicas. Ao final, essa nova maneira de pensar o movimento nos conduzirá à concepção de um artefato mental: um modelo, uma estrutura imaginada, um objeto possível — ainda não físico, mas plenamente visualizável — que permitiria dar corpo à interseção das trajetórias. Trata-se de um artefato com um corpo articulado, concebido não como simples maquete ou representação, mas como gesto heurístico e forma encarnada do pensamento. Aqui, detemo-nos em sua origem conceitual: a tentativa de visualizar, simultaneamente, dois mundos cinemáticos distintos, e de articular suas diferenças por uma operação comum. Essas reflexões profundas sobre a interseção de movimentos contraditórios tiveram, num primeiro momento, como resultado direto a criação de um protótipo de artefato — ainda primitivo, mas conceitualmente pertinente e correto.

3.2 – Busca por uma verdade cinemática universal

Entre os muitos momentos em que Galileu revela o alcance de seu pensamento, há uma frase particularmente simbólica de sua obra *Il Saggiatore* (1623), onde escreve:
"*Eu não posso senão invejar aqueles que, como Deus, veem todas as coisas de todos os pontos de vista.*" Essa frase, embora breve, ilumina uma característica central do espírito galileano: a capacidade de se deslocar mentalmente entre diferentes posições, perspectivas e referenciais. Em seu experimento do navio, Galileu não apenas imagina a cena a partir do convés ou do cais — ele parece estar, simultaneamente, nos dois lugares. Sua mente experimental, aguda e inventiva, realiza o salto que une mundos separados. Ele visualiza múltiplos movimentos com clareza, mas, ainda assim, não chega a propor a sobreposição dessas trajetórias como operação física. Ele entende um movimento, entende o outro — mas os mantém paralelos. Falta ainda o gesto de conjunção: a interseção entre os dois movimentos contraditórios, como se o próprio mundo físico pudesse contê-los ambos num só corpo, num só fenômeno, sem depender de qual observador os descreve.

Essa lacuna — essa ausência de uma articulação entre os referenciais — foi, para nós, o ponto de partida de uma busca. Uma busca por uma verdade cinemática universal, que não dependa da escolha de um ponto de vista, mas que possa emergir da própria estrutura do fenômeno. Essa verdade não se pretende absoluta, no sentido metafísico ou dogmático, mas universal no sentido galileano: válida para todos os referenciais inerciais equivalentes, independentemente do lugar de onde se olha. Ela se fundamenta na geometria e na cinemática, na tentativa de visualizar simultaneamente os dois movimentos — o da pedra que cai verticalmente e o da pedra que descreve uma parábola — e de entender como ambos pertencem ao mesmo acontecimento físico.

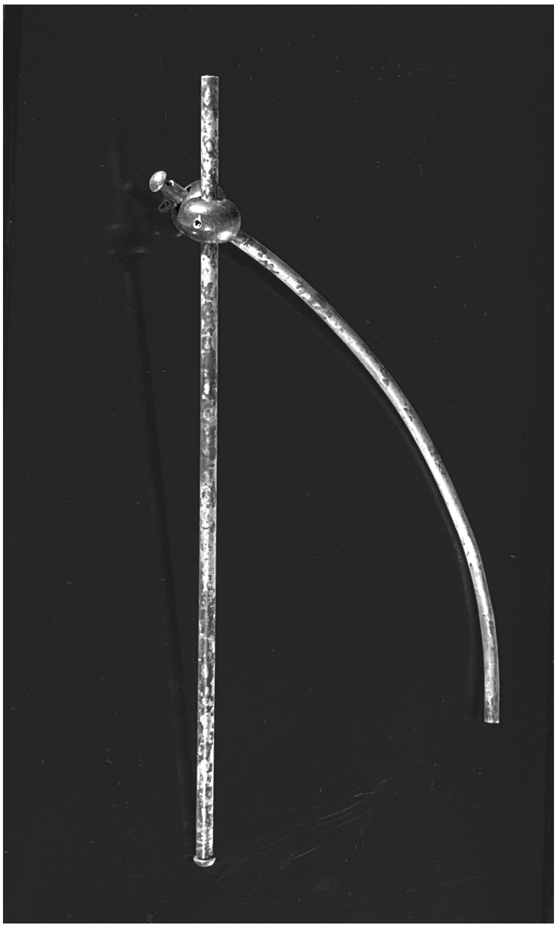
Essa busca foi, desde o início, também prática. Antes de chegar ao artefato final, houve uma espécie de pré-história experimental, feita de tentativas intuitivas, improvisações manuais e gestos construtivos. Encontramos, por acaso, duas hastes de bronze finas, com cerca de trinta centímetros. Uma delas permaneceu reta. A outra foi aquecida sobre a chama de um fogão, até adquirir um brilho avermelhado. Em seguida, com o auxílio de dois alicates, torcemos lentamente a haste incandescente sobre um gabarito desenhado em papel manteiga — uma parábola traçada à mão, que serviu de guia. Estávamos, sem saber, materializando duas trajetórias: a reta do referencial do navio e a parábola do referencial do cais. As duas hastes tornaram-se, de certo modo, memórias metálicas de movimentos passados — uma geografia física da queda composta.

Com as mãos, começamos a manipular essas hastes. Tocá-las era quase tocar o experimento. Tentamos entender como um único corpo poderia deslizar sobre ambas, descrevendo dois movimentos simultaneamente. Idealmente, as duas trajetórias deveriam coexistir no mesmo plano vertical, mas isso impunha dificuldades técnicas. Pensamos em soluções complexas — encaixes mecânicos, feixes de luz, dispositivos com fumaça ou laser — mas percebemos que o excesso de engenhosidade podia obscurecer o essencial. Adotamos então uma solução simples e eficaz: deslocar levemente uma haste em relação à outra, mantendo-as em planos paralelos, separados por poucos centímetros. O resultado era uma ilusão satisfatória de simultaneidade, que permitiria, futuramente, testar um corpo único capaz de percorrer ambas as guias.

A etapa seguinte consistiu em imaginar como esse corpo poderia funcionar. Como criar algo que, sem folga nem erro, pudesse tocar simultaneamente a reta e a parábola, ajustando-se às duas formas e respondendo à tensão entre elas? Ainda não tínhamos uma solução. Mas sabíamos que, se conseguíssemos, teríamos superado o dilema do observador: o movimento não dependeria mais de um ponto de vista externo, mas se tornaria visível em sua totalidade, contido em um único gesto físico. Seria a construção de um operador real de equivalência cinemática — e a afirmação de que existe, sim, uma estrutura do movimento composta, contínua e universal, que subsiste apesar das diferenças entre os referenciais.

Esse método — feito de imaginação, materiais simples e tentativa e erro — lembra o de Galileu. Não por acaso. Como ele, buscamos engenhocas, experimentos e artifícios que nos permitissem não apenas ilustrar uma teoria, mas produzir conhecimento por meio de um artefato. É o que Gaston Bachelard chamaria de "fenomenotécnica": a verdade emerge não apenas da observação do fenômeno, mas da operação que o torna visível. O artefato constrói o fenômeno. Gilbert Simondon, por sua vez, diria que esse objeto, ao integrar tensões contraditórias em uma unidade funcional, se torna um "indivíduo técnico" — expressão singular de um processo de individuação material e conceitual. A cinemática, neste caso, deixou de ser apenas um campo de fórmulas: tornou-se uma prática de visualização e uma ontologia experimental. A ideia de que um mesmo corpo pode, de fato, descrever dois movimentos contraditórios ao mesmo tempo passou a guiar nosso pensamento. Não mais como hipótese teórica, mas como hipótese realizável. Foi esse o ponto de virada: perceber que a interseção de trajetórias não era apenas uma questão de perspectiva, mas um fato físico que podia ser encarnado. E que, ao ser encarnado, podia dar origem a uma nova maneira de compreender o real.

É isso que chamamos, com ousadia medida, de verdade cinemática universal. Uma verdade que não escolhe entre reta ou parábola, entre navio ou cais, entre observador A ou B — mas que reconhece, na articulação entre eles, a estrutura profunda do fenômeno. Não se trata de negar a relatividade do movimento, mas de avançar um passo além: construir uma relação onde antes havia apenas variação, estabelecer uma operação física onde antes havia apenas tradução simbólica. Essa verdade não pretende eliminar o observador — mas superá-lo, pelo gesto que une o que ele vê. A ciência, afinal, não depende do olho que observa, mas da estrutura que permite que se veja o mesmo, de diferentes pontos, como parte de um só mundo. E é nesse mundo — construído entre duas hastes, entre duas trajetórias, entre duas descrições — que começamos a encontrar uma nova ciência do movimento.



3.3 – Sobreposição de referenciais inerciais

Para compreender o que significa sobrepor referenciais inerciais, é necessário, antes, definir de modo preciso o que é um referencial inercial. Trata-se de um sistema de observação — ou, mais exatamente, de um conjunto de coordenadas espaciotemporais — que se move com velocidade constante, em linha reta, sem aceleração ou rotação. Em termos técnicos, é um sistema que obedece à condição de movimento uniforme retilíneo (MUR). Quando um corpo é descrito dentro de um referencial inercial, aplica-se a ele diretamente a primeira lei de Newton: ele permanece em repouso ou em movimento retilíneo uniforme, a menos que alguma força externa atue sobre ele.

Galileu, ao descrever o experimento da pedra solta do alto do mastro, trabalha com dois desses referenciais: o da Terra, associada ao cais, e o do navio, que se desloca com velocidade constante. Ambos são sistemas inerciais legítimos. Contudo, ao tratá-los separadamente — cada qual com sua própria descrição da trajetória — a física tradicional deixa de lado uma questão fundamental: seria possível sobrepor esses referenciais, não apenas no papel, mas no mundo real? Mais ainda: seria possível fazer com que um mesmo corpo se inscrevesse simultaneamente nos dois?

Antes de responder a essas perguntas, é útil distinguir duas noções: justaposição e sobreposição. Justapor é colocar lado a lado; comparar sem interação. É o que se faz quando colocamos, em um gráfico, a reta da queda no navio e a parábola da queda observada do cais. Sobrepor, no entanto, é permitir a coexistência ativa: é fazer com que as duas formas se encontrem num mesmo espaço, num mesmo corpo, num mesmo fenômeno. A sobreposição exige articulação — uma costura entre mundos distintos.

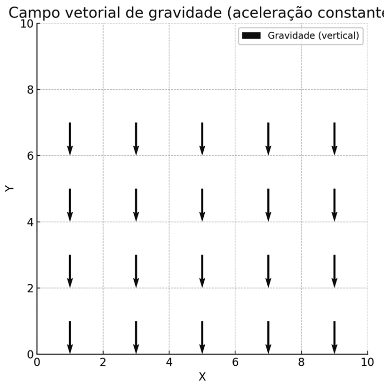
Para facilitar essa operação, é comum — por razões metodológicas — "zerar" um dos referenciais. Por exemplo, se dois carros se deslocam, um a 50 km/h e outro a 70 km/h, pode-se considerar o primeiro como estando em repouso, e o segundo como movendo-se a 20 km/h. A relação cinemática entre eles permanece a mesma, mas a análise torna-se mais simples. Esse procedimento é análogo ao que fizemos ao elaborar o protótipo inicial: mantivemos a parábola fixa, representando o referencial da Terra, e deslizamos sobre ela a reta vertical — correspondente ao eixo do navio em movimento. Visualmente, é como se colocássemos dois papéis vegetais sobrepostos: no de baixo, traçamos a parábola; no de cima, a reta vertical. Ao movermos o segundo papel lateralmente, no sentido transversal, a reta intercepta a parábola em vários pontos. Essa sequência de interseções sucessivas é, precisamente, a zona de sobreposição entre os dois referenciais — a interseção física das duas descrições do mesmo fenômeno.

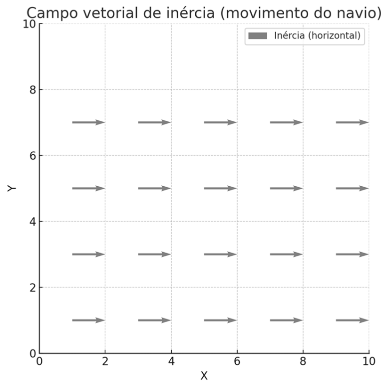
A riqueza dessa sobreposição vai além da imagem. No referencial do navio, a única força que atua sobre a pedra é a gravidade — um campo vetorial composto por infinitas setas verticais apontando para baixo. No referencial do cais, no entanto, a pedra também possui um movimento horizontal, herdado da inércia do navio. Nesse caso, o campo de forças é composto: cada ponto da trajetória da pedra resulta da soma de dois vetores — um vertical (gravidade) e um horizontal (inércia). A composição desses vetores forma um novo campo vetorial, com vetores oblíquos que mudam conforme o tempo. Em termos gráficos, poderíamos representá-los como uma nuvem de vetores curvos, pequenos arcos de parábolas, que expressam a orientação do movimento composto instante a instante.

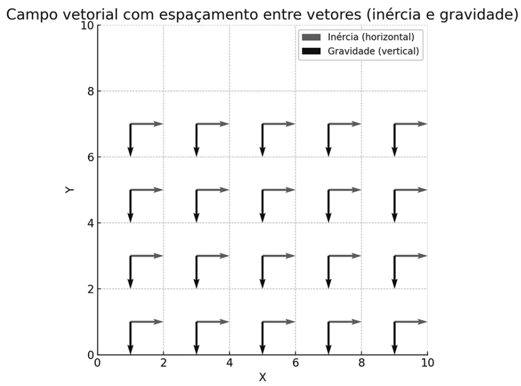
Esse campo deformado tem consequências profundas. Do ponto de vista do observador fixo no cais, todos os fenômenos físicos que ocorrem no interior do navio parecem sofrer uma deformação horizontal. Um navio que se move lateralmente poderia ser percebido como um corpo espaguetificado — alongado na direção do eixo X. A trajetória da pedra, os deslocamentos internos, até mesmo o próprio casco do navio seriam, por assim dizer, espaguetificados para o observador externo. Essa deformação não é uma ilusão: ela é a tradução do deslocamento horizontal num campo onde a vertical está associada à queda e a horizontal à inércia. Cada movimento simples torna-se, no referencial sobreposto, um movimento composto.

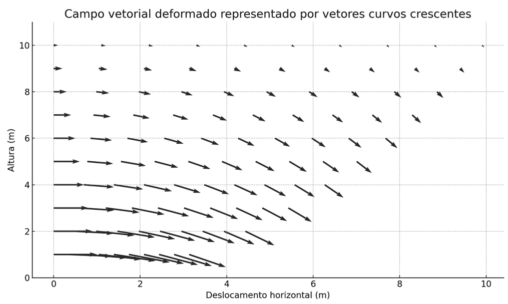
Mas não se trata apenas de efeito visual. A sobreposição de referenciais é também uma forma de compreender. Ao sobrepor dois sistemas de descrição, criamos a possibilidade de ver, não apenas com os olhos de um ou de outro observador, mas com a estrutura comum que os articula. A pedra, ao cair, não pertence ao navio nem ao cais: ela pertence ao entre. E esse entre não é abstrato: ele pode ser desenhado, representado, materializado. O protótipo experimental — com suas duas hastes sobrepostas — já encarnava esse gesto. Mesmo antes de ser nomeado ou tecnicamente aperfeiçoado, ele já indicava a direção de uma física relacional, onde o movimento deixa de ser relativo e passa a ser articulado.

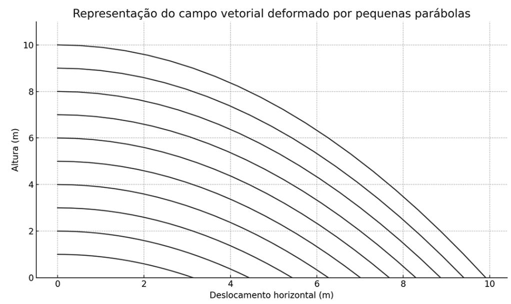
Essa articulação é, no fundo, uma nova maneira de pensar a equivalência galileana. Ao invés de afirmar que todos os referenciais inerciais são equivalentes por convenção, propomos que eles podem ser coexistentes por construção. Que é possível fazer com que duas descrições simultâneas de um mesmo fenômeno não se excluam, mas se cruzem — e, ao se cruzarem, revelem a geometria comum que as une. No item a seguir, essa geometria será tratada com mais precisão: examinaremos a interseção cinemática ponto a ponto entre as trajetórias, e mostraremos como essa correspondência constitui a chave de uma nova transformação entre referenciais — não mais por subtração de vetores, mas por encadeamento de formas.

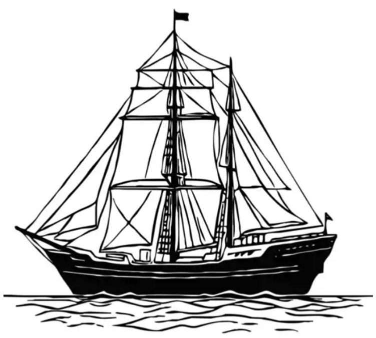

Campo vetorial de gravidade (aceleração constante)
Gravidade (vertical)
Y
X

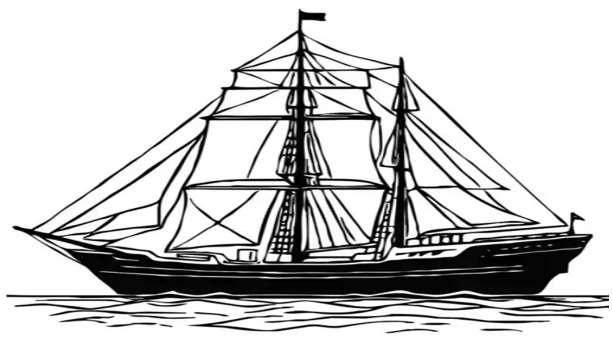

Campo vetorial de inércia (movimento do navio)
Inércia (horizontal)
Y
X


Campo vetorial com espaçamento entre vetores (inércia e gravidade)
Inércia (horizontal)
Gravidade (vertical)
Y
X


Campo vetorial deformado representado por vetores curvos crescentes
Altura (m)
Deslocamento horizontal (m)


Representação do campo vetorial deformado por pequenas parábolas
Altura (m)
Deslocamento horizontal (m)





3.4 – Interseção cinemática: bijeção (ponto a ponto) entre trajetórias

No item anterior, vimos que dois referenciais inerciais podem ser sobrepostos fisicamente por meio de um artefato, permitindo que um corpo único percorra simultaneamente duas trajetórias pertencentes a sistemas distintos. Agora, avançamos um passo a mais: passamos da sobreposição global à análise local, ponto a ponto, da interseção entre esses referenciais.

Visualizemos novamente o experimento do papel vegetal. Mantemos fixa a parábola — que representa a trajetória da pedra segundo o referencial do cais — e sobre ela deslizamos lateralmente uma reta vertical, que representa a queda da mesma pedra no referencial do navio. Se fizermos esse deslizamento de forma lenta, quadro a quadro, como em uma filmagem em câmera lenta, veremos que a cada instante a reta intercepta a parábola em um ponto único e preciso. Esse ponto é o local exato em que as duas descrições — a retilínea e a curva — concordam. Esse ponto comum não é apenas uma abstração geométrica: é o próprio corpo em movimento, visto ao mesmo tempo pelas duas lentes. Trata-se, portanto, de uma interseção cinemática real.

Essa ideia — de que dois conjuntos distintos de pontos podem ser associados de forma exata, elemento por elemento — é expressa na matemática pelo conceito de bijeção. Uma bijeção é uma correspondência tal que a cada elemento de um conjunto corresponde exatamente um elemento do outro, e vice-versa. Não há sobra, nem repetição: a estrutura de um se reflete no outro com precisão total.

Esse conceito foi formalizado por Georg Cantor, o pai da teoria dos conjuntos, que o utilizou para comparar diferentes infinitos. Cantor demonstrou, por exemplo, que os números naturais e os quadrados perfeitos — ainda que aparentemente diferentes em densidade — possuem a mesma cardinalidade, pois existe uma bijeção que os relaciona. Em suas palavras: “Uma bijeção é o único critério seguro para afirmar que dois conjuntos têm o mesmo número de elementos.” — Georg Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre (1895). O que Cantor mostrou com números, aplicamos aqui a trajetórias físicas. A reta e a parábola são, nesse contexto, dois conjuntos de pontos — duas descrições geométricas — que podem ser associadas por uma bijeção dinâmica, realizada pelo próprio corpo em movimento.

Cada instante da queda corresponde a um ponto na reta e a um ponto na parábola, e esses dois pontos são o mesmo. O corpo realiza fisicamente essa correspondência — ele é o elo entre os dois conjuntos.

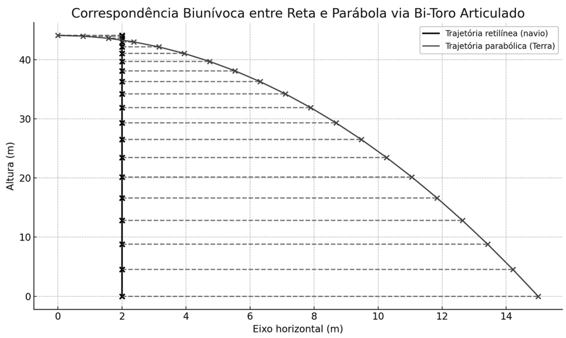
Essa constatação nos permite uma mudança de perspectiva radical: se as trajetórias se cruzam ponto a ponto, então os movimentos também se cruzam. A equivalência galileana entre referenciais, até então tratada como uma simetria abstrata entre leis, transforma-se aqui numa coincidência material entre formas em movimento.

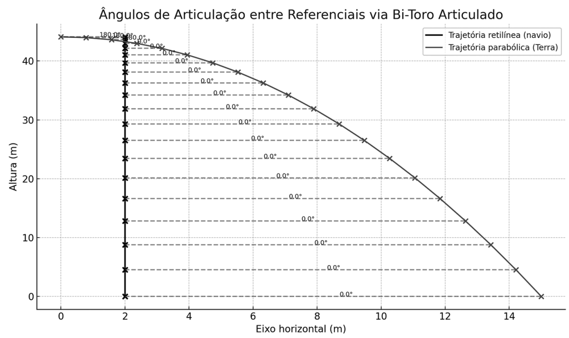
Curiosamente, essa ideia já aparece, em embrião, em uma passagem famosa de Galileu, citada anteriormente, em que ele escreve: "Aumentando-se quanto se desejar a velocidade do navio, a pedra cadente descreverá suas transversais cada vez mais compridas, e ainda assim percorrerá todas nas mesmas duas batidas de pulso." — Galileu Galilei, Diálogo sobre os Dois Máximos Sistemas do Mundo (1632). Essa frase, muitas vezes mal compreendida, deu origem ao que ficou conhecido como o "paradoxo de Galileu": como pode a mesma pedra cair ao pé do mastro, mesmo quando o navio se move com diferentes velocidades? A resposta, que Galileu apenas sugere, mas não formaliza, está justamente na interseção das trajetórias. A pedra percorre diferentes parábolas, mas sempre coincide com a reta vertical aos olhos de quem está no navio. O que permanece invariável não é a trajetória, mas a relação entre os referenciais.

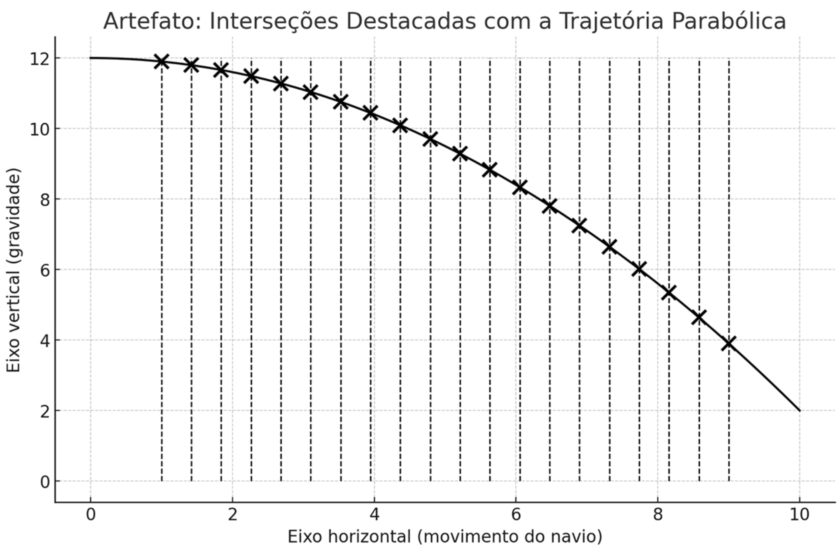
Ao construir o artefato experimental, e ao permitir que um corpo percorresse simultaneamente a reta e a parábola, tornamos visível essa bijeção. A cada ponto da reta corresponde um ponto na parábola — e a transformação galileana pode ser reimaginada, não como uma mera subtração vetorial, mas como um encadeamento contínuo de pares coincidentes. O corpo que se move torna-se, ele mesmo, o operador da transformação entre mundos.

Essa interseção ponto a ponto não é apenas uma curiosidade geométrica. Ela tem valor epistemológico: rompe com a ideia de que o movimento só pode ser descrito por um observador. Aqui, a verdade do movimento não é mais uma questão de ponto de vista, mas de estrutura de correspondência. O corpo, ao cair, carrega consigo duas trajetórias e dois sistemas. Ele não escolhe entre eles — ele os articula. E essa articulação, como veremos mais adiante, não é estática nem apenas figurativa: ela se realiza por meio de uma rotação real, executada por uma peça que integra simultaneamente os dois referenciais. Essa rotação, além de visível e mensurável, é o que torna possível o encadeamento dos pontos e a transição contínua entre os mundos.

Como escrevemos anteriormente: “a transformação entre mundos é realmente apenas uma subtração de vetores, uma cópia de coordenadas ajustadas por uma fórmula?” Neste ponto da investigação, a resposta começa a se tornar clara: não. A transformação pode ser uma operação física concreta, uma costura ponto a ponto entre formas distintas, uma interseção real entre trajetórias. E essa interseção pode ser realizada, visualizada e estudada — como se fosse um novo tipo de lente — por meio de um corpo que as percorre, e de um artefato que as organiza.







3.5 – Observadores, relatividade e invariância

A teoria da relatividade galileana marca, na história da ciência, uma ruptura fundamental: ela desloca o foco do mundo absoluto para o mundo relacional. Em vez de perguntar “qual é a trajetória verdadeira de um corpo?”, Galileu ensina a perguntar “segundo quem?”. O observador passa, então, a desempenhar um papel central na descrição dos fenômenos físicos. Ainda que Galileu não o tematize diretamente como sujeito epistêmico — sua figura permanece implícita, deslocando-se entre o cais e o navio —, é a partir de sua posição que se definem as trajetórias, os tempos e os movimentos.

Essa centralidade do observador será levada a novos patamares pela física moderna. Na relatividade restrita de Einstein, os referenciais inerciais ainda são equivalentes, mas o tempo e o espaço passam a ser medidos diferentemente segundo a posição e a velocidade do observador. Já na relatividade geral, os próprios campos gravitacionais deformam o espaço-tempo, tornando o ponto de vista do observador dependente da geometria local. E, na física quântica, a figura do observador retorna de modo peculiar: não como agente subjetivo, mas como parte do processo de medição. Ao observar ou medir um sistema quântico, ocorre o colapso da função de onda — isto é, a transição de um estado superposto para um estado definido. Essa transição não depende de consciência, mas da interação física entre sistema e aparelho de medição.

Nosso problema, no entanto, é mais restrito. Ao tratar da queda de uma pedra segundo dois referenciais galileanos — o do navio e o da Terra —, buscamos compreender como se articulam descrições diferentes do mesmo fenômeno. A resposta tradicional apela ao papel do observador: um registra a trajetória retilínea, outro registra a trajetória parabólica. Mas essa solução, ainda que funcional, nos parece insuficiente. Pois tende a reduzir a descrição física a uma simples mudança de posição de medição, como se o fenômeno não tivesse estrutura própria. Tal interpretação confunde-se com teorias perceptivas, que deliberadamente deixamos de lado nesta dissertação, por envolverem dimensões psicológicas e subjetivas que não cabem no escopo do presente trabalho. Aqui, o observador será entendido em seu papel mais estrito e objetivo: um dispositivo físico (ou mental) que mede, registra, e descreve fenômenos com base em um referencial dado — como uma câmera ou um aparelho de medição.

É aqui que entra o conceito de invariância. A física moderna sempre buscou leis que se mantenham constantes, mesmo quando o observador muda. Ernst Mach, ao criticar a noção de espaço absoluto, insistiu que todo conhecimento deve referir-se a relações entre corpos — e não a entidades fixas. Karl Popper, por sua vez, propôs que o critério de cientificidade de uma teoria está em sua capacidade de ser testada intersubjetivamente — ou seja, de manter alguma forma de estabilidade descritiva independentemente de quem observa. Em ambos os casos, a questão é a mesma: como garantir uma estrutura comum por trás das múltiplas descrições?

Esse problema ganha forma aguda no campo do movimento. A relatividade galileana estabelece a equivalência entre referenciais inerciais — mas essa equivalência, se mal compreendida, pode levar a um relativismo excessivo. Afinal, se toda trajetória depende do referencial adotado, como afirmar uma realidade comum? Já exploramos essa tensão em outros momentos do capítulo, mas agora ela reaparece sob nova luz. Pois a interseção ponto a ponto entre as trajetórias — descrita no item anterior — sugere que há, sim, uma base compartilhada entre os mundos. E essa base não é o observador: é o corpo em movimento.

Esse deslocamento de foco é decisivo. Em vez de tomar o observador como ponto de referência, propomos tomar o próprio fenômeno físico. A pedra que cai não pertence a ninguém — ela cai. E em sua queda, ela inscreve simultaneamente dois mundos: o da reta e o da parábola. Esse corpo em movimento é quem realiza, ponto a ponto, a transformação entre os referenciais. Ele não representa um ponto de vista — ele articula dois. E nesse sentido, poderíamos dizer, com leve analogia a Aristóteles, que o movimento da pedra é "natural": ele não exige que alguém o observe para acontecer. Tal como no conceito aristotélico de lugar natural — onde cada corpo se move segundo sua essência e não segundo um sistema de coordenadas —, aqui também o corpo segue seu caminho por necessidade própria.

A equivalência entre pontos de vista, então, pode ser reinterpretada como equivalência entre referenciais inerciais, independentemente da presença de um sujeito. O homem no navio não é o definidor do sistema de referência: ele apenas se encontra a bordo. O verdadeiro referencial é o sistema físico: o navio, sua velocidade constante, a ausência de forças externas, a estrutura dinâmica em que os movimentos ocorrem. O observador é um passageiro — o referencial é o navio.

Essa distinção é fundamental. Pois ao libertar a física da necessidade de um observador humano, devolvemos à realidade seu poder de articulação. O fenômeno deixa de ser um efeito de quem o registra e passa a ser uma operação objetiva, com estrutura própria. Como escreveu Bachelard: *"O real não é aquilo que se oferece imediatamente aos sentidos, mas aquilo que resiste ao pensamento."* É essa resistência — essa estrutura que persiste por trás das múltiplas descrições — que buscamos nomear como invariância.

3.6 – Conclusão

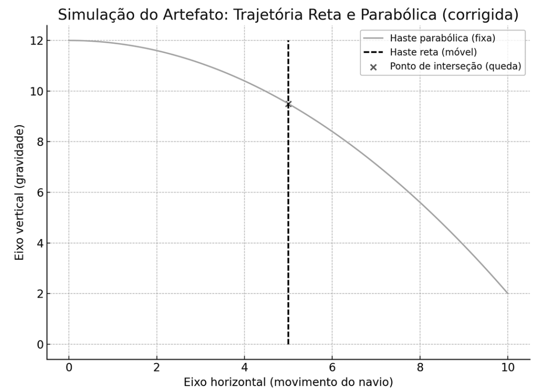
O percurso deste capítulo partiu de uma inquietação fundamental: como superar a aparente fragmentação do real imposta pela relatividade do movimento? Em vez de aceitar a separação entre os pontos de vista do navio e do cais, buscamos uma verdade cinemática mais universal — uma estrutura relacional que pudesse ser não apenas formulada, mas construída e experimentada.

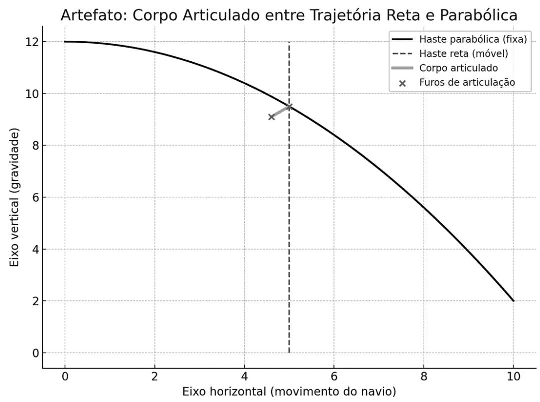
Essa busca nos levou a um método quase artesanal. As duas hastes de bronze — uma reta, outra curvada pela chama — tornaram-se mais do que um protótipo: foram a materialização da própria pergunta. Ao dobrar o movimento com as mãos, percebemos que a sobreposição de referenciais poderia ser uma operação física. Essa prática direta, quase galileana, revelou uma via alternativa à abstração algébrica: a de uma cinemática tangível.

A análise dessa sobreposição mostrou que cada ponto da trajetória vertical, no referencial do navio, correspondia exatamente a um ponto da parábola no referencial do cais. Não era uma aproximação — era uma correspondência rigorosa, uma bijeção cinemática ponto a ponto, como diriam os matemáticos da teoria dos conjuntos. Georg Cantor, ao introduzir o conceito de bijeção para comparar infinitos, mostrou que a equivalência entre conjuntos não depende do conteúdo, mas da estrutura de correspondência entre os elementos. Aqui, de modo análogo, dois mundos se equivalem porque seus pontos se encadeiam perfeitamente.

Com isso, o foco desloca-se decisivamente do observador para o fenômeno. A verdade do movimento não reside mais em quem o mede, mas na estrutura que o articula. O navio, como sistema dinâmico, é o referencial; o observador, um passageiro. Ao libertar a física da centralidade do "olhar", devolvemos ao corpo em movimento seu papel de operador. Ele não pertence a um mundo ou a outro — ele os costura.

Essa reinterpretação, contudo, exige mais do que um modelo mental. Ela clama por sua encarnação física. Era preciso conceber um objeto capaz de realizar, no espaço real, a interseção entre os mundos. Um sistema no qual um mesmo corpo pudesse, de fato, percorrer as duas trajetórias e, no processo, revelar a geometria oculta que as une por meio de um gesto físico observável: uma rotação.





Apresentamos, portanto, pela primeira vez, o artefato concebido para executar essa operação: **o Bi-Toro Articulado.**

Justificativa do Nome: Bi-Toro Articulado

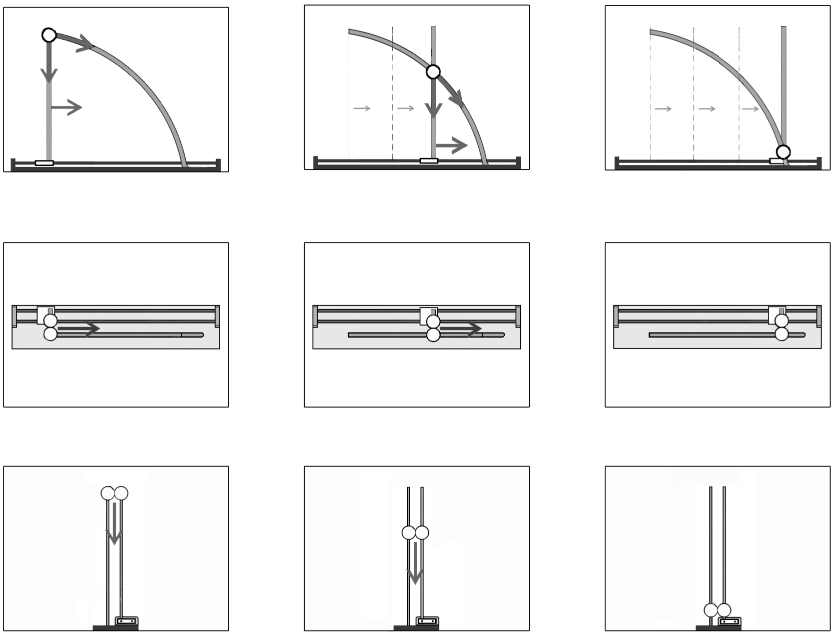
O nome *Bi-Toro Articulado* não é um mero rótulo, mas um mapa conceitual do próprio projeto. Cada termo foi escolhido para encapsular uma função essencial do artefato e da teoria que ele materializa. "Bi" remete à dualidade fundamental que está na origem do problema: dois referenciais, duas trajetórias (reta e parábola), duas descrições do mesmo evento. "Toro" refere-se à topologia da peça-chave, composta por duas esferas furadas que, em sua essência geométrica, são toros, formas que se curvam sobre si mesmas. Finalmente, "Articulado" é o termo que define a natureza da relação entre esses dois mundos: não uma separação, mas uma conexão dinâmica, uma junção móvel, uma engrenagem que permite a transformação.

É crucial, no entanto, estabelecer uma convenção tipográfica que carrega uma distinção conceitual profunda. Quando nos referimos ao sistema completo — o aparato experimental que inclui as guias (reta e parabólica), a estrutura de suporte e a peça móvel —, usaremos a grafia com iniciais maiúsculas: *Bi-Toro Articulado*, ou simplesmente *O Bi-Toro*. O nome próprio designa o artefato em sua totalidade, o "mundo" onde o fenômeno se desenrola e se torna inteligível.

Por outro lado, quando a referência for específica à peça central, o coração do sistema, o corpo físico composto pelas duas esferas furadas que deslizam simultaneamente pelas guias, usaremos a grafia em minúsculas: *o bi-toro*. Esta peça não é o sistema inteiro, mas sim o *operador* da transformação, o elemento que *executa* a articulação e encarna a coexistência dos dois movimentos. *O bi-toro* (a peça) é o agente que vive dentro do *Bi-Toro* (o sistema), e é a sua rotação que resolve o paradoxo.

Essa distinção é mais do que um preciosismo estilístico; ela é uma ferramenta de clareza epistemológica. Ela nos permite diferenciar analiticamente o palco (o Sistema) do ator principal (o Operador), o problema em seu enquadramento geral da solução em sua operação específica. O *Bi-Toro* demonstra o problema da relatividade; o *bi-toro* o resolve fisicamente.

4 O Bi-Toro articulado: concepção e realização do artefato



Na ação, a verdade revela-se.

DAVID BOHM, *Wholeness and the Implicate Order*, 1980.

Entre todos os movimentos, o circular é o mais perfeito.

ARISTÓTELES, *De Caelo*, Livro I, 268b15.

4.1 Introdução

As duas epígrafes que abrem este capítulo apontam para direções complementares e essenciais. A primeira, de David Bohm, indica que a verdade não é estática, mas um processo que se revela no gesto, na operação, na construção. A segunda, de Aristóteles, consagra o movimento circular como forma suprema de regularidade e perfeição — uma ideia que atravessa desde a cosmologia antiga até a mecânica moderna. Ao conjugar ação e rotação, gesto e estrutura, este capítulo apresenta a realização concreta de um pensamento: o Bi-Toro Articulado.

No final do capítulo anterior, foi introduzido pela primeira vez o nome do artefato — Bi-Toro Articulado — com a devida distinção entre o bi-toro (peça articulada de duas esferas) e o Bi-Toro (sistema completo, composto por guias, base, trilhos e operador). Agora, esse conceito se desdobra em objeto. Passamos da concepção mental à realização física, da abstração geométrica à concretude técnica. O desafio proposto — materializar a interseção ponto a ponto entre uma trajetória retilínea e uma trajetória parabólica — exige não apenas engenho, mas invenção: o nascimento de uma nova peça, capaz de existir simultaneamente em dois mundos cinemáticos distintos.

Este capítulo narra esse processo. Primeiro, retoma-se brevemente o percurso de criação, a partir de experimentações manuais iniciais com hastes de bronze, que já antecipavam a intenção de cruzar dois referenciais. Em seguida, descreve-se a descoberta fundamental: que a equivalência entre a reta vertical (referencial do navio) e a parábola (referencial da Terra) não poderia ser alcançada por translação ou deformação, mas apenas por rotação. Esse insight levou à criação do bi-toro, uma peça articulada composta por duas esferas furadas ligadas por um eixo, capaz de realizar a rotação necessária ao longo da parábola variável.

Essa peça, simples e sofisticada ao mesmo tempo, representa a chave de toda a transformação. A partir dela, desenvolveu-se o projeto técnico do Bi-Toro completo, com base de madeira, hastes de aço inox, trilhos de apoio, materiais plásticos de precisão e um sistema de deslizamento que permite ao observador — e ao pesquisador — acompanhar visualmente a rotação e o deslocamento simultâneo do corpo. Esse processo foi registrado em desenhos técnicos à mão, digitalizado em AutoCAD e modelado em 3D, resultando em uma documentação enxuta, porém extremamente densa, capaz de comunicar forma, escala, funcionamento e materialidade do objeto.

O capítulo está estruturado em três grandes blocos: (1) a gênese do artefato, desde o experimento mental até o primeiro protótipo articulado; (2) a descrição da peça-chave — o bi-toro — como operador físico da equivalência por rotação; e (3) o desenvolvimento técnico, incluindo projeto, construção, catálogo fotográfico e vídeos explicativos. As etapas da fabricação serão descritas com precisão, mas sempre subordinadas ao sentido epistemológico do artefato: ele não ilustra uma teoria preexistente — ele a produz.

Dessa maneira, o Bi-Toro é mais que um experimento: é um operador de equivalência. Ao realizar fisicamente a transformação entre dois referenciais inerciais por meio de uma rotação, ele encarna uma nova concepção do movimento composto, já não mais pensado como soma de vetores independentes, mas como trajetória articulada, contínua, tangível. O Bi-Toro revela, no gesto, aquilo que antes permanecia invisível: que a equivalência entre mundos não é uma abstração algébrica, mas uma rotação concreta, uma torção material que funda uma nova forma de verdade cinemática.

4.2 Do experimento mental ao artefato físico

A passagem do experimento mental à construção física do Bi-Toro Articulado foi marcada por um processo artesanal, reflexivo e inventivo. Tudo começa com uma inquietação conceitual: como pode um único corpo descrever simultaneamente duas trajetórias contraditórias — uma retilínea, outra parabólica — observadas por referenciais inerciais diferentes? A resposta exigia mais do que uma abstração teórica. Era preciso construir um objeto capaz de realizar concretamente a equivalência entre os pontos de vista.

O primeiro passo foi manual. Duas hastes metálicas — uma reta e outra curva — foram modeladas em arame de bronze e dispostas em planos paralelos. A haste retilínea representava a trajetória vertical observada do navio; a haste curva, moldada sobre uma parábola traçada em papel manteiga, representava a trajetória observada da Terra. A ideia era simples e ousada: permitir que uma mesma peça percorresse simultaneamente as duas trajetórias. A peça em questão deveria tocar a haste reta em um ponto e, ao mesmo tempo, tocar a parábola em outro, reproduzindo fisicamente a sobreposição entre movimentos.

Essa tentativa revelou rapidamente um problema técnico e epistemológico: não era possível manter contato contínuo entre dois trilhos inclinados de maneira variável com uma peça rígida ou simétrica. Surgiram diversas tentativas com peças curvas, dobradas, elásticas — todas falharam. Até que emergiu um novo princípio: a equivalência só poderia ser realizada se a peça fosse capaz de girar.

Esse momento representou um verdadeiro salto conceitual. A rotação deixou de ser um efeito possível e passou a ser uma condição necessária. A única forma de manter simultaneamente o contato entre a haste retilínea e a parábola — cujas inclinações variam ponto a ponto — era permitir que o corpo de ligação ajustasse sua orientação continuamente, ao longo do percurso.

Foi então que surgiu o protótipo rudimentar do bi-toro: duas pequenas esferas de madeira, perfuradas, ligadas por um parafuso sem cabeça. Uma das esferas era travada no eixo com cola forte; a outra permanecia livre para girar. Ao ser posicionada entre as duas hastes, a peça começou a girar naturalmente, obedecendo à diferença de inclinação entre a reta e a curva. A rotação acontecia por necessidade, não por imposição. Era a própria forma do sistema que impunha o giro. E esse giro era variável: mais acentuado no início do percurso, onde a curvatura da parábola é maior, e mais suave ao final, onde a curva se aproxima da vertical.

Esse insight foi decisivo. A equivalência entre referenciais inerciais, até então entendida como uma simples diferença de vetores, passou a ser concebida como uma operação rotacional — contínua, tangível, mecânica. A peça não simbolizava a transformação: ela a realizava.

Seguiram-se testes em oficina, em colaboração com um profissional de efeitos especiais para cinema. Foram experimentados diferentes materiais, pesos, diâmetros, eixos, folgas e encaixes. Testaram-se também comportamentos dinâmicos: como a rotação variava conforme a forma da parábola, como o giro se distribuía ao longo do tempo, e como o corpo articulado respondia ao movimento manual contínuo. A rotação revelou-se sensível às condições iniciais: quanto menor a velocidade horizontal representada (por exemplo, 5 km/h), mais inclinada a parábola, maior o ângulo de rotação; quanto maior a velocidade (25 ou 75 km/h), mais achatada a curva, menor o giro.

A rotação passou a ser compreendida não apenas como uma resposta geométrica, mas como uma verdadeira medida da diferença entre referenciais. Essa ideia será retomada em profundidade no próximo item, quando descrevermos a peça central — o bi-toro — como operador conceitual e técnico.

4.3 O artefato e sua peça-chave: um bi-toro articulado

No centro do Bi-Toro Articulado está sua peça mais importante: o bi-toro — com iniciais minúsculas, para diferenciá-lo do sistema completo. Essa peça articulada é o verdadeiro operador da transformação entre trajetórias. É ela que, ao deslizar simultaneamente sobre a haste reta e sobre a parábola, realiza uma rotação contínua e ajustável, capaz de manter a correspondência ponto a ponto entre duas formas de movimento.

O bi-toro é composto por duas esferas ocas e furadas, conectadas por um eixo interno metálico. Visualmente simples, sua estrutura interna é sofisticada: uma esfera permanece solidária à orientação do movimento retilíneo (isto é, sem girar), enquanto a outra é livre para girar ao longo do percurso. Não há fixações rígidas nem articulações móveis aparentes. A rotação ocorre pela própria necessidade do percurso: como a parábola apresenta uma inclinação que varia ao longo de sua extensão, o corpo articulado precisa ajustar-se a essa variação — e o faz girando.

Essa rotação é progressiva, variável e contínua. A cada ponto da trajetória, o bi-toro realiza um pequeno giro, cuja tangente corresponde ao ângulo de inclinação da parábola naquele instante. Quando o movimento simulado representa uma velocidade baixa (como 5 km/h), a curvatura da parábola é mais acentuada, e o ângulo final de rotação se aproxima de 90°. Em velocidades maiores (como 25 ou 75 km/h), a curva é mais suave, e o giro total é menor — algo em torno de 60° ou 50°, respectivamente. Em todos os casos, observa-se um comportamento comum: a maior parte da rotação ocorre nos instantes iniciais, e o movimento desacelera progressivamente. A rotação, portanto, não é uniforme — ela tem estrutura, ritmo, métrica.

O que o bi-toro realiza, portanto, não é apenas uma conexão entre dois trilhos: ele produz a equivalência. Em vez de tratar a diferença entre referenciais como uma subtração algébrica (como faz a cinemática clássica), ele a resolve por torção. E essa torção é mensurável, visível, reproduzível. A peça traduz o conceito de transformação em gesto mecânico. A equivalência entre trajetórias deixa de ser uma abstração e passa a ser um giro no espaço.

A escolha do nome "bi-toro" expressa essa lógica. Em termos formais, ele remete a duas formas topológicas (toros) conectadas por um eixo — dois mundos que se mantêm autônomos, mas se interligam por rotação. Em termos funcionais, ele é o ponto onde o movimento se converte, se reorienta, se ajusta. A rotação que ele realiza é a própria operação que garante a equivalência entre o vertical e o curvo, entre o navio e o cais, entre a física e sua representação.

A partir do bi-toro, todo o sistema se organiza: a base de madeira, os trilhos de inox, os suportes de teflon, os desenhos técnicos, as fotografias e os vídeos. Mas é a peça articulada que "pensa". O bi-toro é o centro epistemológico e técnico do artefato — o ponto em que a teoria toca o real, e a transformação torna-se visível.

4.4 Projeto técnico do artefato Bi-Toro

A elaboração do projeto técnico do Bi-Toro seguiu os princípios tradicionais da representação volumétrica na engenharia e na arquitetura, com base no método clássico da épura. Esse método consiste na articulação entre três vistas principais — planta, vista lateral e corte frontal — que, combinadas, permitem descrever com clareza a forma, a estrutura e as proporções de qualquer objeto tridimensional. Embora não capturem todos os aspectos do volume, essas três vistas formam a base normativa da leitura técnica e foram utilizadas como eixo principal da documentação do Bi-Toro.

Além dessas vistas essenciais, o projeto foi complementado por uma série de desenhos adicionais: detalhes construtivos, perspectivas isométricas e esquemas de trajetória, todos elaborados inicialmente à mão — com lápis técnico sobre papel vegetal — e, posteriormente, digitalizados e refinados em softwares especializados como AutoCAD e modeladores 3D. Essa combinação entre métodos tradicionais e ferramentas digitais reflete o caráter híbrido do projeto, que é, ao mesmo tempo, artesanal e preciso, intuitivo e matemático.

A escolha por produzir poucos desenhos, porém densos, foi deliberada. Ao contrário de áreas como engenharia ou design industrial, onde os projetos técnicos são geralmente acompanhados por dezenas de pranchas detalhadas, esta dissertação insere-se no campo da epistemologia e da filosofia da ciência, em que o principal veículo de expressão é o texto. Os desenhos aqui apresentados não ocupam um lugar decorativo ou ilustrativo — são partes constitutivas do argumento. Cada traço comunica um conceito. Cada vista, uma relação.

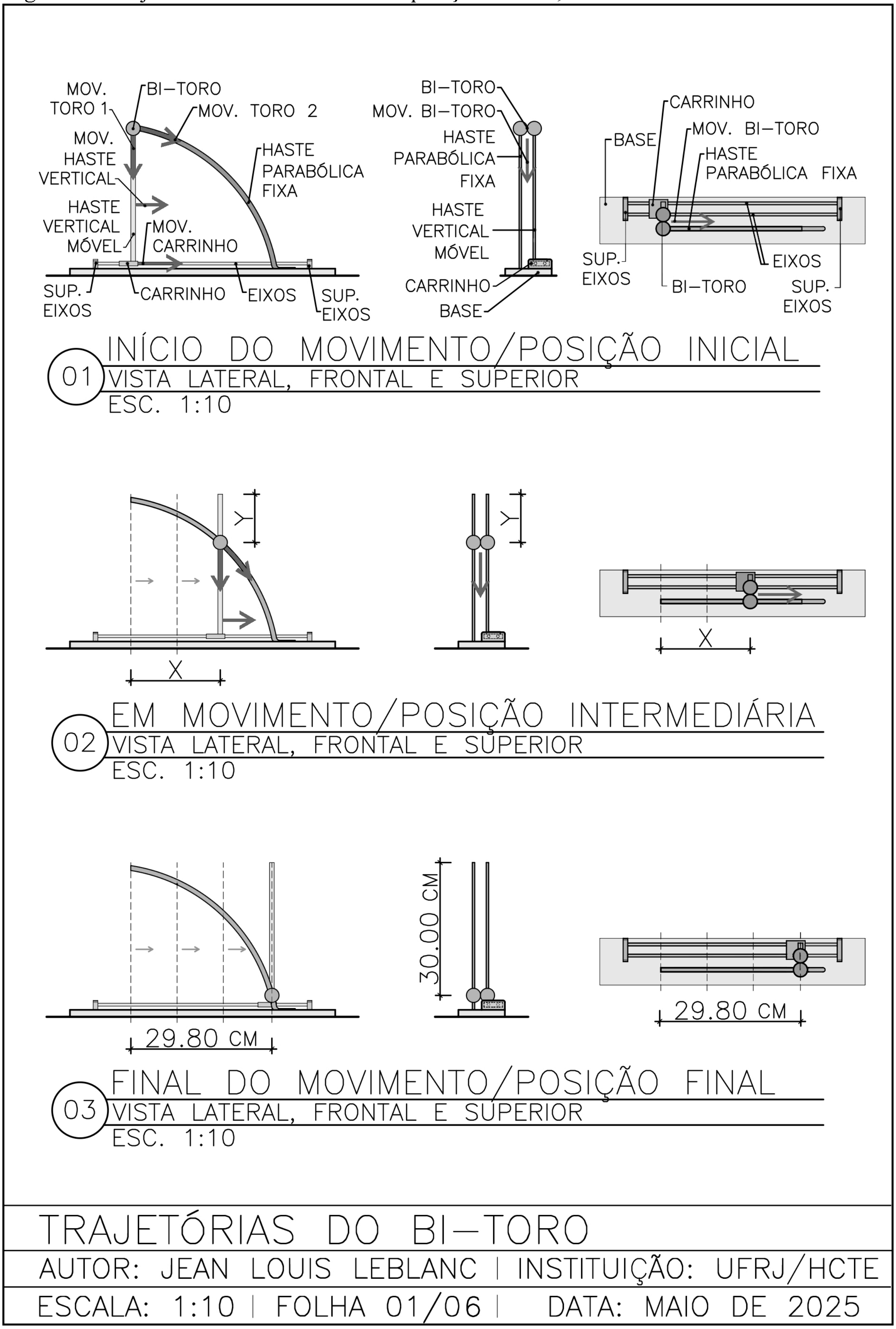
Os desenhos foram pensados para tornar inteligível, ao mesmo tempo, a forma física do artefato, sua lógica de funcionamento cinemático, e sua composição material. Através deles, é possível compreender:

- a organização espacial do sistema (planta e cortes),
- o encadeamento das trajetórias (reta e parábola),
- a articulação da peça central (bi-toro),
- e a maneira como o movimento se realiza simultaneamente nos dois referenciais.

Esses desenhos técnicos serão mobilizados, no item seguinte, para descrever o processo construtivo do artefato — desde a base em madeira até os materiais utilizados nas guias, trilhos, suportes e na peça articulada. Ao longo de todo esse processo, manteve-se uma atenção rigorosa à fidelidade entre o modelo experimental e os conceitos cinemáticos que o Bi-Toro procura expressar.

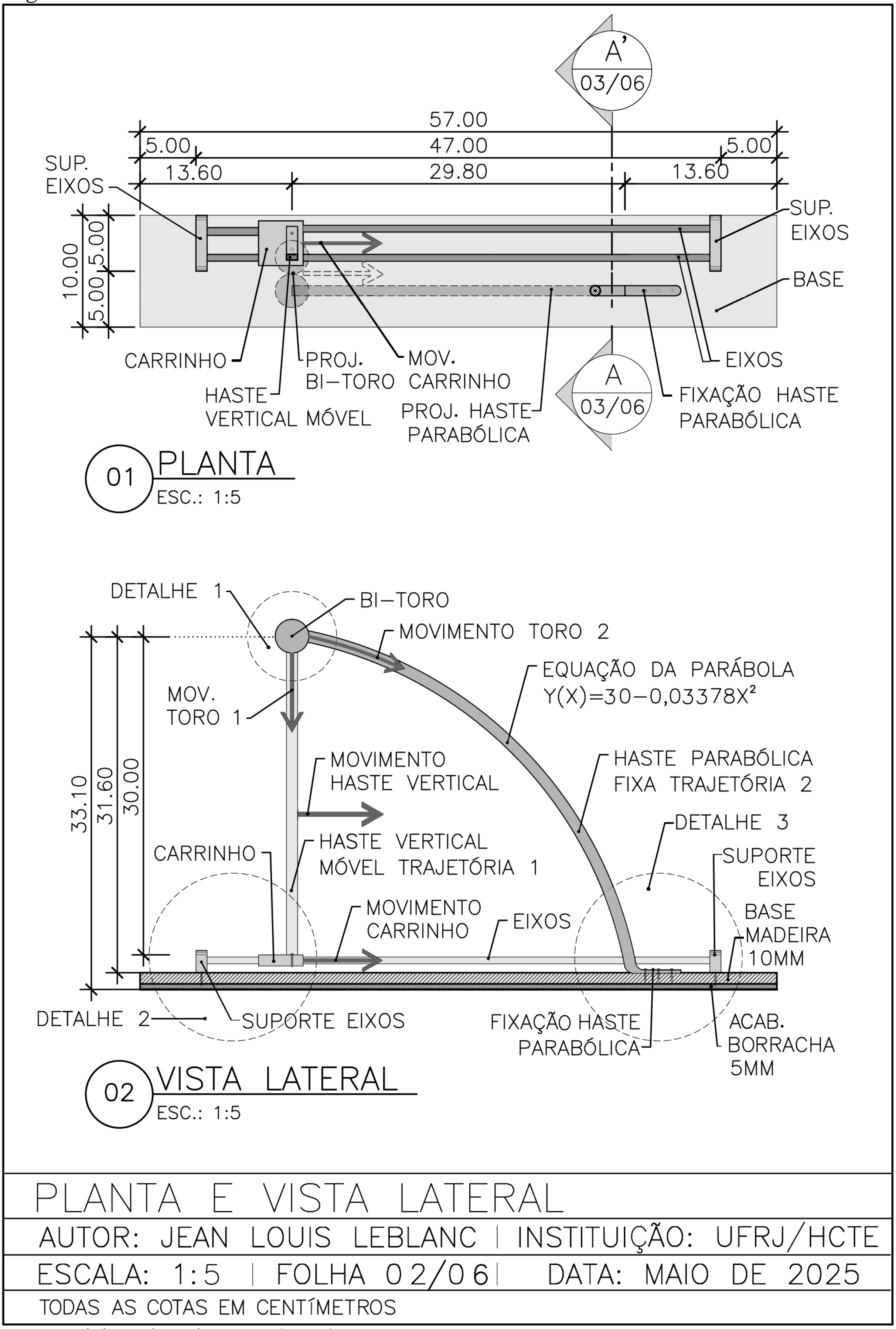
Projeto técnico

Figura 1 - Trajetórias do Bi-Toro em suas posições inicial, intermediária e final.



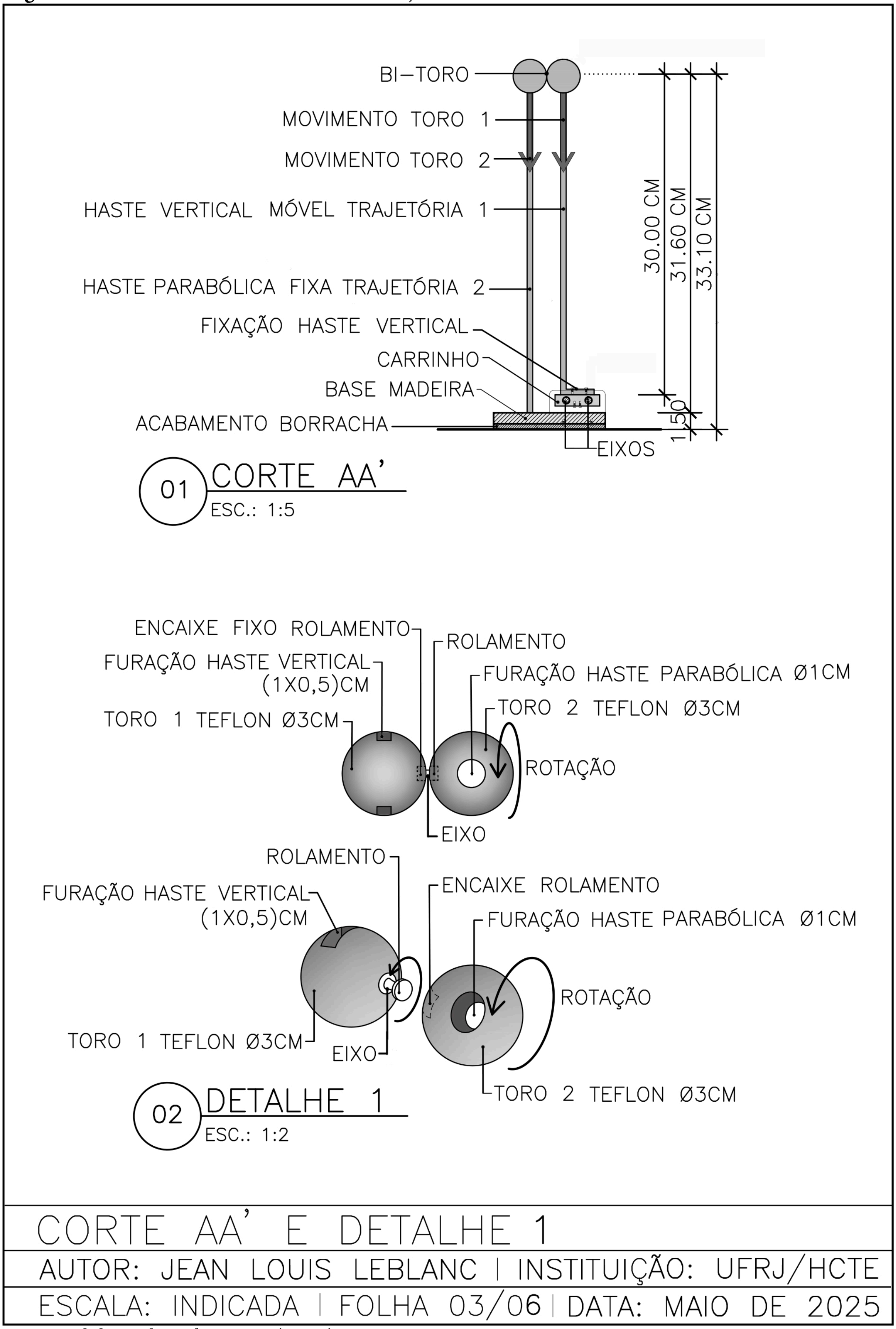
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Figura 2 - Planta e vista lateral do Bi-Toro.



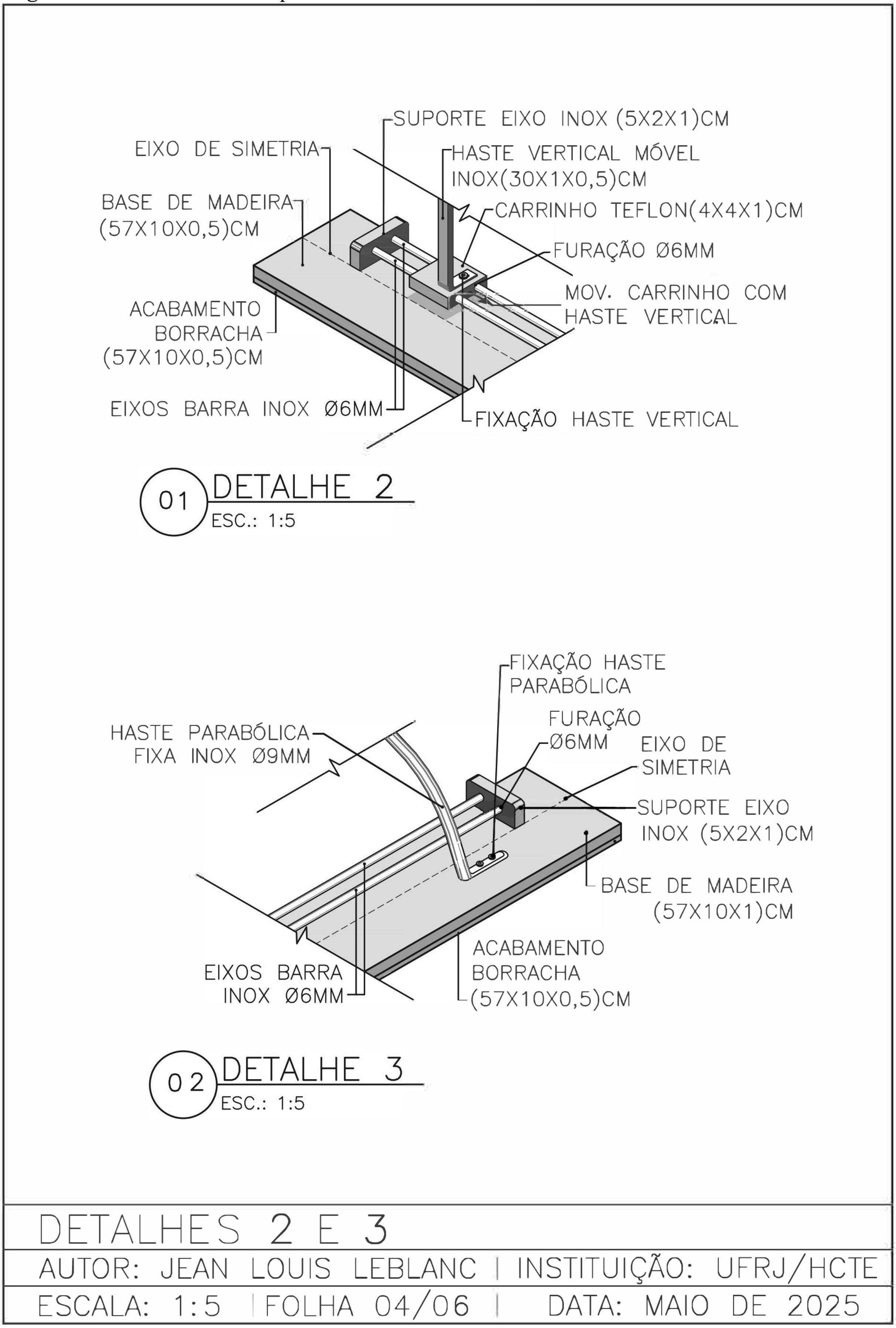
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Figura 3 - Corte AA' e detalhes da articulação do Bi-Toro.



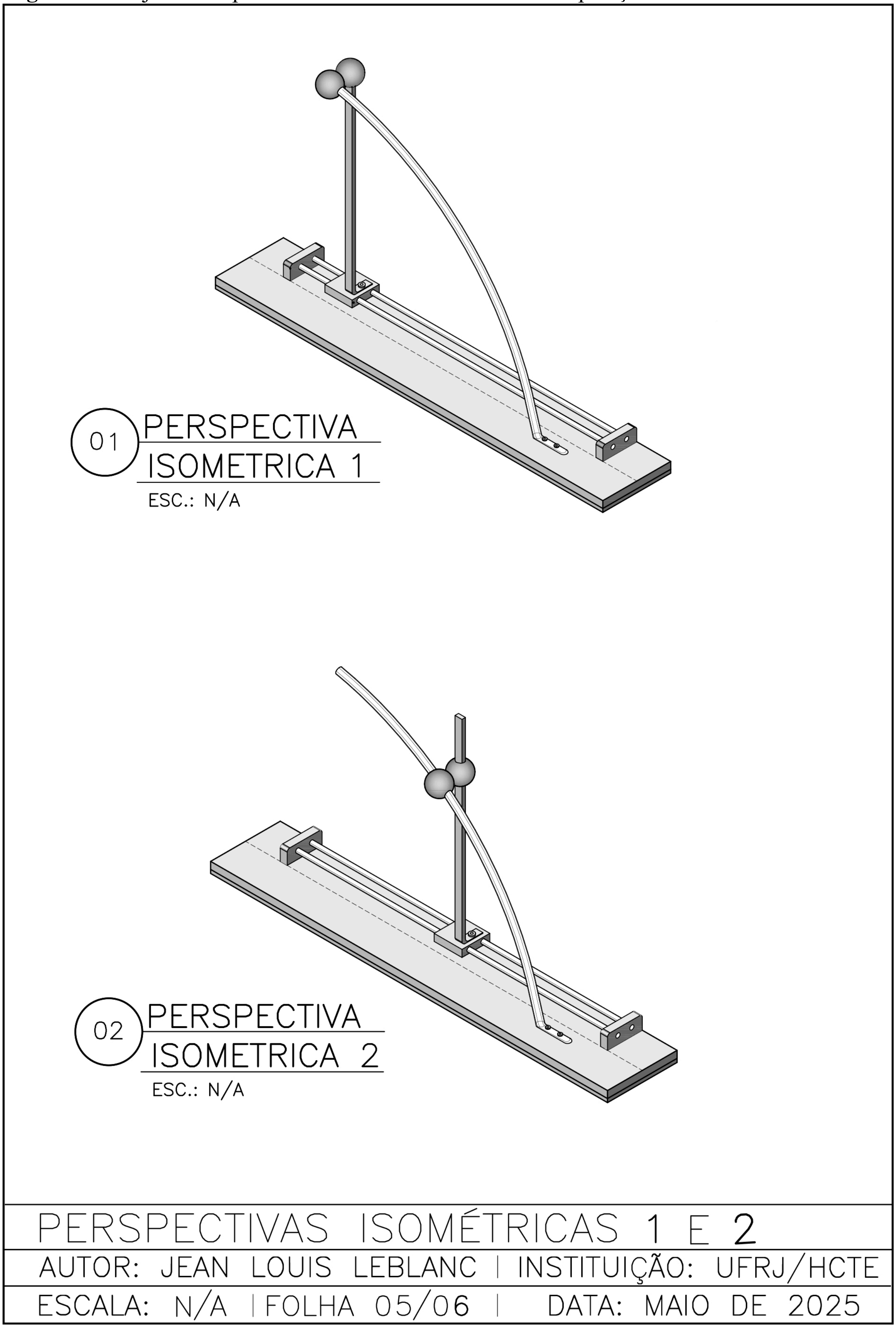
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Figura 4 - Detalhes dos componentes do Bi-Toro.



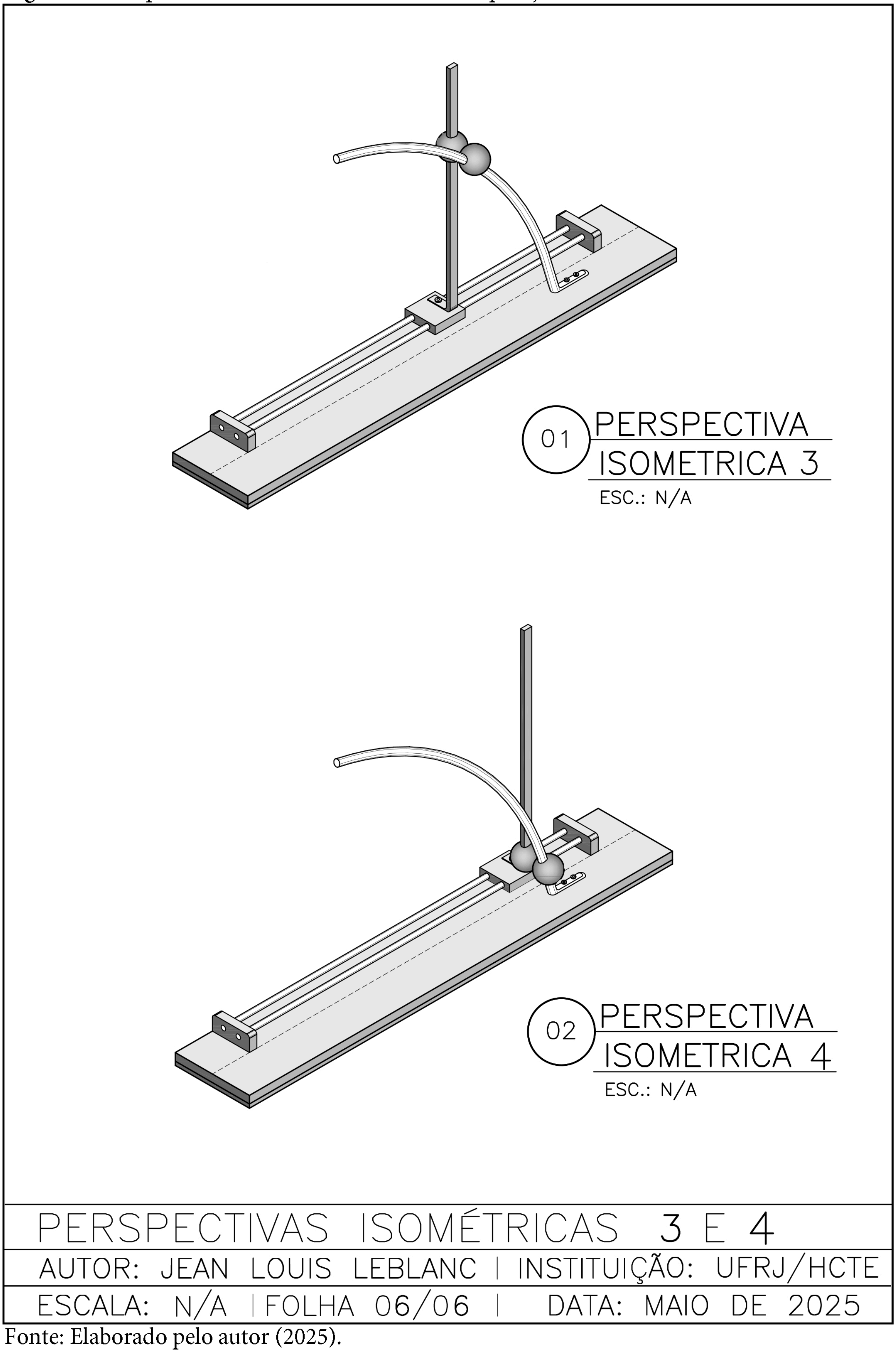
Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Figura 5 - Projeto: Perspectivas isométricas do Bi-Toro nas posições inicial e intermediária.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Figura 6 - Perspectivas isométricas do Bi-Toro nas posições intermediária e final.



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

4.5 Descrição, funcionamento e construção

O Bi-Toro Articulado foi construído como um artefato funcional, pensado para materializar uma operação conceitual precisa: a transformação entre dois referenciais inerciais distintos por meio da interseção cinemática de suas trajetórias. Essa construção exigiu uma abordagem multidisciplinar, unindo concepção mecânica, lógica cinemática, escolha de materiais, técnicas de usinagem, acabamento estético e, sobretudo, coerência epistemológica com os princípios que norteiam esta dissertação.

A base do artefato é feita de madeira maciça, com acabamento fosco, e possui simetria bilateral, permitindo a organização visual e funcional das duas guias principais. De um lado está instalada a haste retilínea móvel, que representa a trajetória vertical observada do navio; do outro, encontra-se a haste curva fixa, que representa a parábola descrita pelo observador no cais. Ambas as hastes são confeccionadas em aço inoxidável, selecionado pela sua resistência, rigidez e estabilidade geométrica.

A haste retilínea está conectada a um carrinho deslizante feito em teflon, material de baixo atrito, resistente ao desgaste e altamente preciso em deslocamentos lineares. Este carrinho percorre dois tubos cilíndricos paralelos de aço inox, que funcionam como trilhos. O movimento é puramente horizontal e manual, sem qualquer tipo de motorização: trata-se de uma ação mecânica direta, realizada pelo próprio operador. A decisão por um acionamento puramente manual foi deliberada, pois evita a 'caixa-preta' de um motor e mantém o pesquisador em contato direto e sensível com a transformação, garantindo que o Bi-Toro opere como uma extensão do gesto investigativo. Essa movimentação representa o deslocamento do navio e, portanto, do referencial móvel.

O bi-toro é posicionado de forma que suas duas extremidades encostem simultaneamente nas duas hastes — a reta e a parabólica — e as percorram conforme o carrinho se move. Uma das esferas acompanha integralmente o movimento retilíneo, enquanto a outra é deixada livre para girar, ajustando-se continuamente à curvatura da parábola. Essa assimetria funcional é essencial: é o que permite que a rotação aconteça naturalmente, em resposta à variação de ângulo entre as guias.

À medida que o sistema é acionado manualmente, o corpo articulado do bi-toro desliza simultaneamente sobre a guia retilínea e sobre a curva parabólica. Esse duplo deslizamento obriga a peça a executar uma rotação progressiva, em ângulo variável, cujo valor final depende diretamente da geometria da parábola — ou seja, da velocidade relativa entre os referenciais representados. Como resultado, temos uma equivalência efetiva entre os dois mundos cinemáticos, realizada por rotação e visível em tempo real.

Essa "mágica" do artefato — como foi chamada em muitas das demonstrações presenciais — reside no fato de que um único corpo percorre duas distâncias diferentes ao mesmo tempo: a reta vertical, mais curta, e a parábola, mais longa. E, no entanto, o corpo é uno. A chave está na rotação interna do bi-toro, que permite esse ajuste contínuo sem tração, sem desencaixe, sem folga. A peça central adapta-se ao terreno sobre o qual desliza, como se compreendesse a lógica que a governa.

A construção foi realizada em etapas sucessivas. Após os primeiros protótipos artesanais, e após os desenhos técnicos em papel manteiga e software, foram feitos diversos testes experimentais em oficina — com auxílio de um especialista em efeitos especiais para cinema. Esses testes incluíram ajustes de peso, atrito, encaixe, sincronia entre as guias e suavidade da rotação. O modelo final resultou da síntese entre os requisitos conceituais e a viabilidade mecânica.

A estética do artefato também foi cuidadosamente pensada. Procurou-se adotar uma paleta de cores neutras, com ênfase na exposição dos materiais aparentes, à maneira da arquitetura moderna. A madeira aparece como madeira, o aço como aço, e o teflon mantém sua coloração natural branca. Não há elementos pintados ou decorativos: o próprio contraste entre os materiais cumpre a função de diferenciar volumes e funções. O resultado é uma leitura clara, direta, funcional, que destaca o movimento e valoriza o essencial.

O resultado final é um objeto que não apenas funciona com precisão, mas também convida à contemplação. Ele desperta o olhar pela simplicidade com que resolve um problema complexo, e pela elegância com que realiza, em ato, uma transformação que geralmente é tratada por símbolos. O Bi-Toro Articulado é, assim, ao mesmo tempo, mecanismo físico, demonstração conceitual e obra de design experimental.

4.6 Catálogo fotográfico

As imagens que compõem este catálogo fotográfico foram realizadas pelo próprio autor, com o objetivo de registrar e comunicar de forma clara os aspectos formais, funcionais e cinemáticos do Bi-Toro Articulado. Embora este artefato seja essencialmente dinâmico — e, portanto, melhor compreendido por meio de vídeos —, as fotografias foram cuidadosamente planejadas para capturar momentos significativos de seu funcionamento e destacar suas principais características estruturais.

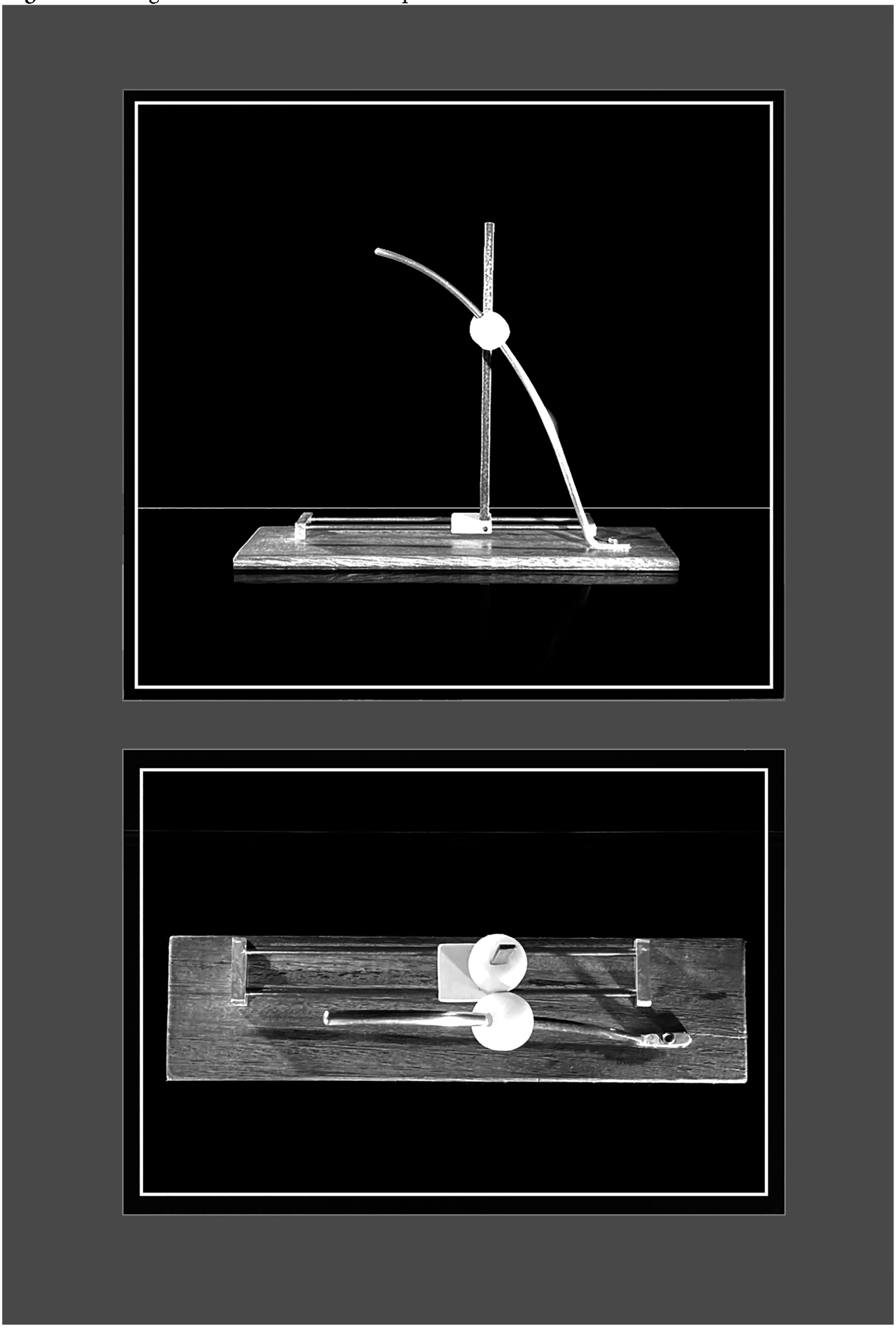
A produção fotográfica seguiu critérios técnicos rigorosos. As imagens foram captadas com uma câmera de celular de alta definição, com controle manual de foco, exposição e balanço de brancos. A iluminação foi cuidadosamente distribuída em três pontos: uma luz lateral principal, um contraluz para acentuar os contornos e uma luz frontal de compensação. O ambiente foi preparado com um fundo infinito preto e uma base laqueada preta, a fim de destacar o artefato sem ruídos visuais e ressaltar o contraste entre materiais e formas.

Após a captura, todas as imagens foram tratadas digitalmente no software Photoshop, com ajustes de brilho, contraste, nitidez, escala, corte e padronização de resolução. O objetivo foi manter a fidelidade ao objeto físico, mas ao mesmo tempo produzir imagens claras, legíveis e visualmente uniformes, que pudessem dialogar com o rigor exigido por um trabalho acadêmico. As fotos aqui apresentadas seguem a ordem de vistas e posições cinemáticas, acompanhadas por legendas descritivas.

As fotografias foram organizadas de modo a permitir que o leitor compreenda tanto a estrutura geral do artefato quanto os aspectos mais sutis de seu funcionamento. As vistas múltiplas, as posições sucessivas e os detalhes construtivos mostram o objeto como aquilo que ele é: uma ponte entre teoria e prática, uma máquina de pensamento, um operador de equivalência.

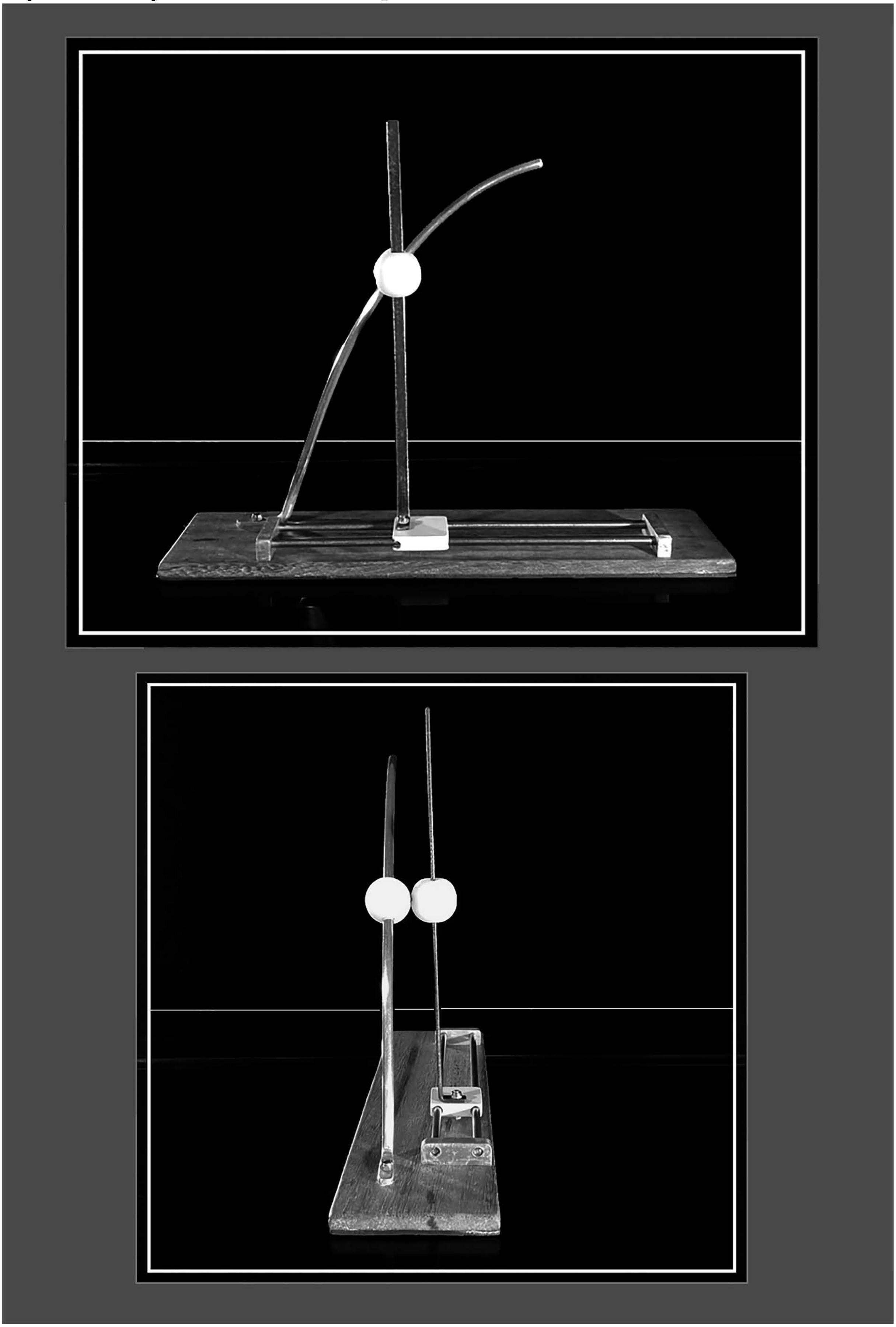
Catálogo fotográfico

Figura 7 - Fotografias: Vistas lateral 1 e superior do artefato Bi-Toro.



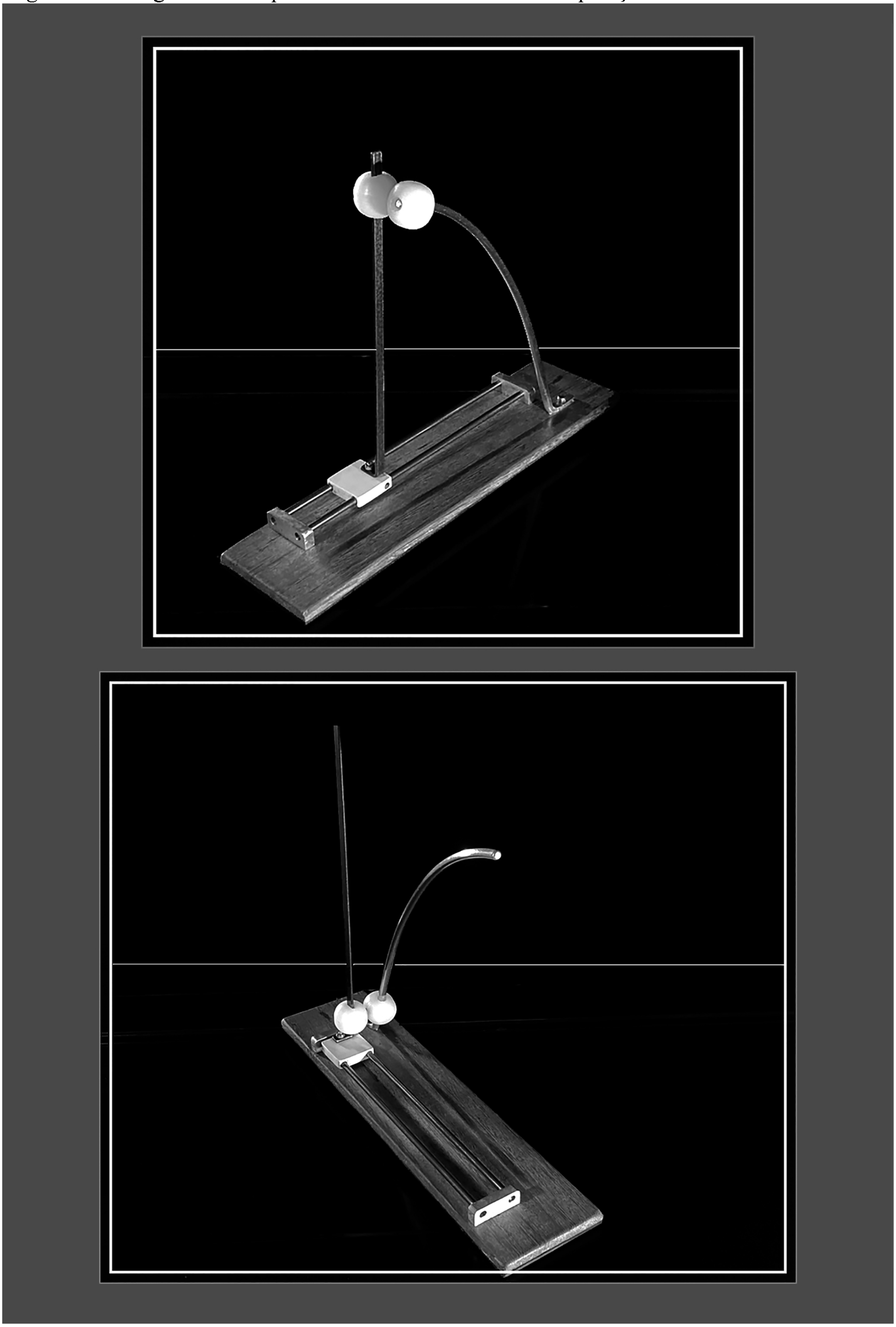
Fonte: Fotografias realizadas pelo autor (2025).

Figura 8 - Fotografias: Vistas lateral 2 e posterior do artefato Bi-Toro.



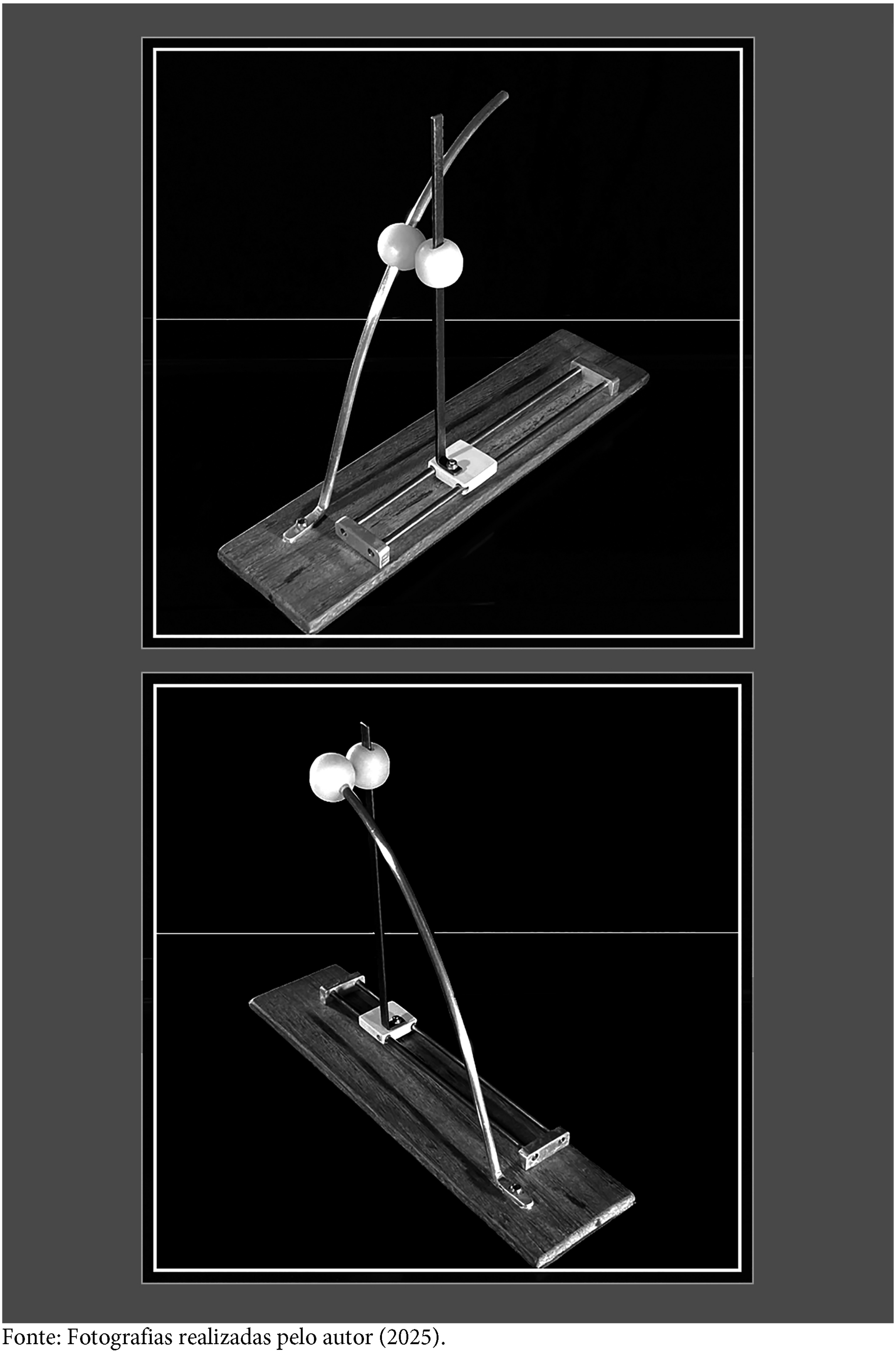
Fonte: Fotografias realizadas pelo autor (2025).

Figura 9 - Fotografias: Perspectivas do artefato Bi-Toro em posições inicial e final.



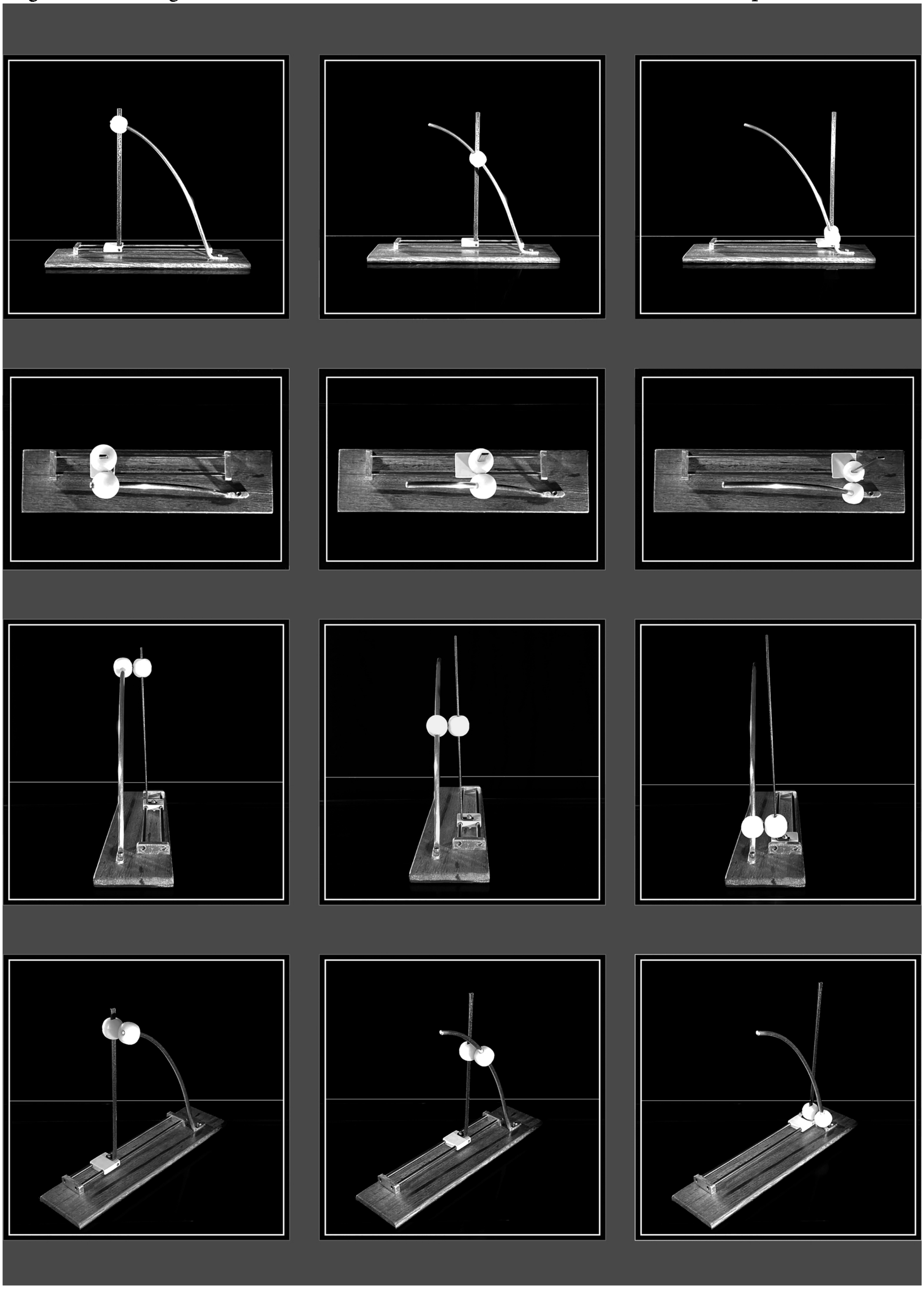
Fonte: Fotografias realizadas pelo autor (2025).

Figura 10 - Fotografias: Perspectivas do artefato Bi-Toro em posições intermediária e inicial.



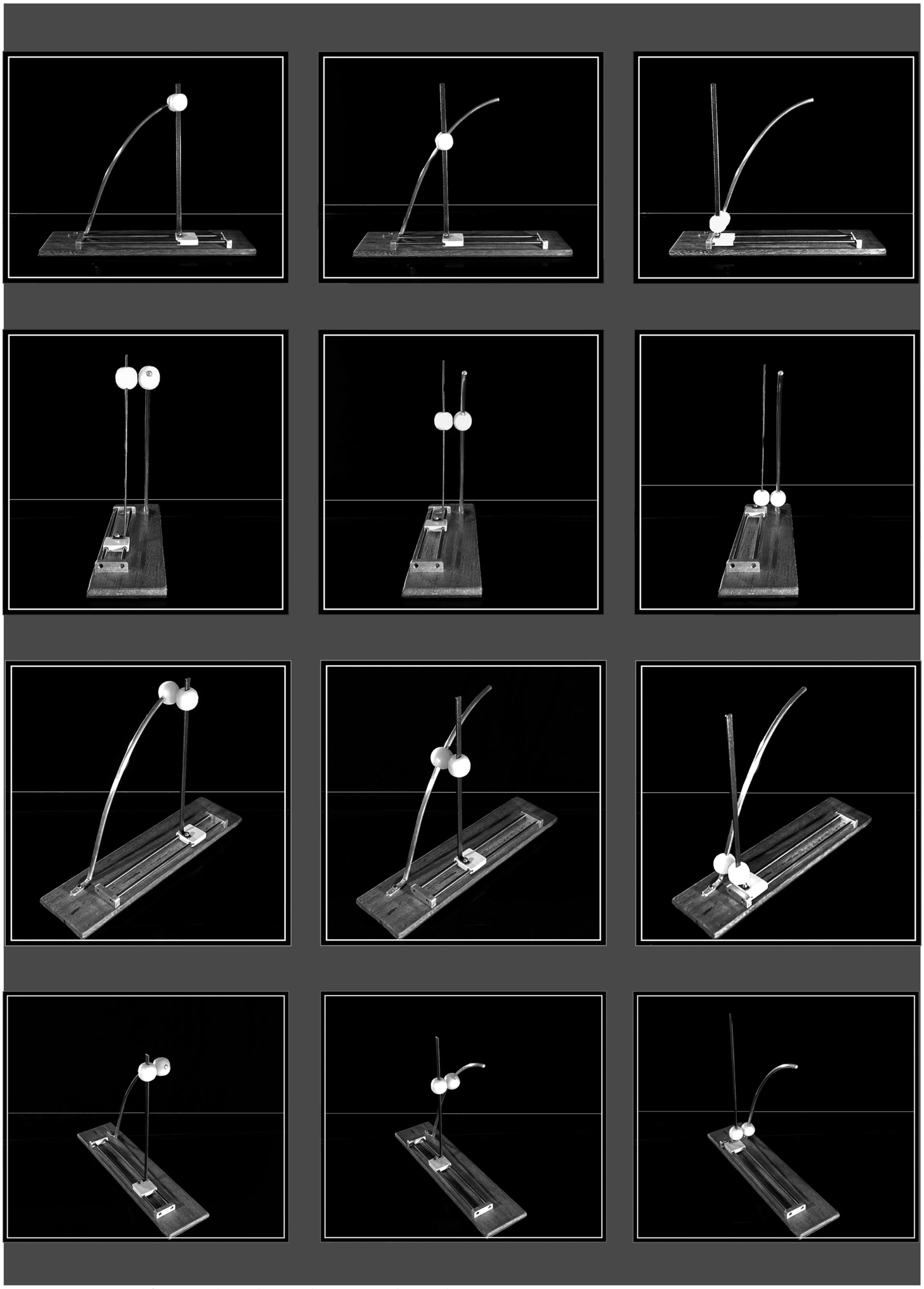
Fonte: Fotografias realizadas pelo autor (2025).

Figura 11 - Fotografias: Quadros do movimento do artefato Bi-Toro em 4 tipos de vistas, 1.



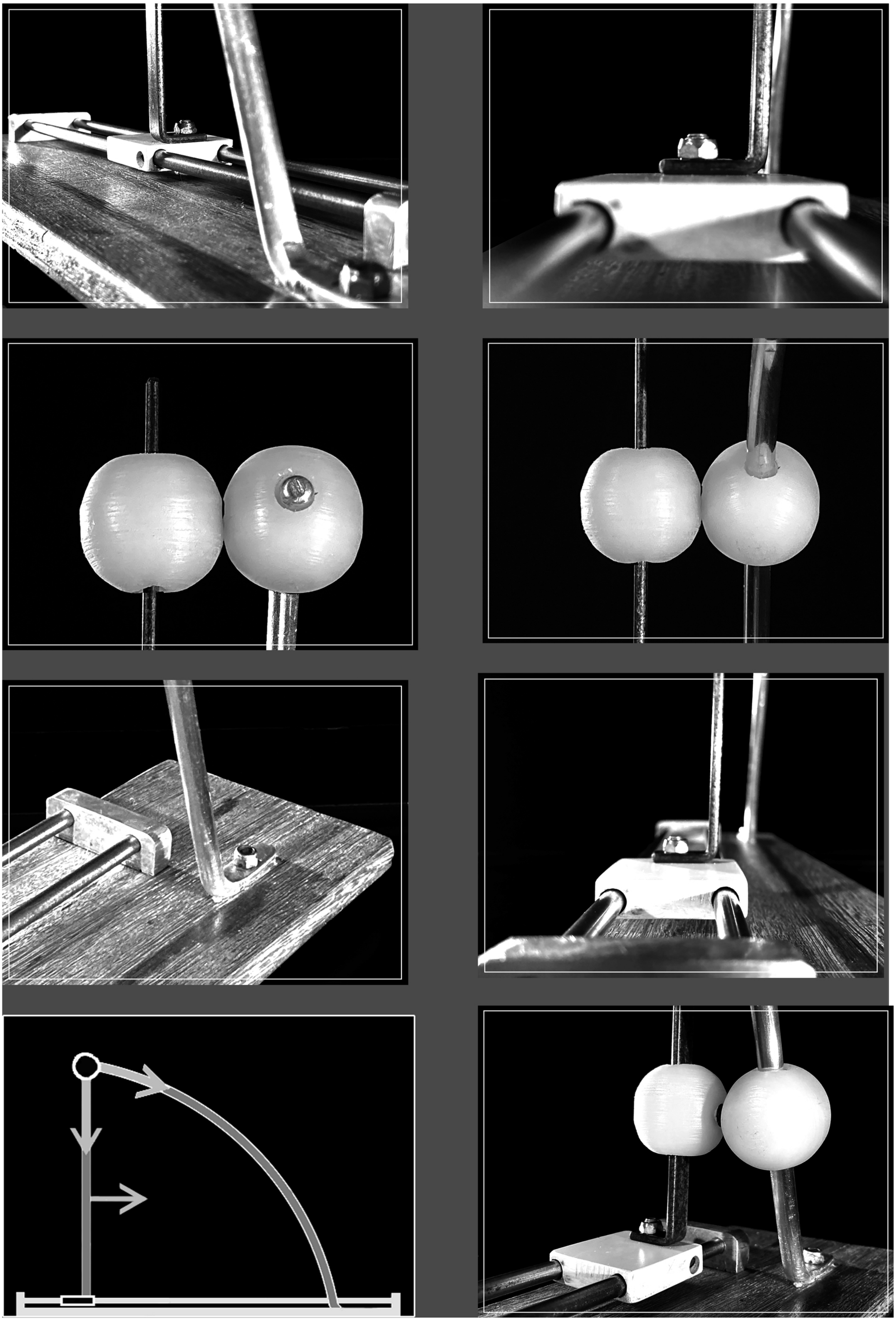
Fonte: Fotografias realizadas pelo autor (2025).

Figura 12 - Fotografias: Quadros do movimento do artefato Bi-Toro em 4 tipos de vistas, 2.



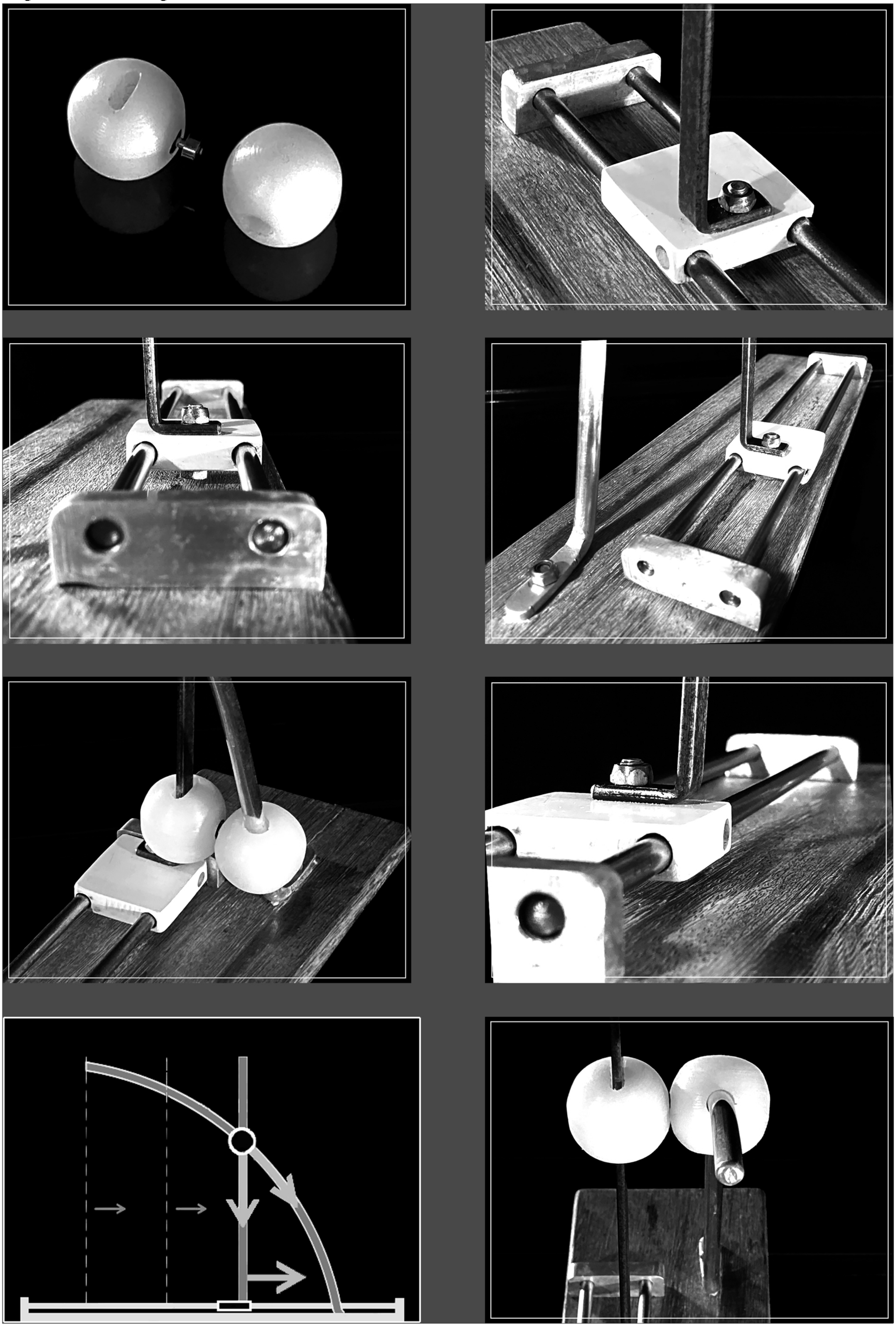
Fonte: Fotografias realizadas pelo autor (2025).

Figura 13 - Fotografias: Detalhes 1 do artefato Bi-Toro.



Fonte: Fotografias realizadas pelo autor (2025).

Figura 14 - Fotografias: Detalhes 2 do artefato Bi-Toro.



Fonte: Fotografias realizadas pelo autor (2025).

4.7 Catálogo de vídeos

Diferentemente das fotografias, que capturam o artefato em estados fixos, os vídeos aqui apresentados registram o movimento real do Bi-Toro Articulado. São registros fundamentais, pois permitem observar a rotação da peça bi-toro em tempo real, assim como a simultaneidade dos deslocamentos nos dois referenciais representados pelas hastes — a reta móvel (vertical) e a parábola fixa.

Os vídeos foram produzidos pelo próprio autor, com equipamentos simples e com um cuidado artesanal em todas as etapas: filmagem, iluminação, montagem e tratamento digital. O ambiente foi preparado com um fundo preto contínuo e uma base escura laqueada, que conferem neutralidade visual e destacam o artefato em movimento. Foram utilizadas fontes de luz indiretas e difusas para evitar sombras duras e reflexos indesejados, e a filmagem foi feita com o Bi-Toro estabilizado sobre um suporte discreto, que não interfere na visualização do gesto técnico.

As gravações passaram por um processo de edição e padronização, com cortes, enquadramentos, ajustes de brilho e contraste, sincronização de quadros e exportação em alta definição. Os vídeos foram tratados com o mesmo rigor atribuído ao texto e aos desenhos técnicos, e integram plenamente o conteúdo argumentativo da dissertação.

Cada vídeo foi publicado em uma plataforma de compartilhamento (YouTube) e está associado a um link digital e a um QR Code impresso ao lado de sua legenda. Isso permite ao leitor acessar os registros com rapidez, seja por dispositivos móveis ou por computador, e visualizar em tempo real aquilo que está sendo descrito no texto.

A inclusão dos vídeos diretamente no corpo da dissertação — e não apenas em apêndices — responde a uma opção metodológica: permitir que o leitor acesse, no momento da leitura, a demonstração física do fenômeno. Trata-se de uma estratégia interativa que reforça a natureza interdisciplinar deste trabalho e valoriza o objeto como centro epistemológico, técnico e visual.

Catálogo de vídeos

Acesso por QR Code ou link

Figura 15 - QR Code:
Vídeo do Bi-Toro em perspectiva 1.

Link: https://youtu.be/CjvJzGBoh_M

Figura 16 - QR Code:
Vídeo da vista lateral 1 do Bi-Toro.

Link: https://youtu.be/y06ISn_dKr4

Figura 17 - QR Code:
Vídeo da vista superior do Bi-Toro.

Link: https://youtu.be/U_oG5TaiEeU

Figura 18 - QR Code:
Vídeo da vista frontal do Bi-Toro.

Link: https://youtu.be/UKgOz7sC6Ic

Figura 19 - QR Code: Vídeo do detalhe 1 da rotação da peça bi-toro.

Link: https://youtu.be/qGRBWOiHIrg

Figura 20 - QR Code: Vídeo do detalhe 2 da rotação da peça bi-toro.

Link: https://youtu.be/vsKw_83Ny7U

Figura 21 - QR Code:
Vídeo do Bi-Toro em perspectiva 2.

Link: https://youtu.be/cwMByiyKqZY

Figura 22 - QR Code: Vídeo da vista lateral 2 do Bi-Toro.

Link: https://youtu.be/G1Y-e3PHuLs

Figura 23 - QR Code:
Vídeo do Bi-Toro em perspectiva 3.

Link: https://youtu.be/PF0aULiM620

4.8 Conclusão

A construção do Bi-Toro Articulado marca um ponto de inflexão neste trabalho: é o momento em que o pensamento se torna gesto, em que a ideia se transforma em objeto, e em que a equivalência entre referenciais inerciais deixa de ser um artifício teórico para tornar-se uma operação física e concreta. Ao longo deste capítulo, percorremos as etapas que levaram à criação do artefato — desde o primeiro experimento manual com hastes metálicas até a execução final, composta por desenhos técnicos, fotografias e vídeos que atestam sua coerência estrutural e funcional.

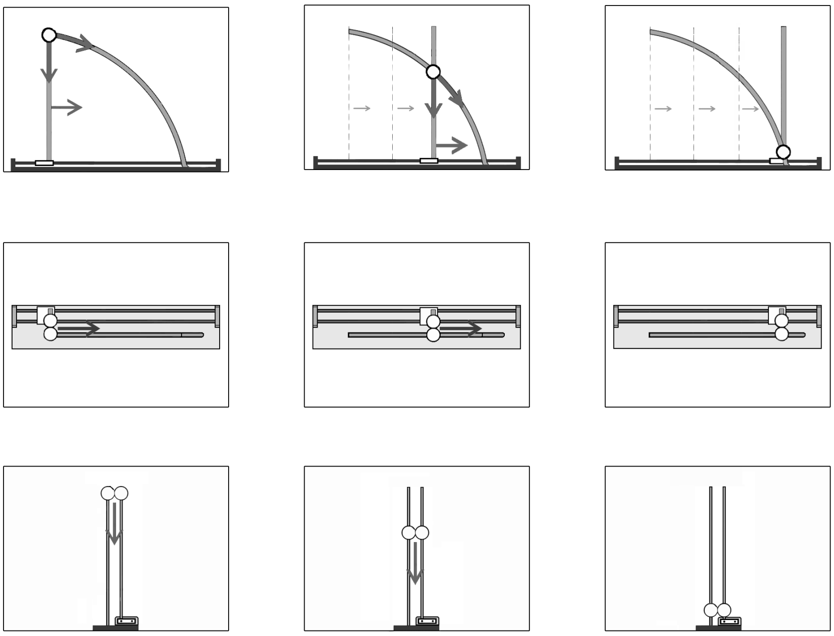
O elemento decisivo desse processo foi a identificação de uma exigência rotacional para realizar a transformação entre trajetórias. A peça chamada bi-toro, ao girar em resposta à curvatura da parábola, manifesta fisicamente a diferença entre os referenciais. Essa rotação, longe de ser um efeito colateral do sistema, é sua essência: ela é o operador da equivalência, a ponte cinemática entre mundos que, de outro modo, pareceriam inconciliáveis. A força do Bi-Toro reside precisamente nisso — em tornar visível e manipulável aquilo que, na tradição da mecânica, é geralmente expresso por fórmulas abstratas e coordenadas cartesianas.

A escolha por um objeto de construção simples e materiais acessíveis, mas dotado de alta densidade conceitual, responde a um princípio metodológico deste trabalho: mostrar que é possível pensar com as mãos, demonstrar com o corpo, compreender com os olhos. O Bi-Toro Articulado não é um modelo no sentido tradicional: ele não representa um fenômeno físico externo, mas encarna uma estrutura de transformação, tornando-a ativa, manipulável, observável. Ele é, portanto, ao mesmo tempo artefato, operador e demonstração.

Essa realização concreta abre caminho para uma nova abordagem da relatividade galileana: uma abordagem construtiva, que substitui a subtração vetorial por uma rotação contínua, e a abstração de sistemas de coordenadas por um gesto técnico incorporado. No próximo capítulo, essa rotação será investigada com maior profundidade física e matemática, por meio da análise dos ângulos de giro realizados pela peça, das trajetórias compostas e da interpretação dinâmica dos referenciais. O que neste capítulo foi construído, no próximo será quantificado e interpretado.

O Bi-Toro Articulado, portanto, não é o fim de uma trajetória. É o início de uma nova forma de pensar o movimento — uma forma que nasce da matéria, passa pelo gesto, e retorna ao pensamento transformado. Agora este de encontra pronto para ser interrogado, quantificado e formalizado, como veremos a seguir.

5 A física e a matemática nas transformações do Bi-Toro



SALVIATI: Admitis primeiramente como verdadeiro que a natureza tenha feito as juntas, as articulações e os ligamentos dos animais, para que eles se possam mover com muitos e diferentes movimentos; e eu nego esta proposição e digo que as articulações são feitas para que o animal possa mover uma ou mais de suas partes, ficando imóvel o resto, e afirmo que quanto às espécies e diferenças dos movimentos, aquelas são de uma só espécie, ou seja, todos circulares [...] a saber, que de um corpo sólido que se mova ficando uma de suas extremidades sem mudar de lugar, o movimento não pode ser senão circular: e posto que o animal, ao mover um dos seus membros, não o separa do outro que lhe é adjacente, portanto, tal movimento é necessariamente circular.

GALILEI, 2011, p. 338.

5.1 Introdução

A parte mais desafiadora desta dissertação — seu verdadeiro ponto de tensão conceitual — concentrou-se sempre neste capítulo. O maior obstáculo foi dar forma matemática e física ao movimento que anima meu artefato, o Bi-Toro articulado. Todo o restante do trabalho, por mais complexo que fosse, constituía um percurso viável: havia o que estudar, organizar, escrever, interpretar. Mas aqui, neste ponto preciso, residia uma incerteza radical: seria possível chegar a uma equação, a um modelo matemático, que de fato correspondesse ao gesto executado pelo artefato?

O objeto estava ali. Existia, funcionava, realizava concretamente as transformações entre referenciais inerciais. Sua movimentação era real, visível, precisa. Algo absolutamente inédito se apresentava diante de nós: não conhecíamos na literatura nenhum artefato físico que tivesse sido concebido com o objetivo de resolver, por construção mecânica, a transformação cinemática entre referenciais descrita por Galileu, Newton, Lagrange e tantos outros.

O Bi-Toro mostrava algo quase impossível: um corpo em queda livre, descrevendo simultaneamente duas trajetórias contraditórias — uma reta e uma parábola. Mas logo surgiu o impasse: as transformações galileanas clássicas — expressas apenas como subtrações algébricas entre coordenadas — não davam conta da realidade física observada no artefato. Faltava algo — e era precisamente esse algo que precisávamos encontrar, construir e demonstrar.

Vieram então dias e noites de insistência. Horas investidas em tentativas, simulações, hipóteses falhas, modelos imprecisos, equações que prometiam e falhavam. Mas a direção estava clara: as trajetórias estavam lá, como pistas deixadas no espaço, e apontavam para uma estrutura mais profunda, uma lógica intrínseca ao movimento.

Observando com atenção o funcionamento do Bi-Toro, ficou evidente que a relatividade entre os referenciais era realizada por uma rotação física entre dois corpos: uma das peças — o toro fixo — mantinha sua posição vertical; a outra — guiada pela parábola — era forçada a rotacionar. Havia uma transformação clara, contínua, geométrica. Mas onde estava a matemática capaz de expressar esse fenômeno visível? Onde estava a física que correspondesse ao gesto?

Este capítulo nasce desse enigma. Durante todo o processo, o artefato foi nosso companheiro mais fiel. Estava sempre à nossa frente: orientava, desafiava, impunha ritmos. Mesmo sem uma fórmula explícita, o Bi-Toro já realizava aquilo que a matemática ainda não era capaz de expressar. E foi apenas no final — após mais de vinte horas consecutivas de trabalho, a dois dias da entrega final à banca, numa noite em claro — que os dois modelos matemáticos emergiram: o **Rotovetorial-G**, baseado na variação angular em função da altura e associado ao campo gravitacional, e o **Rotovetorial-T**, definido a partir do deslocamento horizontal e da aceleração tangencial. Ambos descrevem, com precisão matemática e elegância conceitual, a transformação cinemática entre dois referenciais inerciais, tal como realizada fisicamente pelo Bi-Toro.

Descobrimos então que, mesmo que a rotação como operação já seja conhecida em áreas específicas — como a geometria diferencial, a teoria dos grupos ou a noção de *spin* na física quântica — ela jamais havia sido aplicada, até onde sabemos, dessa forma à cinemática clássica: como uma alternativa explícita às transformações galileanas. O que realizamos aqui é, portanto, inédito: substituir a subtração algébrica escalar por uma rotação vetorial progressiva, como nova forma de transformação entre referenciais inerciais.

Assim, abandonamos — ou ao menos ultrapassamos — a forma algébrica clássica de transformar sistemas de coordenadas, e propomos, em seu lugar, dois novos modelos rotacionais. Neles, a correspondência entre referenciais se realiza como uma bijeção ponto a ponto entre trajetórias, construída a partir de um campo vetorial plano, composto por vetores horizontais constantes e vetores verticais acelerados. A rotação progressiva de um vetor unitário nesse campo produz uma curva que se aproxima da parábola clássica — ou a substitui por completo, sob uma nova interpretação física, matemática e epistemológica.

5.2 – Apresentação dos modelos Rotovetoriais: G e T

Não é mais tempo de divagações. O que se impõe agora é a apresentação objetiva das soluções encontradas. Chegamos, após longo percurso, a dois modelos matemáticos distintos que descrevem a mesma realidade física: a trajetória de um corpo em queda livre observada a partir de dois referenciais inerciais sobrepostos. Cada modelo oferece uma estrutura de rotação progressiva, capaz de gerar, ponto a ponto, a curva parabólica — ou sua substituta.

Chamamos esses modelos de **Rotovetorial-G** e **Rotovetorial-T**, em referência às variáveis que organizam a rotação em cada caso: a altura (G, de gravidade) no primeiro, e o deslocamento horizontal (T, de tangencial) no segundo. Em ambos, propomos uma transformação entre referenciais inerciais não mais baseada na subtração escalar entre coordenadas, como nas transformações galileanas, mas na rotação progressiva de um vetor unitário ao longo de um campo vetorial plano, composto por vetores horizontais constantes e vetores verticais acelerados.

Cada ponto do plano é dotado de dois vetores atuantes:

Vetor horizontal constante (velocidade relativa):

$$\vec{v}_h = \begin{bmatrix} v_0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vetor vertical variável (aceleração gravitacional):

$$\vec{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \cdot t \end{bmatrix}$$

Composição vetorial resultante:

$$\vec{v}_{\text{res}}(t) = \vec{v}_h + \vec{v}_g = \begin{bmatrix} v \\ -g \cdot t \end{bmatrix}$$

Sobre essa orientação vetorial resultante, aplica-se uma rotação progressiva definida ponto a ponto, gerando a trajetória final da curva. Essa operação constitui o núcleo dos dois modelos desenvolvidos: o Rotovetorial-G e o Rotovetorial-T.

- **Modelo Rotovetorial-G** (gravidade como variável angular)

Neste modelo, o ângulo de rotação cresce proporcionalmente à altura vertical $y(s)$, refletindo a influência do campo gravitacional. A constante k depende das condições iniciais do sistema e é dada por:

$$k = 0{,}2081 \cdot g + 0{,}0417 \cdot v + 0{,}0049 \cdot h + 0{,}7036$$

As equações do modelo são:

- Fator de curvatura:

$$k = \frac{v^2}{g}$$

- Derivada angular:

$$\theta'(s) = -\, k \cdot y(s)$$

- Ângulo acumulado:

$$\theta(s) = -\int_0^s k \cdot y(u)\, du$$

- Vetor tangente unitário:

$$\vec{v}(s) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(s)) \\ \sin(\theta(s)) \end{bmatrix}$$

- Trajetória rotacional parametrizada:

$$\vec{r}(s) = \int_0^s \vec{v}(u)\, du = \int_0^s \begin{bmatrix} \cos(\theta(u)) \\ \sin(\theta(u)) \end{bmatrix} du$$

<u>**Equação Geral da Transformação Rotacional entre Referenciais**</u>

A equação abaixo expressa, de forma sintética e poderosa, a transformação cinemática entre dois referenciais inerciais realizada por rotação progressiva. Ela define a trajetória de um corpo que se move orientado por um vetor unitário, cujo ângulo varia ao longo do percurso em função da estrutura vetorial do campo.

$$\vec{r}(s) = \int_0^s \begin{bmatrix} \cos(\theta(u)) \\ \sin(\theta(u)) \end{bmatrix} du$$

Nessa estrutura, as variáveis g, v, h estão implicitamente presentes na trajetória por meio do fator$k$, que regula a taxa de rotação.

- **Modelo Rotovetorial-T** (aceleração tangencial como variável angular)

Neste segundo modelo, o ângulo varia de acordo com a posição horizontal $x(s)$, refletindo o crescimento da inclinação à medida que o corpo avança. A constante k, ajustada empiricamente, depende igualmente das condições iniciais:

$$k = 0{,}2034 \cdot g + 0{,}0419 \cdot v + 0{,}0050 \cdot h + 0{,}6892 \text{ (Fator de curvatura)}$$

Derivada angular:

$$\theta'(s) = -k \cdot x(s)$$

Ângulo acumulado:

$$\theta(s) = -\int_0^s k \cdot x(u)\, du$$

Vetor tangente unitário:

$$\vec{v}(s) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(s)) \\ \sin(\theta(s)) \end{bmatrix}$$

Trajetória rotacional parametrizada:

$$\vec{r}(s) = \int_0^s \vec{v}(u)\, du = \int_0^s \begin{bmatrix} \cos(\theta(u)) \\ \sin(\theta(u)) \end{bmatrix} du$$

A inserção da raiz quadrada de $x(s)$ no núcleo da equação garante uma curvatura mais compatível com a assimetria da parábola. O modelo Rotovetorial-T foi validado numericamente com erro máximo inferior a um milionésimo de unidade, o que o qualifica como uma representação extremamente precisa e, ao mesmo tempo, original.

Equação Geral da Transformação Rotacional entre Referenciais

$$\vec{r}(s) = \int_0^s \begin{bmatrix} \cos(\theta(u)) \\ \sin(\theta(u)) \end{bmatrix} du$$

A equação acima expressa, de forma unificada, a transformação cinemática entre dois referenciais inerciais por meio de rotação progressiva. Embora os modelos Rotovetorial-G e Rotovetorial-T adotem variáveis distintas — a altura y e a posição horizontal x, respectivamente —, ambos compartilham a mesma estrutura formal, pois derivam da mesma equação diferencial fundamental: a variação contínua do ângulo de orientação $\theta(s)$ proporcional à distância percorrida. Essa identidade estrutural decorre do fato de que a rotação é sempre parametrizada por uma função do comprimento de arco, e a escolha entre x ou y como variável independente representa apenas uma reinterpretação do mesmo mecanismo rotacional em campos vetoriais distintos. Assim, a equação geral é única, e sua aplicação depende apenas da forma como o campo vetorial foi definido.

Ambos os modelos têm como base a rotação incremental de um vetor de direção. A diferença entre eles reside na variável angular utilizada: a altura $y(s)$ no modelo G, e a posição horizontal $x(s)$, tratada com raiz quadrada, no modelo T. Esta distinção confere ao conjunto uma riqueza interpretativa e permite abordar a transformação cinemática por duas vias complementares e rigorosas.

Esse conjunto de equações representa, até onde sabemos, uma inovação inédita no campo da física clássica. Embora a operação de rotação progressiva de vetores seja bem conhecida em outras áreas — como na geometria diferencial, na física quântica ou na teoria dos grupos — sua aplicação direta à cinemática clássica como forma de transformar referenciais inerciais não tem precedentes. O que os modelos Rotovetoriais-G e T propõem é substituir a subtração escalar tradicional das transformações galileanas por uma operação rotacional contínua em campo vetorial plano, com precisão física e fundamento matemático. Trata-se, portanto, de uma nova maneira de pensar a transformação entre referenciais, com potencial para enriquecer a própria estrutura da física clássica — e quiçá expandir-se, no futuro, para outras formulações da física moderna.

5.3 Comparação com a equação algébrica da parábola

Chegamos agora a um ponto crucial: a comparação entre os modelos rotacionais propostos e a equação algébrica clássica da parábola. Esta equação — amplamente conhecida — é normalmente expressa como:

$$y = ax^2 + bx + c$$

Sua forma canônica representa a trajetória de um corpo submetido a uma aceleração constante (como a gravidade) no plano vertical, a partir de um referencial fixo. A equação é eficaz e amplamente utilizada, mas não explicita o processo de transformação entre referenciais. Ela descreve a curva resultante, mas não a gênese dinâmica da curva a partir de um campo vetorial.

Nos modelos aqui propostos, a trajetória emerge não de uma função algébrica direta entre x e y, mas de uma operação rotacional aplicada progressivamente a um vetor de direção, ao longo de um parâmetro s, no interior de um campo vetorial composto. Em vez de uma função $y(x)$, temos uma curva parametrizada por rotação. A equação geral que formaliza essa transformação é:

- Forma compacta da equação rotacional:

$$\vec{r}(s) = \int_0^s \begin{bmatrix} \cos(\theta(u)) \\ \sin(\theta(u)) \end{bmatrix} du$$

- Forma completa (com derivada angular e integração):

$$\theta(s) = -\int_0^s k \cdot f(u)\, du$$

$$\vec{r}(s) = \int_0^s \begin{bmatrix} \cos(\theta(u)) \\ \sin(\theta(u)) \end{bmatrix} du$$

Nesta forma mais geral, a função $f(u)$ representa a variável de controle do modelo — sendo $y(u)$ no modelo Rotovetorial-G e $\sqrt{x(u)}$ no modelo Rotovetorial-T. O fator k é calculado em função das grandezas físicas envolvidas, como a gravidade g, a velocidade v e a altura h.

Ao compararmos os modelos rotacionais com as transformações galileanas clássicas, a mudança de paradigma se acentua. As transformações galileanas, formalizadas por Lagrange, assumem a forma:

$$x' = x - vt \quad ; \quad y' = y \quad ; \quad t' = t$$

Essas expressões, embora eficazes, não descrevem o modo físico pelo qual a transformação entre referenciais ocorre. Limitam-se a reposicionar o ponto de vista, sem construir o processo da transformação.

Já os modelos rotacionais descrevem o processo: em vez de subtrair coordenadas, eles rotacionam vetores. O resultado não é apenas uma nova posição, mas uma trajetória construída passo a passo — fiel à física do movimento e à geometria dos referenciais.

Propomos, portanto, não apenas uma nova forma de representar a parábola, mas uma nova forma de compreender a transformação cinemática. A curva resultante não é imposta por uma equação, mas gerada por uma estrutura vetorial rotacional — e essa diferença altera profundamente a forma de interpretar o fenômeno físico.

5.4 Explicação detalhada dos modelos

Este item assume um papel pedagógico: trata-se de explicitar cada etapa, constante e variável dos modelos rotacionais propostos, oferecendo uma leitura detalhada de suas equações e um esclarecimento conceitual acessível a leitores de diferentes níveis de familiaridade com a linguagem matemática. O objetivo é tornar compreensível a estrutura interna das fórmulas e o papel desempenhado por cada termo na construção da trajetória rotacional.

- **Modelo Rotovetorial-G (gravidade)**

Começamos pelo modelo Rotovetorial-G, que utiliza a altura y como variável de integração e base para a rotação.

- Fator de curvatura:

$$k = \frac{v^2}{g}$$

A constante k representa o grau de curvatura induzido pela gravidade. Ela é diretamente proporcional à aceleração gravitacional g, e inversamente proporcional ao quadrado da velocidade horizontal v. Ou seja, quanto maior a gravidade, mais acentuada será a curvatura da trajetória; quanto maior a velocidade, mais "reta" ela tende a ser.

- Derivada angular:

$$\theta'(s) = -k \cdot y(s)$$

Indica que o ângulo varia em função da altura percorrida. A rotação é negativa, o que significa uma curvatura voltada para baixo.

- Integração do ângulo:

$$\theta(s) = -\int_0^s k \cdot y(u)\, du$$

Aqui obtemos o ângulo total acumulado até o ponto s da trajetória. A integração representa o acúmulo progressivo da rotação.

- Vetor tangente unitário:

$$\vec{v}(s) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(s)) \\ \sin(\theta(s)) \end{bmatrix}$$

Define a direção da curva ponto a ponto. É um vetor unitário rotacionado pelo ângulo $\theta(s)$.

- Trajetória rotacional parametrizada:

$$\vec{r}(s) = \int_0^s \vec{v}(u)\, du = \int_0^s \begin{bmatrix} \cos(\theta(u)) \\ \sin(\theta(u)) \end{bmatrix} du$$

A curva final é obtida pela integração do vetor direcional rotacionado. O resultado é uma trajetória contínua que corresponde, com altíssima precisão, à parábola clássica da física.

Além dessas equações, o modelo G pode ser apresentado de forma mais simples e ilustrativa:

$$\theta(y) = k \cdot y$$

$$\vec{u}_\theta = (\cos(\theta(y)), \sin(\theta(y)))$$

$$x(y) = \int_0^y \cos(k \cdot s)\, ds. \quad \text{e} \quad y(y) = \int_0^y \sin(k \cdot s)\, ds$$

Essas formas alternativas são úteis em contextos introdutórios, pois facilitam a visualização do processo.

- **Modelo Rotovetorial-T (tangencial)**

Já o modelo Rotovetorial-T adota a posição horizontal x como parâmetro de rotação e inclui a raiz quadrada de $x(s)$ para adaptar a curvatura ao formato assimétrico da parábola.

- Fator de curvatura ajustado numericamente:

$$k = 0{,}2034 \cdot g + 0{,}0419 \cdot v + 0{,}0050 \cdot h + 0{,}6892$$

Essa equação combina os fatores físicos determinantes da trajetória: a gravidade g, a velocidade v, e a altura h, ajustados por coeficientes empíricos extraídos de testes numéricos com o artefato.

- Derivada angular:

$$\theta'(s) = -\, k \cdot \sqrt{x(s)}$$

A raiz quadrada de $x(s)$ suaviza a variação angular e fornece uma curvatura mais fiel à parábola real.

- Ângulo total:

$$\theta(s) = -\int_0^s k \cdot \sqrt{x(u)}\, du$$

Representa o acúmulo da rotação ao longo do percurso horizontal.

- Vetor tangente unitário:

$$\vec{v}(s) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(s)) \\ \sin(\theta(s)) \end{bmatrix}$$

- Trajetória rotacional parametrizada:

$$\vec{r}(s) = \int_0^s \vec{v}(u)\, du = \int_0^s \begin{bmatrix} \cos(\theta(u)) \\ \sin(\theta(u)) \end{bmatrix} du$$

Uma forma alternativa simplificada da equação angular, útil para exposição didática, pode ser:

$$\theta(x) = \int_0^x s \cdot (a_1 g + a_2 v + a_3 h + a_4)\, ds$$

Com a curva definida por:

$$\vec{u}_\theta = \big(\cos(\theta(x)),\ \sin(\theta(x))\big)$$

$$x(x) = \int_0^x \cos(\theta(s))\, ds \quad \text{e} \quad y(x) = \int_0^x \sin(\theta(s))\, \mathrm{d}s$$

Essas diferentes formas de apresentar os modelos não são redundantes: cada uma cumpre uma função. As versões completas permitem cálculos de alta precisão; as versões simplificadas auxiliam na compreensão geométrica e na introdução conceitual. Em todas elas, o papel de cada variável e de cada constante é claro: construir, por rotação progressiva, uma trajetória que representa o movimento relativo de um corpo entre dois referenciais inerciais.

5.5 Caminhos da modelagem: tentativas, erros e descobertas

O percurso de construção dos modelos rotacionais foi marcado por um processo iterativo de tentativas, erros e descobertas conceituais. Partimos da hipótese central de que a trajetória parabólica poderia ser gerada não apenas por uma função algébrica, mas por uma rotação progressiva aplicada a um campo vetorial. Essa ideia fundadora orientou toda a modelagem.

A primeira tentativa consistiu em adotar uma função linear para a variação angular:

$$\theta(s) = -\,k \cdot s$$

Essa proposta gerava uma hélice circular uniforme, não compatível com a assimetria da parábola. A curva obtida apresentava uma simetria espiral inapropriada, indicando que a variação do ângulo deveria depender da posição no espaço, e não apenas do comprimento s.

Tentou-se, então, uma função angular dependente de $y(s)$, com derivada angular proporcional à altura:

$$\theta'(s) = -k \cdot y(s)$$

Essa escolha melhorou a curvatura, aproximando-se da parábola clássica. No entanto, os testes com o artefato revelaram distorções na parte inicial da curva, indicando uma inclinação exagerada.

A verdadeira virada ocorreu com a introdução da **raiz quadrada** como modulação da rotação. No modelo T, adotamos:

$$\theta'(s) = -k \cdot \sqrt{x(s)}$$

Essa função se mostrou especialmente eficaz na suavização da curvatura inicial e na reprodução do comportamento assimétrico da parábola física. O ajuste numérico da constante k foi fundamental:

$$k = 0{,}2034 \cdot g + 0{,}0419 \cdot v + 0{,}0050 \cdot h + 0{,}6892$$

Testes numéricos indicaram um erro inferior a 10^{-6}, validando a precisão do modelo. Durante o processo, equações foram descartadas por falharem em capturar o comportamento direcional correto da trajetória. Uma das formas testadas foi a parametrização circular com rotação uniforme, que descrevia uma espiral que se afastava indefinidamente da parábola esperada:

$$\vec{r}(s) = \int_0^s \begin{bmatrix} \cos(k \cdot s) \\ \sin(k \cdot s) \end{bmatrix} ds$$

Essa equação, apesar de gerar uma curva contínua, não apresentava a curvatura decrescente característica da parábola. Esse erro reforçou a necessidade de um fator de rotação que variasse de forma não linear ao longo do espaço.

A adoção da função $\sqrt{x}$ como base da rotação no modelo Rotovetorial-T foi uma das viradas conceituais mais significativas do percurso. A raiz quadrada gera curvas suaves, assimétricas e progressivamente desaceleradas, cuja forma se aproxima com grande precisão da parábola física. Além disso, ela possui afinidade conceitual com os números irracionais e transcendentes, pois sua curva se comporta como uma assíntota: tende ao limite sem jamais alcançá-lo. Essa propriedade análoga à continuidade infinita tornou-se um símbolo matemático apropriado para expressar uma rotação que se acumula com regularidade. Testes numéricos comprovaram sua eficácia, com erros de aproximação inferiores a uma parte por milhão.

A convergência final dos dois modelos (G e T) para uma mesma equação geral de trajetória confirma a robustez da abordagem rotacional:

$$\vec{r}(s) = \int_0^s \begin{bmatrix} \cos(\theta(u)) \\ \sin(\theta(u)) \end{bmatrix} du$$

Com $\theta(s)$ variando conforme y(s) ou $\sqrt{x(s)}$, ambos os modelos produzem, por integração, a mesma trajetória final. A trajetória da parábola clássica pode, portanto, ser pensada como resultado de uma rotação progressiva sobre um campo vetorial — uma nova maneira de formular e compreender o movimento acelerado.

5.6 A liberdade da matemática e suas consequências na física

A essência da matemática está em sua liberdade.

GEORG CANTOR, em *Introdução à História da Matemática.*

O percurso até aqui não foi apenas uma busca por precisão formal: foi também um exercício de liberdade. Ao invés de partirmos de leis físicas estabelecidas e procurarmos descrevê-las por meio da matemática — como usualmente se faz —, tomamos o caminho inverso. Elegemos, com certa ousadia, uma estrutura matemática rotacional, progressiva e análoga, e a submetemos ao teste da física. Descobrimos que essa escolha, a princípio apenas intuitiva, era não só válida, mas capaz de gerar com altíssima fidelidade as curvas do movimento real.

A matemática não foi aqui uma simples ferramenta de registro. Ela atuou como linguagem generativa, um campo de experimentação onde ideias foram plantadas, cultivadas e, por vezes, colhidas com surpresa. A introdução da raiz quadrada, por exemplo, não surgiu como dedução teórica, mas como uma hipótese estética, quase musical, baseada na suavidade das curvas. Mais tarde, sua eficácia física se confirmou com uma precisão inesperada.

Neste sentido, o campo vetorial — com seus vetores compostos horizontal e verticalmente, rotacionados ponto a ponto — pode ser visto como um palco onde a geometria se torna dinâmica. O espaço deixa de ser o palco passivo da física newtoniana e passa a participar do movimento: curvas emergem da composição local, da orientação, da rotação, da integração. A geometria age.

É justamente essa liberdade criativa da matemática que a aproxima da arte e a emancipa da função meramente representativa. Ao construir trajetórias com base em rotações progressivas, revelamos uma forma alternativa de pensar o movimento: não como efeito de forças, mas como composição de campos e ângulos. A parábola, nesse contexto, não é mais uma equação algébrica do tipo $y = ax^2 + bx + c$, mas um fenômeno rotacional e vetorial que se constrói ponto a ponto por integração.

O mais notável é que essa liberdade não nega a realidade física — ela a revela de outra forma. Ao ousar escolher caminhos matemáticos não previstos pelas tradições mecânicas, abrimos espaço para outras interpretações da natureza. E, com isso, a própria ideia de transformação entre referenciais — até então pensada como subtração escalar de coordenadas — ganha uma nova forma, mais rica, mais geométrica, mais rotacional.

Em suma, a matemática, quando liberta, torna-se uma máquina de ver. E ao vê-lo por outro ângulo, o mundo continua o mesmo — mas nós, não mais.

5.7 Confissões

E eis que Tu estavas dentro de mim e eu, fora.
SANTO AGOSTINHO, *Confissões*.

Compreendo melhor o que não posso exprimir do que consigo exprimir o que compreendo.
SANTO AGOSTINHO, *Confissões*.

Tudo já foi dito ao longo deste capítulo. As equações foram construídas, as curvas geradas, os campos vetoriais explorados, os parâmetros testados e ajustados. Agora é o momento de expor — sem pretensões conclusivas — algumas ideias, imagens e intuições que, mesmo não formalizadas desde o início, exerceram influência decisiva na formação do pensamento que nos levou até aqui.

A primeira dessas imagens é quase uma parábola visual: imaginemos o Bi-Toro suspenso no vazio, imóvel, e um tubo flexível — como um macarrão de piscina — sendo inserido por um de seus orifícios. À medida que o Bi-Toro gira, esse tubo é progressivamente moldado pela estrutura interna do artefato, e, ao sair pelo outro lado, emerge com a forma precisa de uma parábola. Essa imagem não é apenas ilustrativa: ela materializa o tipo de transformação que desejávamos capturar com as equações rotovetoriais — uma conversão progressiva, suave, contínua, de uma trajetória linear em uma curva acelerada, realizada por rotação em um campo vetorial. Isto foi determinante para que pudéssemos estudar os princípios físico-matemáticos atuantes ao longo da curva. Propusemos, então, introduzir diretamente um desses princípios na equação — a aceleração tangencial — e, de forma ousada, optamos por remover a força centrípeta (ou força normal), justamente porque no nosso artefato mecânico ela não se manifesta. Essa decisão consolidou o caráter rotacional puro do modelo.

Tivemos, em um determinado momento do percurso, a ideia de buscar uma equivalência algébrica entre a reta — o segmento linear que chamamos de traço zero-dez — e a parábola clássica, dada pela equação $y = ax^2 + bx + c$. Esse esforço nos levou a considerar a possibilidade de um operador de transformação puramente algébrico que permitisse converter a linearidade da reta na curvatura da parábola. Mas, insatisfeitos com a rigidez formal dessa abordagem, decidimos dar um passo além: partindo da própria álgebra da equação quadrática clássica, ousamos conceber uma nova expressão matemática — não mais baseada apenas em potências e coeficientes, mas fundada na ideia de rotação e na estrutura dinâmica de um campo vetorial. Essa nova formulação buscava dar vida à parábola, não apenas descrevê-la, mas gerá-la como resultado de um processo contínuo e cinemático.

Ao longo de todo este desenvolvimento, a ideia de um campo vetorial dinâmico nos acompanhou como fundamento conceitual persistente. Já no Capítulo 3, item 3.3, essa noção aparecia com nitidez: “nesse caso, o campo de forças é composto: cada ponto da trajetória da pedra resulta na soma de dois vetores — um vertical (gravidade) e um horizontal (inércia). A composição desses vetores forma um novo campo vetorial, com vetores oblíquos que mudam conforme o tempo.”E foi com esse mesmo espírito, já no calor da criação visual e analógica, que surgiu a imagem do corpo sendo moldado pela rotação do Bi-Toro: “a trajetória da pedra, os deslocamentos internos, até mesmo o próprio casco do navio seriam, por assim dizer, espagueteficados para o observador externo.”Os gráficos neste mesmo 3.3 ilustram estas diretrizes.

Em vez de partir de uma equação algébrica preexistente, deixamo-nos guiar por imagens, intuições e estruturas rotacionais — curvas suaves, funções de raiz quadrada, vetores girando ponto a ponto em campos compostos. A escolha da raiz quadrada, por exemplo, foi tanto técnica quanto conceitual: uma função que, como os números irracionais e transcendentes, representa aproximações infinitas, curvas assintóticas, caminhos sem fim. Foi uma das grandes ideias do percurso.

Já próximo do nosso resultado final, emergiu a intuição que consolidaria a universalidade do modelo. Até então, a constante k era o nosso elo mais forte e, ao mesmo tempo, nosso calcanhar de Aquiles. Ela garantia a precisão para um caso específico, mas exigia um reajuste manual para cada nova combinação de gravidade g, velocidade v ou altura h, limitando o poder preditivo da nossa formulação. A solução foi, portanto, deixar de tratar k como um simples parâmetro de ajuste e passar a concebê-lo como uma variável de estado, uma função que deveria, por necessidade, incorporar as condições físicas iniciais do sistema. Ao estabelecermos a relação $k = f(g, v, h)$, o Modelo rotovetorial-T transcendeu a descrição de um evento particular. Ele não precisava mais ser 'calibrado'; ele se autoajustava à realidade física. Com esse passo, a equação deixou de ser apenas uma representação precisa para se tornar uma lei geral e preditiva dentro do nosso sistema rotacional, unificando finalmente a geometria da curva com a física do evento.

E por fim, viramos o mundo de cabeça para baixo — ou melhor, viramos o próprio artefato. Os cálculos se tornavam cada vez mais complexos, orbitando em torno da peça central, o Bi-Toro, que simultaneamente experimentava quatro movimentos distintos: uma translação horizontal, uma translação vertical, uma translação parabólica e, sobretudo, uma rotação essencial. Submeter o Bi-Toro a essa combinação de movimentos tornava o sistema de equações quase intratável. Foi então que surgiu a grande ideia para o grand finale: invertemos radicalmente a lógica do funcionamento. A haste vertical, antes móvel, tornou-se fixa; e a haste parabólica, até então estática, passou a mover-se — em nossa cabeça, é claro, como um experimento mental à moda galileana, pois o artefato continuava ali, imóvel, sobre a mesa. Alteramos por completo a dinâmica do artefato — e com isso, eliminamos um dos movimentos fundamentais do sistema, ao fixar o Bi-Toro em um dos planos. Pouco depois… a equação surgiu.

Essas confissões não diminuem a precisão matemática obtida. Pelo contrário: reforçam o papel da imaginação científica e do pensamento construtivo na gênese de modelos físicos. Como dizia Cantor, a liberdade da matemática é também a liberdade de criar realidades. E talvez o maior gesto de fidelidade à experiência de Galileu — que soube imaginar antes de demonstrar — seja este: ter ousado construir um novo caminho, partindo de uma pedra que cai, passando por um campo vetorial, e chegando ao coração giratório de um artefato.

Referências para a modelagem matemática

A modelagem matemática das trajetórias discutidas no Capítulo 5 — notadamente os Modelos Rotovetorial-G e Rotovetorial-T, que propõem curvas rotacionais como alternativas à parábola algébrica clássica exigiu uma série de experimentações intermediárias, ajustes paramétricos e visualizações vetoriais. Como parte da metodologia construtiva adotada nesta pesquisa, foram utilizadas ferramentas computacionais amplamente reconhecidas na educação matemática e física, acessíveis on-line, que permitiram simular campos vetoriais, rotacionar vetores progressivamente e comparar curvas parametrizadas.

- GeoGebra (https://www.geogebra.org): ambiente interativo de geometria e álgebra, utilizado para testar a composição entre vetores horizontais constantes e vetores verticais acelerados, além de representar curvas geradas por rotação progressiva em campos vetoriais bidimensionais;

- Desmos Graphing Calculator (https://www.desmos.com/calculator): ferramenta gráfica com suporte a equações paramétricas, empregada na construção de curvas com rotação dependente de variáveis como altura ou distância horizontal, permitindo a comparação visual entre trajetórias distintas;

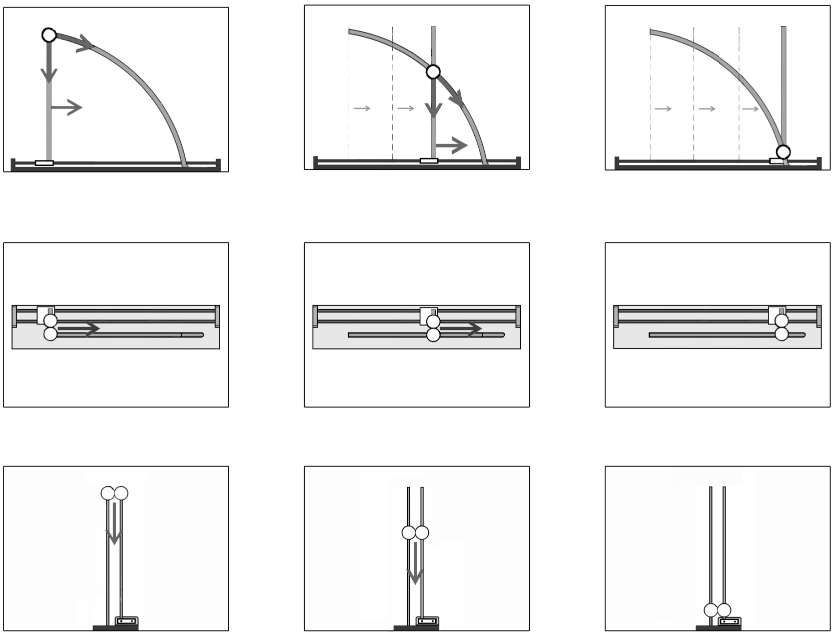
- Mathematica Online (https://www.wolframcloud.com): ambiente de computação simbólica utilizado para simulações mais avançadas, análise de curvas rotacionais, manipulação de funções vetoriais e representação simbólica das transformações cinemáticas entre referenciais.

Complementarmente, para a fundamentação teórica da modelagem vetorial, foram consultados livros de referência clássicos, com destaque para:

- RILEY, K. F.; HOBSON, M. P.; BENCE, S. J. *Mathematical Methods for Physics and Engineering*. 3. ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

Este volume contribuiu para o embasamento formal dos procedimentos envolvendo vetores, rotações, parametrizações e sistemas de coordenadas, todos centrais à modelagem apresentada.

6 Potências cinemática: do Bi-Toro aos modelos Rotovetoriais



Anaximandro concebeu um mundo em equilíbrio dinâmico, onde o conflito produz a ordem.

RUSSELL, BERTRAND**.** A história do pensamento ocidental.

6.1 Introdução

O percurso construído até aqui nos conduziu da análise conceitual do experimento da pedra lançada do alto do mastro à formulação de um artefato físico capaz de representar, de maneira concreta, a sobreposição e a interseção de movimentos pertencentes a diferentes referenciais inerciais. A experiência galileana, reconstituída sob o olhar da cinemática moderna e reinterpretada à luz de uma epistemologia construtiva, revelou o ponto de partida de uma transformação mais profunda — não apenas de observadores, mas de operações que envolvem o espaço, o tempo e o próprio gesto do movimento.

Este capítulo propõe-se a explicitar a potência cinemática do Bi-Toro: sua capacidade de operar como instrumento de demonstração, ensino, formulação e crítica. A palavra “potência” aqui não se refere apenas ao seu uso funcional, mas a seu poder gerador de conceitos, capaz de ligar o sensível ao formal, o fenômeno à estrutura, e o movimento ao símbolo.

O Bi-Toro, nesse contexto, não é apenas um dispositivo técnico ou didático: ele atua como operador diferencial tangível, instaurando um novo modo de pensar as transformações entre referenciais. Ao girar simultaneamente sobre duas trajetórias — uma reta e uma curva — ele permite visualizar a equivalência cinemática entre dois mundos distintos, sem privilegiar nenhum deles. Ao fazer isso, ele evidencia a insuficiência da transformação galileana clássica como simples subtração escalar, e propõe, em seu lugar, uma nova forma de transformação baseada na rotação progressiva dos vetores que definem o movimento.

Nos itens seguintes, o capítulo apresentará o Bi-Toro como artefato demonstrativo, didático, heurístico e epistemológico. Em seguida, analisará criticamente os limites da transformação galileana e introduzirá a rotação como operação física de equivalência. Ao final, serão destacados os dois modelos rotovetoriais G e T — já desenvolvidos no capítulo anterior — como culminância matemática dessa potência: não apenas como fórmulas elegantes, mas como expressões formais de uma nova compreensão do movimento relativo entre referenciais.

6.2 O Bi-Toro como demonstração cinemática e operador pedagógico

A construção do Bi-Toro Articulado não tem apenas valor ilustrativo: ela constitui uma verdadeira operação de pensamento encarnada em forma técnica. Mais do que demonstrar uma teoria preexistente, o artefato inaugura um novo modo de articular fisicamente as transformações entre referenciais inerciais — permitindo não apenas ver o movimento relativo, mas realizar a transformação que o conecta. Sua potência cinemática não está separada de sua função pedagógica e epistemológica; ao contrário, essas dimensões se reforçam mutuamente e se integram como aspectos complementares de um mesmo gesto experimental.

Na prática, o Bi-Toro demonstra — de forma visível, tangível e contínua — que é possível transformar entre dois sistemas inerciais por meio da interseção física ponto a ponto entre trajetórias contraditórias, articuladas por um corpo que percorre simultaneamente uma linha reta (referencial do navio) e uma parábola (referencial do cais). Essa operação visível é mais do que uma analogia: ela é a materialização da transformação, e, ao ser repetida com precisão, converte-se em demonstração. O que era antes tratado como abstração simbólica (a equação $x' = x - vt$) torna-se aqui uma rotação incorporada entre campos vetoriais — um gesto físico com equivalência formal.

Esse gesto não apenas revela a estrutura oculta da transformação galileana, mas desenha sua reformulação. O corpo que gira dentro do Bi-Toro traça fisicamente a curvatura de uma nova equação: os modelos rotovetoriais G e T. O artefato, nesse sentido, desenha uma fórmula — algo raro na história da ciência. Ele demonstra por movimento, por geometria, por tangibilidade. E é exatamente por isso que o Bi-Toro pode ser compreendido, no sentido forte de Simondon, como um objeto técnico individuado, portador de sua própria lógica interna e produtor de sentido.

Essa propriedade o torna particularmente apto ao ensino da física e da matemática em diversos níveis. Sua concepção prevê, em médio prazo, a produção de uma versão em escala didática, com peças resistentes, leves e de fácil manuseio. Acompanhado de um manual de uso e montagem, o Bi-Toro seria distribuído em escolas e universidades, acompanhado de dois volumes complementares: (1) um manual pedagógico com experimentos graduais para diversos níveis de ensino, e (2) um manual teórico com fundamentos matemáticos e físicos detalhados, acessíveis a professores e pesquisadores. Em escolas de ensino fundamental, bastará a contemplação do movimento composto para produzir espanto e despertar perguntas. Em universidades, o mesmo artefato servirá como ponto de partida para discussões sobre composição vetorial, rotação, mudança de base, deformações angulares e até aproximações com a física moderna.

Ao unir acessibilidade sensível com sofisticação conceitual, o Bi-Toro preenche um espaço raro entre experimento e teoria. Como defendia Richard Feynman, não basta ensinar fórmulas: é preciso compreender por que as coisas se movem, como e por que as trajetórias se transformam. O Bi-Toro responde a essa exigência: ele permite pensar com o corpo, ver com os dedos, sentir com os olhos. E o que ele mostra não é apenas um fenômeno — é uma estrutura do real.

Do ponto de vista epistemológico, essa estrutura não se limita a ilustrar leis conhecidas, mas produz novo conhecimento. Como propôs Gaston Bachelard em sua epistemologia da fenomenotécnica, um artefato só se torna científico quando é capaz de gerar conceitos — e é justamente esse o caso aqui. O Bi-Toro não se contenta em representar o movimento: ele o reconstrói de forma relacional, revelando que o verdadeiro operador entre referenciais não é a subtração de coordenadas, mas a rotação entre campos vetoriais compostos, realizada fisicamente por uma interseção cinemática. A própria equação rotovetorial G, por exemplo, emerge do artefato não por dedução matemática abstrata, mas por indução experimental: ela é inscrita no gesto do objeto.

Essa emergência da equação pelo gesto é também o que confere ao Bi-Toro seu valor heurístico profundo. Ele não apenas demonstra algo que já sabíamos — ele desvenda uma nova maneira de pensar o movimento. Ao fazê-lo, aponta caminhos para além da mecânica clássica: suas estruturas rotacionais podem ser exploradas em contextos como a geometria diferencial, a relatividade geral e a física quântica, onde o movimento não é apenas deslocamento, mas transformação do espaço. Com base na lógica do Bi-Toro, já foram esboçadas hipóteses sobre operadores em SU(2), sobre campos vetoriais curvos como base de deformações e sobre o colapso de estados probabilísticos por articulação rotacional — temas que ultrapassam o escopo desta dissertação, mas não suas possibilidades.

Por fim, o Bi-Toro permite pensar de forma nova a própria ideia de fórmula. Ele não apenas resolve um problema: ele materializa a própria resolução. Como queria Karl Popper, uma teoria é forte quando é testável. O Bi-Toro vai além: ele torna visível o teste e, ao mesmo tempo, torna visível o próprio surgimento da teoria. Por isso, sua função não é apenas didática, nem apenas conceitual. Ele é, ao mesmo tempo, artefato de demonstração, operador de transformação e gerador de equação.

6.3 O Bi-Toro: operador epistemológico e heurístico

Este item visa explorar com mais profundidade o Bi-Toro como um dispositivo que ultrapassa sua função demonstrativa e pedagógica, para assumir uma função efetiva na construção do conhecimento. Nesse sentido, o Bi-Toro torna-se um verdadeiro operador epistemológico e heurístico. Ele não apenas demonstra uma teoria já formulada, mas é capaz de gerar hipóteses, sugerir novos caminhos, produzir equações e revelar comportamentos dinâmicos complexos de forma concreta, sensível e experimental.

Do ponto de vista epistemológico, o Bi-Toro permite pensar o conhecimento não como uma simples abstração simbólica, mas como um produto do contato entre a mente e os fenômenos em situação. Ele se insere na tradição experimental, mas com uma diferença decisiva: não se trata apenas de medir ou verificar um dado, mas de produzir uma nova inteligibilidade do movimento a partir da interação física entre formas, rotações e trajetórias.

Do ponto de vista heurístico, o Bi-Toro gerou diversas hipóteses ao longo da pesquisa. Entre elas, destacam-se dois eixos centrais: (1) o estudo da aceleração tangencial da peça bi-toro em sua trajetória parabólica, e (2) a investigação dos ângulos de rotação local produzidos pelas tangentes ao longo da queda.

No primeiro caso, foi possível observar que a aceleração tangencial é inicialmente negativa no topo da trajetória, pois a curvatura é mais acentuada e o deslocamento da peça ainda pequeno. Essa aceleração diminui em módulo até atingir zero em torno de 0,4 segundos, quando ocorre o ponto de inflexão. A partir desse ponto, a aceleração torna-se positiva, pois o vetor da gravidade (g) passa a dominar a dinâmica e o movimento de translação da peça se intensifica, acelerando também sua rotação, e culmina em 1,43 segundos. Esse comportamento foi medido, graficamente descrito e levou ao desenvolvimento de expressões formais associadas à aceleração tangencial e à curva descrita pelo Bi-Toro.

No segundo caso, o estudo das tangentes ao longo da trajetória possibilitou a construção de uma relação entre os ângulos de rotação local e o tempo. Em particular, o ângulo final, de aproximadamente 63 graus, foi utilizado como base para definir uma nova equação alternativa à forma quadrática clássica, com base na arctangente. Esses resultados não foram extraídos da matemática pura, mas da própria observação do funcionamento do artefato em sua trajetória real.

A observação direta dos fenômenos físicos que ocorrem ao longo da parábola, e não apenas a partir de sua decomposição vetorial abstrata, permite iniciar um processo de parametrização do espaço, entendendo-o não mais como mero cenário passivo, mas como entidade dinâmica e interativa. O ar, o meio, a atmosfera — tudo que circunda o corpo em movimento — revela-se portador de uma lógica interna, com estrutura e potencial próprio. Essa perspectiva leva naturalmente à ideia de um campo vetorial contínuo, no qual cada ponto do espaço está associado a uma orientação e intensidade, como se o espaço fosse tensionado e organizado pelas próprias trajetórias dos corpos. Sem os estudos detalhados dos movimentos compostos — e sem mergulhar nas nuances reais da parábola — essa concepção permanece invisível. O movimento decomposto, por si só, não oferece nenhuma pista sobre esse campo. É, portanto, da atenção plena à experiência concreta que emerge a possibilidade de compreender o espaço como um meio ativo, conforme já havíamos sugerido, no Capítulo 3, ao introduzirmos o conceito de "espaguetisação cinemática”.

Essa percepção transforma radicalmente a maneira como compreendemos o movimento: o composto não é um mero resultado da soma de vetores, mas um fenômeno com estrutura própria, que revela propriedades emergentes ao longo do tempo e do espaço. Em contraste, o movimento decomposto, tal como tratado nas abstrações clássicas, dissolve essa estrutura em componentes isolados, úteis para certos cálculos, mas insuficientes para captar o fenômeno em sua inteireza. O estudo aprofundado das parábolas e das tangentes, das acelerações locais e das curvaturas variáveis, nos levou à constatação de que a verdadeira compreensão dos movimentos exige uma abordagem integrada — na qual o composto é o dado primário, e sua eventual decomposição é apenas uma operação auxiliar. O artefato Bi-Toro materializa exatamente essa inversão epistemológica: ao produzir fisicamente o movimento composto e reconstruir, por meio da rotação, as trajetórias observadas, ele não apenas representa, mas cria uma verdade física, que só pode ser alcançada por meio da composição e da continuidade — não da separação.

Uma das justificativas recorrentes na tradição da física para aceitar a decomposição do movimento em dois vetores ortogonais — o da inércia horizontal e o da gravidade vertical — é a suposta independência absoluta dessas forças. Afirma-se, com frequência, que elas não se influenciam mutuamente, como se cada uma pudesse agir isoladamente, sem interferir na outra. Essa independência, no entanto, é usada como um argumento simplificador e, em muitos casos, intelectualmente preguiçoso. Pois, se de fato não houvesse qualquer relação entre essas duas componentes, de onde emergiria a incrível variedade de movimentos compostos que vemos no mundo físico? Como explicar, por exemplo, apenas dentro dessa abstração, a pluralidade de parábolas descritas por corpos lançados com diferentes velocidades iniciais? A depender da velocidade horizontal, a parábola pode se achatar ou se alongar indefinidamente. Isso demonstra que, ainda que as duas forças preservem suas magnitudes ao longo do percurso — a inércia constante e a gravidade uniforme —, o modo como se combinam produz efeitos novos, trajetórias singulares, dinâmicas não triviais. A alegação de independência, portanto, é válida no plano conceitual estrito, mas não pode ser usada como desculpa para ignorar os fenômenos que emergem da interação entre elas. Essa interação, mesmo sem troca de intensidades, é responsável pela forma, pela curvatura, pela trajetória e pelo tempo. Ignorá-la é reduzir o fenômeno a uma abstração vazia — cientificamente estéril e epistemologicamente empobrecedora.

Outros estudos derivados da experiência direta com o Bi-Toro reforçam sua potência heurística. Um exemplo notável é a reflexão inspirada em uma citação de Galileu, que dizia:

"Mesmo lançada do alto do mastro de um navio veloz, a pedra conserva o ímpeto do navio e cai ao pé do mastro, sempre no mesmo tempo — um efeito maravilhoso da natureza.". Essa maravilha exprime a equivalência física entre infinitas trajetórias parabólicas, desde que a altura inicial seja constante. Essa equivalência permitiu formular a hipótese de que toda trajetória parabólica pode ser decomposta em dois vetores: um horizontal de inércia, e um vertical da gravidade. E mais: que a rotação progressiva de um vetor composto por esses dois pode reconstruir a trajetória completa sem necessidade de coordenadas cartesianas, apenas pela geometria do movimento.

Descobrir e explorar não se reduz a adotar um reducionismo radical, uma simplificação preguiçosa, levando-nos a refletir, representar e adotar apenas estes dois vetores para explicar os fenômenos físicos na queda dos corpos livres e o movimento decomposto, para todos os casos, ignorando-se a força da física, da matemática e da beleza intrínsecas contidas nos movimentos parabólicos em sua essenciência. E é justamente isso que fizemos ao longo do processo: foi o dedo na ferida e certamente um dos conceitos centrais na obtenção de nossos resultados e de nossos objetivos.

Durante o manuseio do artefato Bi-Toro, uma anomalia curiosa chamou nossa atenção. Quando o carrinho que carregava a haste vertical era deslocado suavemente em direção à haste parabólica, a peça bi-toro — articulada e sustentada por ambas — descia de maneira instável, com pequenos saltos e trepidações. No entanto, ao exercermos uma força um pouco maior nesse deslocamento horizontal, a trepidação desaparecia e o movimento tornava-se suave e contínuo. Essa diferença mecânica nos instigou profundamente. O mesmo corpo — a peça bi-toro — era forçado a percorrer simultaneamente duas trajetórias distintas: a reta vertical do referencial do navio, com 10 metros, e a parábola do referencial do cais, com 14,73 metros, ou seja, 47,29% mais longa. Esta diferença era compensada pela rotação interna da peça, evidenciando a potência do artefato como operador de transformação. No entanto, a anomalia persistente sugeria algo mais profundo: a esfera que acompanhava a parábola precisava "pular", pois sua trajetória era fisicamente mais extensa, o que evocava os antigos paradoxos de Zenão sobre a divisão infinita das linhas e trajetórias: "*O movimento é impossível, pois aquilo que se move deve antes alcançar a metade do caminho, e antes disso, a metade da metade, e assim infinitamente*." — Zenão de Eleia.

Essa observação nos levou a uma reflexão sobre os limites da continuidade matemática diante da realidade física. Se a matemática aceita, sem objeções, a bijeção entre pontos de uma reta e de uma parábola, a física, por sua vez, esbarra em restrições concretas, como a escala de Planck — uma fronteira mínima que impede a divisão infinita do espaço. Nesse contexto, a bijeção entre a reta e a parábola no artefato é mediada pela rotação da peça bi-toro, mas sugere uma assimetria estrutural, como se a parábola comportasse mais "eventos" que a reta. Isso se torna ainda mais claro quando analisamos o comportamento do carrinho: seu deslocamento horizontal é uniforme, mas o movimento vertical da haste — determinado pela geometria da parábola — adquire uma aceleração, mesmo sem nenhuma força adicional externa. A conclusão é epistemologicamente potente: a geometria da parábola, ao se tornar concreta, obriga o corpo articulado a acompanhar sua curvatura e, assim, gera fisicamente o movimento acelerado. Nesse fenômeno, vemos a matemática e a física se entrelaçarem: a forma gera o movimento; a geometria impõe uma dinâmica; a curvatura induz a aceleração.

Essa coerção geométrica nos remete, por analogia, à Relatividade Geral de Einstein, segundo a qual todos os corpos — inclusive a luz — são forçados a seguir os caminhos determinados pela topologia do espaço-tempo. Em ambos os casos, é a geometria que comanda o movimento.

Da mesma forma como formulado em nossa transformação e nos modelos rotovetoriais G e T — que pensam o plano como um campo vetorial dinâmico interagindo com os corpos — a teoria de Einstein introduz os tensores como ferramentas capazes de parametrizar e deformar o espaço-tempo, convertendo-o, por assim dizer, em um campo vetorial contínuo e infinito.

Assim, o Bi-Toro não apenas representa um experimento didático. Ele opera como uma máquina de pensar. Ele produz relações, articula variáveis, permite inferências e revela estruturas ocultas do movimento. Ele mostra que o conhecimento pode emergir do contato entre o real e o pensamento, quando mediado por um dispositivo bem construído. É nesse sentido que ele é um verdadeiro operador epistemológico e heurístico.

6.4 — O Observador Ausente

A ausência do observador no funcionamento direto do Bi-Toro não é um descuido, mas sim uma escolha epistemológica. Em contraste com as teorias físicas modernas que colocam o observador no centro do fenômeno (como na mecânica quântica) ou como elemento fundamental para definir sistemas de referência (como em Einstein), o Bi-Toro não depende da consciência de um sujeito para demonstrar a equivalência entre referenciais. Ele o faz através de um corpo mecânico que rotaciona e se desloca simultaneamente, operando uma bijeção concreta entre trajetórias.

O observador, aqui, não é aquele que decide ou interfere, mas aquele que constata. O artefato opera sozinho, e seu funcionamento se impõe independentemente da vontade ou da interpretação. É o movimento em si, gerado pela composição de referências distintas, que faz emergir a transformação. O Bi-Toro não requer "medidas" no sentido clássico da observação empírica, mas sim um entendimento do movimento como relação, como interseção dinâmica de trajetórias.

O observador ausente é, portanto, uma figura metodológica que contrasta com as três grandes tradições discutidas ao longo desta dissertação: em Aristóteles, o observador não tem função central, pois a causa do movimento é intrínseca ao próprio ser; em Galileu, começa a emergir a relação entre o referencial e o ponto de vista, embora ainda de forma implícita; em Einstein, a equivalência dos referenciais exige uma formalização total do observador e de sua posição no espaço-tempo. Em complemento, na física quântica, a própria presença de um aparelho de medição — que pode ser considerado uma forma de observador — provoca o colapso da função de onda descrita pela equação de Schrödinger, transformando possibilidades em realidades. Ou seja, o ato de observar modifica o sistema.

Nosso artefato contorna essas tradições e propõe uma abordagem em que a transformação entre referenciais é operada por um corpo material sem necessidade de interpretação subjetiva. Em vez do observador, é o próprio sistema que registra e realiza a equivalência entre os pontos de vista. Essa escolha metodológica reforça a hipótese central deste trabalho: é possível construir um operador de transformação entre referenciais que seja físico, concreto e funcional, sem recorrer à abstração simbólica pura ou à consciência do observador.

A abordagem do Bi-Toro tem ressonância com tendências contemporâneas da filosofia da física que buscam libertar o conhecimento da dependência de um sujeito consciente. Como observa Vlatko Vedral: “nada em física, incluindo a mecânica quântica e a relatividade, exige a existência de observadores”. O chamado efeito observador, mesmo em experimentos quânticos, não depende da consciência humana, mas de perturbações causadas por instrumentos de medição. Em consonância, a Relational Quantum Mechanics, proposta por Carlo Rovelli, sustenta que o estado físico de um sistema é sempre relacional, não absoluto — ele existe apenas em relação a outro sistema, e não em relação a um observador privilegiado. Ainda mais radicalmente, Stephen Wolfram sugere que qualquer sistema que realize operações de equivalência pode ser considerado um “observador”, inclusive sistemas materiais como o Bi-Toro. Essa convergência reforça a hipótese central deste trabalho: é possível construir um operador de transformação entre referenciais que seja físico, concreto e funcional, sem recorrer à abstração simbólica pura ou à consciência do observador.

Se a modernidade científica colocou o sujeito no centro da experiência, aqui realizamos o gesto inverso: retiramos o observador e mantivemos a experiência. O que resta é um campo rotacional em funcionamento, um corpo que se desloca por duas trajetórias ao mesmo tempo, tornando visível aquilo que as transformações galileanas apenas pressupunham.

A relatividade é relativa. O indeterminismo é indeterminado. O mundo é construído pelo dualismo. Como reconhece Aristóteles na *Metafísica* (Livro X, 1051a-b), “os contrários se definem mutuamente e só existem por comparação mútua”; e como afirma Hegel, “o verdadeiro é o todo, mas o todo apenas é a essência que se consuma mediante o seu desenvolvimento” (*Fenomenologia do Espírito*, Prefácio). Se a relatividade é relativa, isso significa que, embora em muitos casos ela seja válida e indispensável — na ciência, no pensamento, nas artes —, há também situações em que ela não se aplica ou deve ser questionada. Caminhamos, e sempre caminharemos, nesse equilíbrio instável entre determinismo e indeterminismo, entre o fixo e o fluido. Julgamos, no entanto, que vivemos hoje em uma época marcada por excessos relativistas, em que a verdade e a realidade perderam sua significância mais profunda em favor de uma individualização radical, onde cada sujeito se arroga o direito de produzir sua própria realidade.

A opção por retirar o observador do centro do experimento — como propõe o Bi-Toro — confronta esse desequilíbrio. Ela valoriza o universal, a ordem cósmica e, por que não, uma dimensão determinista da realidade. Como dito na epígrafe deste capítulo, inspirada no pensamento de Anaximandro, somos caos e ordem; o universo é caos e ordem. E nós, humildes *Homo sapiens*, nos equilibramos sobre essa tênue e frágil fronteira.

6.5 Conclusão

O percurso deste capítulo nos conduziu por uma série de tensões fecundas: entre o corpo e a equação, entre o artefato e o modelo, entre o rotacional e o parabólico, entre a abstração e o concreto. O Bi-Toro articulado, enquanto operador físico, revelou-se não apenas como uma ferramenta pedagógica ou demonstrativa, mas como um verdadeiro instrumento epistemológico e heurístico, capaz de fazer emergir novas possibilidades de modelização cinemática no âmbito da mecânica clássica.

Os modelos Rotovetoriais G e T, resultantes dessa investigação, mostram que é possível formular descrições matemáticas alternativas para a trajetória parabólica, baseadas não em decomposição vetorial abstrata, mas em uma rotação progressiva induzida por campos. A equação quadrática clássica é assim reconduzida a uma expressão tangível, construída a partir da geometria dos movimentos e da parametrização do espaço por vetores orientados.

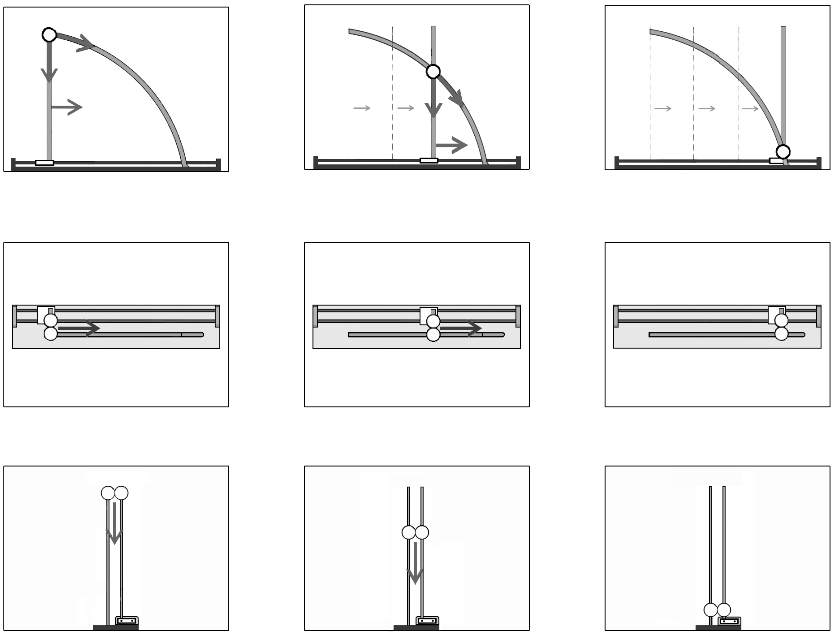
Ao lado disso, investigamos o papel do observador — ou melhor, sua ausência — como elemento constitutivo de nossa proposta. A retirada do observador não implica o apagamento do sujeito, mas sua suspensão metodológica em nome de uma estrutura cinemática capaz de operar transformações entre referenciais de forma objetiva, sem necessidade de intervenção consciente ou interpretação subjetiva.

A ciência não é feita apenas de multiplicidades e pontos de vista — ela é também, como afirmou Aristóteles, a busca pelo necessário e pelo universal. Neste mesmo sentido, Einstein nos diz: “A tarefa da física é encontrar as leis universais, a partir das quais o cosmo inteiro possa ser construído por dedução.” (ALBERT EINSTEIN, *The Meaning of Relativity*, 1922). A tradição contemporânea, ao enfatizar o sujeito e seus limites, corre o risco de dissolver a própria ideia de verdade.

Contra essa tendência, propomos uma epistemologia construtiva, onde o campo, o corpo e a rotação constituem os pilares de um real visível, experienciável e construtível. Como diria Gaston Bachelard, “o real não é o que se dá, mas o que se constrói.” E como acrescenta David Bohm, “a ordem está no movimento, e não nas coisas.”

A ordem, portanto, emerge do conflito. A verdade não se impõe, mas se constrói no atrito entre o rotacional e o retilíneo, entre o observador e o mundo, entre a trajetória e o campo. Neste espaço de tensões, o Bi-Toro é mais do que um objeto: é uma proposição filosófica materializada.

7 Conclu-Indo



7.1 Introdução: o retorno à questão inicial

Esta dissertação partiu de uma pergunta precisa: como um mesmo fenômeno físico pode gerar descrições distintas, dependendo do referencial adotado? A queda de um corpo a partir do topo de um mastro, observada simultaneamente do navio e do cais, revela não apenas a relatividade do movimento, mas a ausência de um operador físico que integre essas diferentes descrições.

Ao longo do trabalho, essa questão foi abordada com rigor conceitual, técnico e construtivo. Foram retomadas as bases da mecânica clássica, reconstruído o experimento galileano e desenvolvido um artefato físico — o Bi-Toro — capaz de representar concretamente a transformação entre referenciais inerciais. Essa solução permitiu associar a equivalência cinemática à interseção objetiva entre trajetórias, superando a limitação das transformações simbólicas e abstratas. A partir dessa construção, desenvolvemos também uma formulação matemática inédita neste tipo de aplicação à física clássica, capaz de formalizar as observações, revelar as transformações e descrever os movimentos relativos por meio da mesma estrutura analítica.

A conclusão que se segue organiza os principais resultados obtidos, destaca suas implicações científicas e epistemológicas, e delimita os horizontes conceituais abertos por esta pesquisa.

7.2 Implicações epistemológicas e conceituais

A proposta aqui desenvolvida traz repercussões diretas para a epistemologia das ciências físicas. Ao construir um artefato que opera, fisicamente, uma transformação entre referenciais inerciais por meio de uma interseção cinemática ponto a ponto, demonstra-se que a equivalência entre trajetórias pode ser realizada no espaço concreto, sem a mediação de sistemas abstratos ou operadores simbólicos.

Essa abordagem desloca o eixo da análise do sujeito observador para o objeto em movimento, resgatando uma tradição anterior à centralidade do sujeito moderno. Em vez de depender de um ponto de vista externo, a equivalência emerge da própria estrutura dinâmica da composição de movimentos. A transformação torna-se física, operável e mensurável, e não apenas uma construção teórica dependente de convenções referenciais.

Do ponto de vista conceitual, isso exige uma revisão crítica dos fundamentos clássicos que sustentam a relatividade galileana. A equivalência entre referenciais, quando realizada materialmente, mostra-se não como um postulado, mas como uma consequência de uma bijeção real entre trajetórias. Esse deslocamento fortalece uma epistemologia da construção e da demonstração, próxima à tradição experimental galileana, mas articulada a uma racionalidade contemporânea baseada na heurística, na geometria aplicada e na modelagem matemática.

7.3 Mudança de perspectiva e nova visão

A construção do Bi-Toro e os modelos rotovetoriais G e T introduzem uma mudança de perspectiva fundamental: deixam de tratar o movimento relativo apenas como um fenômeno descrito por transformações algébricas e o colocam como uma realidade física concreta, visível e operável. Ao invés de considerar os referenciais inerciais como entidades abstratas entre as quais se impõe uma convenção matemática, a presente proposta revela que essas transformações podem ser implementadas por um operador físico, articulado no espaço real.

Essa mudança não é apenas metodológica. Ela implica uma nova visão epistemológica: o movimento relativo deixa de ser um conceito dependente de observadores e assume a forma de uma interseção cinemática efetiva, com *bijeção ponto a ponto* entre trajetórias. Essa bijeção é regida por uma *rotação progressiva* inscrita em um *campo vetorial*, cuja orientação local varia conforme as variáveis cinemáticas envolvidas (altura, tempo ou posição horizontal). Trata-se de um deslocamento da centralidade da abstração simbólica para a construção espacial e operativa dos fenômenos, reafirmando uma filosofia da ciência ancorada na demonstração e na construção.

A partir dessa nova visão, a equivalência entre referenciais se torna acessível não apenas ao pensamento, mas também à percepção, ao experimento e à modelagem formal. Isso abre espaço para uma reinterpretação dos fundamentos da física clássica, sem ruptura com sua tradição, mas oferecendo-lhe uma nova potência interpretativa.

7.4 O artefato como mediador entre regimes descritivos

O Bi-Toro articulado — artefato totalmente inédito desenvolvido no contexto desta dissertação — cumpre uma função singular na estrutura epistemológica aqui proposta: ele atua como mediador entre diferentes regimes descritivos — o físico, o matemático e o filosófico. Sua materialidade o insere no domínio da demonstração empírica; sua organização cinemática, fundamentada em curvas e rotações, o aproxima do rigor geométrico e funcional da matemática; e sua função de interseção entre trajetórias e referenciais o projeta como operador conceitual de uma nova abordagem do movimento relativo.

Essa tripla inserção permite que o artefato traduza conceitos abstratos em configurações sensíveis, fazendo da rotação não apenas uma representação, mas uma operação efetiva. A bijeção entre trajetórias, antes restrita a idealizações simbólicas, se realiza como um mecanismo articulado e verificável.

Ao integrar os três regimes — físico, matemático e conceitual — o artefato ultrapassa o papel ilustrativo e assume um lugar central na construção do conhecimento. Ele não é exemplo, mas estrutura. Ele não apenas representa uma teoria, mas a realiza em sua própria operação.

7.5 Limites e potenciais da proposta

A proposta apresentada nesta dissertação estabelece um novo modo de abordar a equivalência entre referenciais inerciais, mas ela não pretende esgotar o problema. Seu principal limite reside no escopo restrito à relatividade galileana e à cinemática clássica, sem estender-se às dinâmicas newtonianas nem às reformulações relativísticas e quânticas. Trata-se de uma escolha deliberada: ao invés de expandir horizontalmente o campo de aplicação, optou-se por uma exploração vertical e profunda de um único experimento canônico, buscando nele novas potências teóricas e operativas.

Outro limite, inerente ao método construtivo adotado, é o fato de que toda a argumentação está ancorada em um artefato físico. Embora esse objeto tenha sido descrito, testado e matematicamente formalizado, seu caráter experimental implica restrições quanto à generalização universal dos resultados. A abstração foi deliberadamente contida, e a potência teórica emerge justamente da concretude da construção.

Ao mesmo tempo, esses limites delineiam os potenciais da proposta. A originalidade reside na materialização de uma transformação entre referenciais como operação física contínua e verificável, com base em rotação progressiva em campo vetorial. A matemática gerada a partir dessa experiência não apenas confirma os fenômenos observados, como amplia o repertório de descrições possíveis dentro da própria mecânica clássica. Isso abre caminhos para futuras extensões e articulações, a serem exploradas em investigações posteriores. Exemplos dessas extensões estão citados no Apêndice A.

7.6 Resgate conceitual: história, ciência e epistemologia

Este trabalho também se propôs a um resgate conceitual rigoroso, recolocando no centro da reflexão científica algumas questões esquecidas ou subestimadas pela prática contemporânea. Ao retornar à experiência de Galileu com a pedra que cai do alto do mastro, revisitamos os fundamentos históricos e epistemológicos da ciência do movimento, articulando elementos oriundos de Aristóteles, Newton, e do próprio Galileu em sua vertente experimental e matemática.

A noção de movimento, tratada aqui como relação entre trajetórias em campos distintos, foi reconstruída desde suas raízes, recusando simplificações escolares e recuperando suas ambiguidades filosóficas. Abordagens como a de Aristóteles, onde o movimento inclui também a transformação substancial do ser, foram revisitadas não por anacronismo, mas como modo de recolocar a ciência em diálogo com sua própria história.

Este gesto é também epistemológico. A investigação do Bi-Toro e de seus modelos matemáticos traz à tona uma crítica à abstração simbólica dissociada da experiência e propõe um conhecimento que emerge da construção, da observação e da formalização integradas. A proposta epistemológica aqui ensaiada parte do artefato e retorna a ele, sem renunciar à generalidade nem à demonstração. Ciência, história e filosofia tornam-se, assim, coautoras do mesmo percurso investigativo.

7.7 Leitura rotacional da deformação: $\boldsymbol{\lambda} = \dfrac{1}{\cos(\boldsymbol{\theta})}$

A equação da deformação angular, $\lambda = 1/\cos(\theta)$, embora simples em sua forma, antecipa e se articula intimamente com as equações mais complexas desenvolvidas nos modelos Rotovetoriais G e T — que trataremos em detalhe no item seguinte. Ambas partem do mesmo princípio fundamental: a ideia de que o movimento relativo entre dois referenciais pode ser descrito como uma rotação progressiva, e que essa rotação gera deformações observáveis nas trajetórias, velocidades e acelerações, conforme o ponto de vista adotado. A deformação angular, portanto, constitui um caso particular e imediatamente visualizável desse fenômeno mais geral.

Enquanto a equação $\lambda = 1/\cos(\theta)$ expressa a deformação de um vetor projetado em um plano inclinado ou em rotação constante, os modelos G e T expandem esse princípio, descrevendo como a própria orientação vetorial (o ângulo θ) evolui ao longo do tempo ou do espaço — ou seja, como ela deixa de ser constante e passa a depender da posição ou da altitude do corpo em queda. A transição de uma deformação angular estática para uma deformação dinâmica, incorporada nas equações $\theta'(s) = -k \cdot x(s)$ e suas variantes com raiz quadrada, representa o salto conceitual e matemático entre esse subitem e o próximo. Em outras palavras, a equação da deformação angular fornece a chave inicial para pensar as transformações, e os modelos matemáticos completam essa chave ao descrever seu funcionamento dinâmico.

7.8 A matemática como mediação ativa

Talvez a principal surpresa — e a mais significativa conquista deste trabalho — tenha sido a emergência de uma formulação matemática própria e funcional a partir do estudo do Bi-Toro. A investigação, inicialmente centrada em uma experiência física e visual, desdobrou-se em uma construção teórica inesperadamente fecunda, levando à elaboração de dois modelos distintos, porém conectados: o modelo Rotovetorial-G (centrado na gravidade) e o modelo Rotovetorial-T (centrado na tangente da trajetória).
Ambos os modelos compartilham uma equação geral de transformação que constitui o núcleo matemático da proposta:

- **Equação geral de transformação rotacional**

$$\vec{r}(s) = \int_0^s \begin{bmatrix} \cos(\theta(u)) \\ \sin(\theta(u)) \end{bmatrix} du$$

Essa equação vetorial expressa o traçado da curva resultante da rotação progressiva em um campo plano. A função $\theta(u)$ representa a rotação acumulada até o ponto u, e o vetor $r(s)$ descreve a posição final após o percurso rotacional ao longo do parâmetro s. Os componentes $\cos(\theta(u))$ e $\sin(\theta(u))$ indicam a direção do vetor tangente rotacionado a cada instante, e a integral contínua desses vetores define a trajetória resultante. Trata-se, portanto, da formalização geométrica do movimento gerado por um campo vetorial rotativo — uma curva que se constrói ponto a ponto, como somatória infinitesimal de vetores rotacionados.

Ambos os modelos compartilham também uma equação simplificada, que atua como chave diferencial para a geração local das rotações progressivas.:

- **Equação simplificada de controle angular**

$$\theta'(s) = -k \cdot x(s)$$

Esta equação diferencial estabelece uma relação entre a rotação angular progressiva $\theta(s)$ e a posição horizontal $x(s)$, e, a partir disso, determina a trajetória $r(s)$ como uma curva parametrizada no plano. O fator k atua como constante de deformação, relacionando diretamente o campo vetorial composto ao perfil da curva resultante. Trata-se de uma operação contínua de transformação de um campo vetorial em movimento.

Cada modelo especifica uma forma distinta para $x(s)$, originando diferentes geometrias internas:

- **No modelo G (Gravitacional):**

$$x(s) = \sqrt{s}, \qquad \theta(s) = \int k \cdot \sqrt{s}\, ds \quad \text{e} \quad \theta_G(s) = \int_0^s \sqrt{u}\, du = \frac{2}{3}s^{3/2}$$

- **No modelo T (Tangencial):**

$$x(s) = s, \qquad \theta(s) = \int k \cdot s\, ds \quad \text{e} \quad \theta_T(s) = \int_0^s u\, du = \frac{1}{2}s^2$$

Ambas as soluções geram curvas que convergem visualmente e funcionalmente para a parábola, mas o fazem por caminhos internos inteiramente novos. Nossa proposta não se limita a reproduzir a equação canônica $y = ax^2 + bx + c$, mas sim a oferecer uma construção alternativa e rotacional da parábola, baseada em fundamentos cinemáticos e vetoriais. A parábola aqui não é uma forma dada, mas uma trajetória construída, produto de rotações acumuladas num campo vetorial.

A obtenção dessas soluções exigiu um trabalho matemático intenso e progressivo. Foram criadas tabelas numéricas, desenvolvidos algoritmos, extraídas aproximações sucessivas, desenhadas curvas comparativas, testadas variações diferenciais e realizadas simulações com apoio de softwares matemáticos. A formalização das equações foi fruto de um longo esforço de abstração, comparação e validação geométrica, articulando cálculo, visualização gráfica e síntese conceitual.

Mais do que ilustrar um fenômeno, essas equações operam uma verdadeira mediação epistemológica entre a observação e a teoria. Elas não foram apenas deduzidas, mas construídas a partir do artefato, da experiência, da intuição geométrica e de um esforço matemático sistemático. Nessa mediação ativa, a matemática se torna uma linguagem que revela e organiza o movimento, não como algo dado, mas como algo produzido.

7.9 O Bi-Toro como operador diferencial tangível

O Bi-Toro é um artefato físico que realiza, com precisão mecânica, a transformação entre referenciais inerciais por meio de uma estrutura rotacional concreta. Ao descrever duas trajetórias simultâneas — uma retilínea e outra parabólica — ele materializa a equivalência cinemática de forma ponto a ponto, sem recorrer a abstrações.

Essa correspondência diferencial, fundamentada em um mecanismo de dupla curvatura, equivale, no plano matemático, à integração local de um campo vetorial composto. A peça central do artefato — o bi-toro propriamente dito — funciona como operador geométrico que atualiza, fisicamente, a transformação galileana não mais como simples subtração vetorial, mas como um processo progressivo, rotacional e tangível. Diferentemente das equações simbólicas, o Bi-Toro exibe a transformação em ato, permitindo acompanhar o deslocamento relativo ao longo do tempo por meio da composição geométrica dos vetores atuantes.

Essa operação diferencial — simultaneamente contínua e mecânica — estabelece uma ponte entre teoria e experiência. O Bi-Toro não representa a transformação: ele a produz. E ao produzi-la, incorpora o tempo e o espaço como manifestações da rotação ativa entre trajetórias.

A originalidade técnica do Bi-Toro — inexistente em qualquer outro dispositivo físico até o momento — impôs a necessidade de formular uma linguagem matemática compatível com sua operação. A rotação progressiva em campo vetorial, descrita nos modelos desenvolvidos, é consequência direta dessa estrutura inédita. Como não poderia ser diferente, a singularidade do artefato demandou uma formulação também singular para descrevê-lo.

7.10 – Mudança de perspectiva e nova visão

Ao retornar ao experimento de Galileu — a pedra solta do alto do mastro — recuperamos não apenas um episódio fundador da ciência moderna, mas também uma pergunta ainda aberta: o que significa comparar dois sistemas de movimento distintos? Nossa pesquisa propôs uma resposta: mais relevante do que descrever separadamente cada sistema, é explorar o que emerge de sua interação.

A nova visão que aqui se delineia parte desse princípio: a verdade e a realidade do movimento não residem exclusivamente em um sistema ou outro, mas na interseção dinâmica entre eles. Tal como a sobreposição entre um círculo e uma elipse gera uma região comum que nenhum dos dois contém isoladamente, a interseção entre referenciais inerciais revela uma estrutura que é própria da relação, não dos termos isolados. Foi essa estrutura emergente que buscamos com o Bi-Toro.

Com isso, deslocamos o centro da análise: não é mais o observador quem garante o sentido do movimento, mas o próprio processo relacional que se constitui entre trajetórias, corpos e campos vetoriais. A rotação deixa de ser apenas uma forma de movimento e passa a ser uma operação de equivalência, uma chave que transforma, aproxima e conecta regimes de descrição distintos.

Essa perspectiva remete também a Platão e à alegoria da caverna: os movimentos projetados na parede não são a realidade última, mas sim sombras de relações mais profundas. Assim, propomos que o entendimento do movimento exige uma abordagem relacional e construtiva, em que a ciência não apenas mede, mas também constrói realidades a partir das interações.

O Bi-Toro, por fim, encarna essa virada. Ele não apenas demonstra equivalência; ele a realiza. Não apenas ilustra transformações; ele as produz. E ao fazê-lo, reorienta o olhar: da teoria abstrata para o corpo em movimento, do sistema isolado para o campo de relações, do observador para a emergência da forma.

7.11 Epílogo em círculo

Ao final deste percurso, retornamos ao ponto de partida — mas já transformados. Como em um círculo, aquilo que era apenas um experimento descrito por Galileu torna-se agora um operador físico, um modelo matemático e uma nova forma de pensar o movimento relativo.

Ao longo desta pesquisa, foi possível estabelecer não apenas uma nova leitura, mas também uma nova teoria a partir do experimento de Galileu da pedra que cai do alto do mastro do navio. Julgamos por satisfeito: confeccionamos um artefato inédito que executava, diante de nós, a ideia original — nossa própria visão sobre os movimentos — e revelamos a física e a matemática que permaneciam ocultas, ou que insistiam em se manter escondidas. A partir de uma matemática já existente, desenvolvemos novas equações: uma aplicação inédita dessa matemática a sistemas da física clássica.

A investigação manteve, do início ao fim, uma rotação conceitual com suas acelerações positivas e negativas: cada capítulo agregou um novo ângulo, girando em torno do mesmo núcleo — o movimento relativo.

Quando fazemos coincidir diferentes sistemas, não estamos apenas recombinando o que já existe em cada um deles. Estamos provocando o surgimento da novidade. Essa coincidência não é passiva, nem descritiva: é ativa, geradora, produtora. A novidade que emerge não estava presente em nenhum dos sistemas isoladamente — ela é o fruto da relação, da tensão, da diferença e da interseção. É assim que se revela o real: como emergência.

Ao contrário do que fizemos em todos os capítulos anteriores, aqui a epígrafe não nos acolheu no início. Ela preferiu mover-se até o fim — como quem percorre a trajetória inteira antes de se revelar.

E pur si muove

(*E, no entanto, ela se move*.)

Tradicionalmente atribuída a GALILEU GALILEI, 1564–1642. A frase, que se refere ao movimento da terra, teria sido pronunciada em voz baixa após ser forçado a abjurar das ideias copernicanas diante da Inquisição, embora não haja registro histórico direto. Ela se tornou um símbolo do espírito científico contra a opressão dogmática.

Referências

As referências foram organizadas conforme sua função epistemológica na dissertação: Fontes Primárias, que serviram de base histórica e conceitual, e Fontes Secundárias, que forneceram análises, interpretações e ampliações do tema. A obra de Galileu Galilei foi destacada à parte, por se tratar da referência principal e fundadora de todo o percurso desenvolvido. Por fim, foram incluídas também fontes de natureza matemática e computacional, essenciais à formulação dos modelos e equações.

Fonte Central: Galileu Galilei

GALILEI, Galileu. **Diálogo sobre os dois máximos sistemas do mundo ptolomaico e copernicano**. Tradução de Pablo Ruben Mariconda. São Paulo: Editora 34, 2011.

GALILEI, Galileo. **Dialogues Concerning Two New Sciences.** Tradução de Henry Crew e Alfonso De Salvio. Nova York: Dover Publications, Inc., 1914.

Fontes primárias

ANAXIMANDRO (c. 610 – c. 546 a.C.). **Fragmentos**. Tradução de Giovanni Reale. In: OS PENSADORES. São Paulo: Abril Cultural, 1973.

PITÁGORAS (c. 570 – c. 495 a.C.). GUTHRIE, W.K.C. **Pythagoras and the Pythagoreans. Cambridge: Cambridge University Press**, 1988.

HERÁCLITO (c. 500 a.C.). **Fragmentos**. Tradução de José Cavalcante de Souza. São Paulo: Cultrix, 1973.

PARMÊNIDES (c. 515 – c. 450 a.C.). **Sobre a natureza (fragmentos)**. Tradução de José Cavalcante de Souza. São Paulo: Cultrix, 1973.

PLATÃO (428/427 – 348/347 a.C.). **A República.** Tradução de Maria Helena da Rocha Pereira. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2006.

ARISTÓTELES (384 – 322 a.C.). **Física**. Tradução de Newton Freire-Maia. São Paulo: Abril Cultural, 1973.

ZENÃO DE ELEIA (c. 490 – c. 430 a.C.). **Fragmentos e Comentários**. In: Kirk, G.S.; Raven, J.E. **Os Filósofos Pré-Socráticos**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 1995.

SANTO AGOSTINHO (354 – 430). **Confissões**. Tradução de J. Oliveira Santos e A. Ambrósio de Pina. São Paulo: Paulus, 1997.

JOÃO FILOPONO (c. 490 – c. 570). **Against Aristotle on the Eternity of the World.** Ithaca: Cornell University Press, 2005.

JEAN BURIDAN (c. 1300 – c. 1358). **Questions on the Eight Books of the Physics of Aristotle**. Tradução de Marshall Clagett. Madison: University of Wisconsin Press, 1963.

NICOLE ORESME (c. 1320 – 1382). **Le Livre du ciel et du monde**. Tradução de Albert D. Menut. Madison: University of Wisconsin Press, 1968.

GIORDANO BRUNO (1548 – 1600). **Sobre o Infinito, o Universo e os Mundos**. Tradução de Henrique Cláudio de Lima Vaz. São Paulo: Ed. UNESP, 2009.

LEONARDO DA VINCI (1452 – 1519). **Cadernos de Notas**. Tradução de Therezinha Monteiro. São Paulo: Nova Cultural, 2003.

NICOLAU COPÉRNICO (1473 – 1543). **Sobre as Revoluções das Esferas Celestes**. São Paulo: Ed. UNESP, 2015.

ISAAC NEWTON (1642 – 1727). **Princípios Matemáticos da Filosofia Natural.** Tradução de Ildeu de Castro Moreira e George Oscar Rocha. São Paulo: Ed. UNESP, 2020.

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ (1646 – 1716). **Discurso de Metafísica e outros textos.** Tradução de Antonio Márcio da Silva. São Paulo: Martins Fontes, 2000.

JOSEPH-LOUIS LAGRANGE (1736 – 1813). **Mécanique Analytique.** Paris: Courcier, 1811.

AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY (1789 – 1857). **Cours d’analyse de l’École Royale Polytechnique**. Paris: Imprimerie Royale, 1821.

Fontes secundárias

MACH, Ernst (1838 – 1916). **A mecânica: exposição histórica e crítica do seu desenvolvimento.** São Paulo: Nova Stella, 1983.

DUHEM, Pierre (1861 – 1916). **Os fundadores da ciência moderna.** São Paulo: Editora Unesp, 2001.

BACHELARD , Gaston (1884 – 1962). **A formação do espírito científico**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1996.

COYRE, Alexandre (1892 – 1964). **Do mundo fechado ao universo infinito**. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2001.

POPPER, Karl (1902 – 1994). **A lógica da pesquisa científica**. São Paulo: Cultrix, 1975.

DRAKE, Stillman (1910 – 1993). **Galileu, uma biografia**. Lisboa: Gradiva, 1990.

BOHM, David (1917 – 1992). **A totalidade e a ordem implicada.** São Paulo: Cultrix, 1983.

FEYNMAN, Richard (1918 – 1988). **O significado de tudo: pensamentos de um cidadão-cientista**. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2015.

SIMONDON, Gilbert (1924 – 1989). **Du mode d'existence des objets techniques**. Paris: Aubier, 1989.

DELEUZE, Gilles (1925 – 1995); GUATTARI, Félix (1930 – 1992). **O que é a filosofia?** São Paulo: Ed. 34, 1992.

DELEUZE, Gilles (1925 – 1995). ***Cinéma 1 : L'image-mouvement***. Paris: Éditions de Minuit, 1983.

DELEUZE, Gilles (1925 – 1995). ***Cinéma 2 : L'image-temps***. Paris: Éditions de Minuit, 1985.

EINSTEIN, Albert (1930 – 1992). **Como vejo o mundo.** São Paulo: Nova Fronteira, 2006.

FEYNMAN, Richard. **O significado de tudo: pensamentos de um cidadão-cientista**. Rio de Janeiro: Intrínseca, 2015.

GALLUZZI, Paolo (1942). Engenho e Experiência: Galileo, uma história do método científico. São Paulo: UNESP, 2001.

NOVELLO, Mario (1942). **O que é cosmologia**. São Paulo: Brasiliense, 1988.

Fontes Matemáticas e Ferramentas de Modelagem

RILEY, K. F.(–); HOBSON, M. P.(1856 – 1933); BENCE, S. J (–). ***Mathematical Methods for Physics and Engineering*. 3.** ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2006.

GEOGEBRA. ***GeoGebra – Mathematics for Learning and Teaching*.** Disponível em: https://www.geogebra.org. Acesso em: 28 jun. 2025.
DESMOS. ***Desmos Graphing Calculator*.** Disponível em: https://www.desmos.com/calculator. Acesso em: 28 jun. 2025.

WOLFRAM RESEARCH. ***Mathematica Online – Wolfram Cloud***. Disponível em: https://www.wolframcloud.com. Acesso em: 28 jun. 2025.

THEND