UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO

SICLEIDI VALENTE DOS SANTOS BRITTO

A JUSTIFICAÇÃO FINITISTA DA NOÇÃO DE INFINITO ATUAL POR DAVID HILBERT

RIO DE JANEIRO

2018

Sicleidi Valente dos Santos Britto

A JUSTIFICAÇÃO FINITISTA DA NOÇÃO DE INFINITO ATUAL POR DAVID HILBERT

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia, Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Silva Kubrusly

RIO DE JANEIRO

2018

Britto, Sicleidi Valente dos Santos

Título: A justificação finitista da noção de infinito atual por David Hilbert – 2018. 60 f.

Dissertação (Mestrado em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Programa de Pós Graduação em História das Ciências, das Técnicas e Epistemologia, Rio de Janeiro, 2018.

Orientador: Prof. Dr. Ricardo Silva Kubrusly

1. História do Infinito 2. Infinito atual 3. Matemática transfinita 4. Programa de Hilbert

2. I. Kubrusly, Ricardo Silva (Orient). II. Universidade Federal do Rio de Janeiro. III. Título.

SICLEIDI VALENTE DOS SANTOS BRITTO

A JUSTIFICAÇÃO FINITISTA DA NOÇÃO DE INFINITO ATUAL POR DAVID HILBERT

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em História das Ciências e das Técnicas e Epistemologia.

Aprovada em: 02 de maio de 2018

Prof. Dr. Ricardo Silva Kubrusly
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Ângela Rocha dos Santos
Profª. Drª. Ângela Rocha dos Santos
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Isabel Caf
Profª. Drª. Isabel Leite Cafezeiro
Universidade Federal Fluminense

Dedicatória

Dedico este trabalho a três ***mulheres Valentes***:

Vera Valente, minha mãe querida, de quem herdei o sobrenome. Com ela aprendi, através dos seus exemplos, desde o dia que abri meus olhos até o dia que os dela se fecharam, que “Valente” não era apenas o meu nome, mas um modo de viver. O único modo possível para mulheres como nós tornarem nossos sonhos realidade...

Amélia Valente, minha dedicada avó. Com ela aprendi, até o seu último dia de vida, a persistir e a trabalhar com afinco pela realização dos meus sonhos, por mais impossíveis que eles pudessem parecer...

Edda Valente, minha doce madrinha. Com ela aprendi, até o seu último dia de vida, a ter fé e a acreditar que todo esforço empregado na realização dos meus sonhos não seriam em vão...

Agradecimentos

A Deus, pela realização desse sonho.

Ao meu sábio Pai, Edmilson Alves dos Santos, por ter me ensinado a amar o Saber.

Ao meu marido, Marcelo de Oliveira Britto, por me encorajar em todos os momentos em que fraquejei. Pela difícil tarefa de me lembrar a todo instante de que sou capaz. E pelo entendimento das minhas ausências na nossa relação.

Ao meu filho, Lucas Valente Britto, por ser tão compreensivo e amigo. Entendendo as minhas ausências e me fortalecendo com suas doces palavras: ”Mãe, te amo até o infinito”. Agora, depois dessa pesquisa, compreendi o tamanho do seu amor e posso lhe afirmar, com precisão, que te amo além do infinito, meu pequeno!

Ao meu orientador, professor Ricardo Kubrusly, pelas lágrimas que arrancou dos meus olhos, quando me apresentou em suas aulas a beleza do infinito, que não era só matemático, nem só filosófico. Mas, um infinito vivo, que pulsa, que inquieta, que conversa com todas as áreas do saber. Meus sinceros agradecimentos por segurar as minhas mãos e me fazer caminhar. Por acreditar em mim e me fazer acreditar!

Aos professores Ano Viero (in memorian) e Marco Ruffino, por me apresentarem as belezas do infinito e dos seus paradoxos num passado não muito distante.

À grande amiga-irmã Andréa Garcia da Rocha, por suas doces palavras de encorajamento e por ser um exemplo vivo a seguir de “Philosopho”, uma verdadeira amante da sabedoria.

Aos meus alunos da Escola Municipal Cardeal Leme e Colégio Estadual João Alfredo, por entenderem quando eu não estava inteira na missão de ensinar-lhes pela matemática.

EPÍGRAFE

“Há um conceito que corrompe e altera todos os outros. Não falo do mal, cujo limitado império é a ética, falo do infinito.”

Jorge Luis Borges (1899-1986)

RESUMO

BRITTO, Sicleidi Valente dos Santos. A justificação finitista da noção de infinito atual por David Hilbert. Rio de Janeiro, 2018. Dissertação (Mestrado em História das Ciências das Técnicas e Epistemologia), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

O presente trabalho pretende mostrar como o conceito de infinito atual, definido e matematizado por Georg Cantor, foi justificado por David Hilbert a partir de uma epistemologia estritamente finitista. O infinito enquanto potência, aquilo que nunca acaba e que sempre posso adicionar mais um elemento, é o infinito justificado por Aristóteles. Mas, que não pode se tornar um objeto da matemática, na medida em que não é atualizado, acabado, totalizado. O infinito potencial não é um ente matemático, é um processo. A noção de infinito possui uma natureza paradoxal, que vai de encontro à nossa experiência com o finito. E por isso, a enorme dificuldade de incorporá-lo como objeto matemático. Isso só se dá ao final do século XIX, pelas mãos de um gênio que não foi compreendido ao seu tempo, a exceção de Hilbert, que sai em defesa do infinito atual definido e matematizado por Cantor, em um cenário de crise dos fundamentos da matemática.

Palavras-Chave: História do Infinito. Infinito atual. Matemática transfinita. Programa de Hilbert.

ABSTRACT

BRITTO, Sicleidi Valente dos Santos. A justificação finitista da noção de infinito atual por David Hilbert. Rio de Janeiro, 2018. Dissertação (Mestrado em História das Ciências das Técnicas e Epistemologia), Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018.

The present work wants to show how the concept of actual infinity, defined and mathematized by Georg Cantor, was justified by David Hilbert from an epistemology strictly finitist. The infinity while power, which never ends and that I can always add one more element, is the infinity justified by Aristoteles. But, it can not become a mathematical object, as it is not updated, finished, totalized. The infinity potential is not a mathematical entity, it is a process. The idea of infinity has a paradoxical nature, which goes against our experience with the finite. Hence, the enormous difficulty to incorporate it as a Mathematical object. This happened at the end of the XIX century through the hands of a genius that was not understood at his time, except from Hilbert, who defended the actual infinity and mathematized by Cantor, in a crisis scenario of the mathematical fundamentals.

KEYWORDS: History of infinity, Actual infinity, Transfinite numbers, Hilbert’s program.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO:

"Ninguém nos expulsará do paraíso que Georg Cantor criou para nós"

David Hilbert

Como diz Hilbert, "A questão do infinito agitou sempre as emoções da humanidade mais profundamente do que qualquer outra" (1925, p.371). De fato, poucos assuntos provocaram tanta polêmica e discussão entre matemáticos, filósofos e teólogos como a ideia de infinito. Gera muitas inquietações o fato de grande parte da matemática fundamentar-se no conceito de infinito, que é fonte de problemas filosóficos alguns dos quais ainda sem soluções. A história do infinito é uma história de paradoxos. Na antiguidade, os paradoxos de Zenão de Eléia surgiram porque, utilizando o conceito de infinito, Zenão aparentemente demonstrava ser impossível o movimento. O que entra em conflito com nossa experiência.

O Paradoxo de Galileu entra em conflito com a nossa intuição, pois é muito estranho pensar que o conjunto dos números inteiros tem a mesma quantidade de elementos que a dos quadrados perfeitos, uma vez que o primeiro conjunto tem infinitos números a mais que o segundo (isto é, todos aqueles que não são quadrados perfeitos). A noção do infinito traz em si uma natureza contraditória à nossa intuição e à nossa experiência com conjuntos finitos, onde o todo é sempre maior que suas partes. Por causa disso, Galileu apenas reconheceu que o infinito se comporta de maneira diferente do finito, não sendo possível atribuir a ele as qualidades de maior, menor ou igual. Galileu concluiu que a nossa compreensão finita não pode entender o infinito. E comparando o infinito ao "incompreensível", admite que o melhor a fazer é *evitá-lo*.

Bernard Bolzano (1781-1848) verificou que havia uma correspondência bijetora (relação de um para um) entre os intervalos de números reais [0,1] e [0,2]:

$$f: [0,1] \rightarrow [0,2]$$

$$f(x) = 2x, \ x \in [0,1]$$

Isso quer dizer que o intervalo [0,1] tem a mesma quantidade de elementos que o intervalo [0,2]. Generalizando, o intervalo [0,1] tem a mesma quantidade de números de [0,a], para todo número real a. Isto quer dizer que é possível estabelecer uma relação de um para um entre um intervalo de números reais e um intervalo que está contido nele. O que resulta que eles têm o mesmo tamanho[1].

Em sua obra *Os Paradoxos do Infinito,* publicado após sua morte em 1851, Bolzano propôs como marca característica das totalidades infinitas a correspondência de um para um entre o todo e uma das suas partes, o chamado *paradoxo da reflexividade*:

> Se um conjunto é infinito, pode-se colocá-lo em correspondência bijetora com uma de suas partes próprias. (1993, p.27)

Segundo ele, a crença geral de que "o todo é maior que a parte" deixa de valer em totalidades infinitas.

No final do século XIX, Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor e Richard Dedekind, definiram e matematizaram o infinito atual. Cantor e Dedekind definiram uma coleção infinita como aquela que tem o mesmo tamanho de uma parte própria dela mesmo. Ou seja, o que Galileu enxergou como um paradoxo e Bolzano, como uma característica, Cantor captou como essência das coleções infinitas. Com o desenvolvimento da teoria dos conjuntos, a solução do paradoxo da reflexividade, foi formulada do seguinte modo: a relação "estar contido em **e** ser diferente de", entre conjuntos, não deve ser confundida com a relação "possui um tamanho menor que".

Pela primeira vez o infinito ganhou uma definição própria. Pois, até então, o infinito era o não finito. Isto é, a definição de infinito era dada pela negação do finito. O infinito, para Cantor é um objeto matemático totalizado, acabado, o *infinito Atual*. Não é algo a vir a ser, algo que não acaba e que se realiza potencialmente, o *infinito potencial*, o único infinito sobre o qual estávamos "autorizados" a falar desde Aristóteles. Bolzano, já havia proposto que o infinito deveria ser tratado de forma atual e não, potencial. Somente a partir dessa mudança de paradigma que o infinito pode ser matematizado e, sob essa ótica, estudado e problematizado.

Ao analisar os conjuntos infinitos, Cantor demonstrou que havia infinitos de tamanhos diferentes, conjuntos infinitos maiores que outros conjuntos também infinitos. E desenvolve uma belíssima matemática transfinita a partir da teoria de conjuntos.

---

[1] No decorrer desse trabalho, usaremos "tamanho de um conjunto" no sentido de sua cardinalidade, o que em conjuntos finitos equivale ao número de elementos do conjunto.

Tal trabalho de Cantor foi bastante criticado por matemáticos influentes da época, como Henri Poincaré e Leopold Kronecker, seu ex-professor e maior crítico, que chegou a publicar que Cantor era um *corruptor da juventude*, um *charlatão científico*, um *renegado*. Tamanha crítica dificultou enormemente a publicação de seus resultados nas revistas influentes dos meios científicos de sua época.

David Hilbert, respeitado matemático alemão, sai em defesa da matemática transfinita de Cantor e afirma que tal teoria lhe parece *"o mais refinado produto do gênio matemático"*, apesar de ser um finitista. Isto é, para Hilbert, o direito de operar o infinito só poderia ser assegurado através do finito.

Neste trabalho, pretendemos mostrar como Cantor e Dedekind desenvolveram a noção de infinito atual, como Cantor desenvolveu a sua teoria dos números transfinitos e como David Hilbert justificou a utilização do infinito atual na matemática, apesar de ser finitista. Isto é, como ele conciliou a noção de infinito com os requisitos de uma epistemologia estritamente finitista. Na sua famosa conferência "Sobre o Infinito", Hilbert defende a teoria dos números transfinitos de Cantor das duras críticas que sofre. Entretanto, na mesma conferência, também afirma que não há razão alguma, a partir das teorias físicas do universo, para se acreditar que exista alguma coisa no mundo que corresponda a uma coleção infinita. O que torna impossível a justificação de uma axiomática envolvendo infinito por um modelo físico. Como poderia então Hilbert justificar a utilização do infinito atual como um objeto matemático? Queremos mostrar como tudo isso é conciliável no seu pensamento, e que não há nada de contraditório. Assim como, pretendemos mostrar as implicações ontológicas e epistemológicas do programa de Hilbert no que diz respeito ao infinito enquanto objeto matemático.

1. UMA BREVE HISTORIA DA CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE INFINITO: UMA HISTÓRIA DE PARADOXOS

Não temos a pretensão de contar, de forma minuciosa, a história da construção do conceito de infinito. Para isso, precisaríamos de um trabalho dedicado a esse fim. Escolhemos quatro autores, em quatro momentos diferentes da história, para destacar a natureza paradoxal da noção de infinito: Aristóteles (384 a.C.– 322 a.C.); que se reporta aos paradoxos de Zenão (490 a.C.– 430 a.C.), Galileu Galilei (1564-1642), Bernard Bolzano (1781-1848) e Georg Cantor (1845-1918).

A palavra "paradoxo" vem do grego "*paradoxos*". O prefixo "*para*" quer dizer "contrário a" e o sufixo "*doxa*" quer dizer "opinião". Logo, *paradoxos* significa contrário à previsão ou à opinião comum. Um paradoxo é uma afirmação que aparenta ser contraditória ao senso comum[2]. Veremos a seguir que a história do conceito de infinito é também uma história de paradoxos.

1.1 – Aristóteles e os paradoxos de Zenão

Os filósofos pré-socráticos, que também conhecemos por *filósofos da natureza*, buscavam na natureza as respostas sobre a origem e ser do mundo. Zenão de Eléia (490 a.C.– 430 a.C.), discípulo de Parmênides de Eléia (530 a.C.- 460 a.C.), defendia as ideias de seu mestre. Ele acreditava que o universo era único, imutável e imóvel. E que movimento, mudança, tempo e pluralidade não seriam mais do que ilusões. À sua época duas concepções se opunham: a concepção *continuísta* que considera o número, o espaço, o tempo e a matéria como divisíveis ao infinito e a concepção *atomista*, que considera a existência de elementos primeiros indivisíveis. Para Zenão, essas duas concepções geram impasses. E, para mostrar tais impasses, ele desenvolveu quatro paradoxos, que aparentemente demonstravam a impossibilidade do movimento. Segundo ele, *O que se move deve sempre alcançar o ponto médio antes do ponto final* (Os Pensadores, p. 140). Tais paradoxos foram tratados por Aristóteles em sua obra *Física*, que os intitulou de *Aquiles*, *Dicotomia*, *Seta* e *Estádio*, nomes pelos quais ficaram conhecidos.

[2] Em matemática, paradoxos são antinomias, ou seja, consideramos que uma afirmação é um paradoxo quando ela é verdadeira se e somente se for falsa.

Os dois primeiros paradoxos refutam a suposição de que espaço e tempo são infinitamente divisíveis: O famoso paradoxo de Aquiles diz que no caso de uma corrida entre Aquiles (o herói grego da Ilíada de Homero, o mais veloz dos homens) e uma tartaruga (o mais lento dos animais), se fosse dado uma vantagem à tartaruga de ela sair na frente de Homero, esse nunca a alcançaria, e a tartaruga seria a grande vencedora da corrida. Isso porque, quando Aquiles chegasse ao ponto em que a tartaruga tivesse largado, ela já estaria à frente. Num segundo momento, quando Aquiles chegasse onde a tartaruga estivesse, ela já estaria um pouco à frente (pouco, mas estaria à frente) e assim sucessivamente, infinitas vezes. Mas, tal fato não se verifica. Obviamente Aquiles seria o campeão da corrida. O paradoxo da Dicotomia diz que o movimento não existe, pois para ir de um ponto a outro, antes teríamos que percorrer a metade dessa distância, Mas, para chegarmos à metade da distância, teríamos que percorrer a metade da metade do caminho. Mas, para chegarmos a um quarto do caminho, antes teríamos que percorrer um oitavo do caminho. E assim, infinitamente. De modo que não poderíamos nos movimentar de um ponto a outro. O que obviamente é uma inverdade, já que nos deslocamos.

Os paradoxos da Seta e do Estádio mostram que espaço e tempo não podem ser compostos por elementos mínimos indivisíveis.

Ao escrever sobre o infinito, Aristóteles faz a distinção entre dois tipos: O Infinito Potencial e o Infinito Atual. Mas, ele admite a existência real apenas do infinito potencial, conforme ele comenta na seguinte passagem:

> Se é impossível que um lugar seja infinito e que todo corpo ocupa um lugar, então é impossível que esse corpo seja infinito. (...) Pois bem, se o infinito não se pode quantificar – senão seria uma quantidade como de duas ou três coisas, pois isto é o que significa quantidade – assim também o que está num lugar é assim porque ocupa algum sítio: e isto para cima ou para baixo, ocupando uma das seis direções, e cada uma destas apresenta um certo limite. Fica claro que na atualidade não existe um corpo infinito. (...) Tornando-se evidente que o infinito existe num sentido e noutro não. Pois bem, diz-se que é, por um lado, em potência e por outro em atualidade. (...) De maneira que existe um número infinito em potência e não em atualidade. (Aristóteles, 1996, livro III, Cap. 4-8, p. 71-88).

Aristóteles nega a existência concreta do infinito, mas reconhece que existe uma necessidade matemática do mesmo, que consiste em considerar grandezas maiores ou menores a qualquer grandeza dada. Ou seja, o infinito como processo de crescimento ou de subdivisão sem limite (sem final). Por isso, de acordo com Aristóteles, há uma necessidade de reconhecer o infinito enquanto potência. Isto é, como uma construção da mente humana necessária para resolver problemas que envolvam grandezas infinitamente pequenas ou infinitamente grandes, o que não implica em considerar a existência de entidades de dimensão não finita, ou seja, totalidades infinitas atualmente dadas.

A partir de Aristóteles, a tendência majoritária entre filósofos e matemáticos foi a de se admitir apenas o infinito enquanto potência. Na introdução da versão francesa dos Paradoxos do Infinito, obra de Bernard Bolzano que data de 1851, Hourya Sinaceur (o tradutor do alemão para o francês) apresenta, como um dos problemas no estudo do infinito, o fato de esta noção ter sido considerada desde Aristóteles (384 a.C.– 322 a.C.) até Leibniz (1646–1716) como algo apenas em potência ou como uma espécie de ficção. A sucessão dos números naturais é o arquétipo do infinito potencial. Pois, se fixarmos um número natural, é sempre possível encontrar um número natural maior do que esse. A construção axiomática do conjunto dos números naturais, dada pelo matemático italiano Giuseppe Peano (1858-1932), caracteriza este conjunto como infinito e exemplifica o conceito de infinito potencial:

> (Axioma 1) Todo número natural tem um único sucessor;
>
> (Axioma 2) Números naturais diferentes têm sucessores diferentes;
>
> (Axioma 3) Existe um único número natural, chamado um e representado pelo símbolo 1, que não é sucessor de nenhum outro;
>
> (Axioma 4) Seja X um conjunto de números naturais (isto é, $X \subset N$). Se $1 \in X$ e se, além disso, o sucessor de todo elemento de X ainda pertence a X, então $X = N$.
>
> (Lima, 2012)

Pelo axioma 1, temos a garantia de que todo número natural possui sucessor, e este sucessor é único, logo o conjunto dos números naturais cresce para além dos limites finitos, não há um último elemento. Logo, o conjunto dos números naturais exemplifica o infinito potencial.

Esse é o infinito que existe, o infinito que é uma possibilidade. O infinito não existe enquanto uma totalidade dada, de forma acabada, de maneira atual.

1.2 – O paradoxo de Galileu

No século XVI, Galileu (astrônomo, físico e matemático italiano) esbarrou nas "esquisitices" do infinito. Ao estudar o conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6,...} dos números inteiros positivos, chegou à conclusão de que esse não é maior que uma de suas partes próprias, isto é, uma parte que está nele contida e não é idêntica ao todo. Ou seja, se considerarmos apenas uma parte desse conjunto, formada, por exemplo, apenas pelos números que são quadrados perfeitos {1, 4, 9, 16, 25, 36,...}, ela não será menor que o conjunto todo. Isso é verificado uma vez que podemos estabelecer uma correspondência de um para um entre os dois conjuntos, da seguinte forma:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	⇕	
1	4	9	16	25	36	49	64	81	...

Como os dois conjuntos são infinitos, segundo Galileu, não é possível determinar o tamanho deles, isto é, quantos elementos eles têm. Entretanto, podemos relacionar a cada número do conjunto dos inteiros positivos um e apenas um número quadrado perfeito, de modo que não restariam elementos sem correspondência em ambos os conjuntos, ou seja, todos estariam relacionados. Dessa forma, os dois conjuntos teriam o mesmo tamanho. Mas, essa conclusão parece ser contrária à nossa intuição. E contradiz o axioma IX dos Elementos de Euclides: "O todo é maior do que qualquer das suas partes".

O *Paradoxo de Galileu*, como ficou conhecido, é exposto na seguinte passagem de sua obra Diálogos relativos a duas novas ciências, publicado em 1638. Ela encena uma conversa entre três personagens, Salviati, Simplício e Sagredo, que representam, respectivamente, o próprio Galileu, um sábio convencido das concepções de Aristóteles e um homem honesto para quem a demonstração e a experiência se sobrepõe ao conhecimento advindo dos livros:

> Salviati: (...) Se eu disser que os números tomados na sua totalidade, incluindo os quadrados e não quadrados, são mais numerosos do que os quadrados sozinhos, enunciarei uma proposição verdadeira, não é?
>
> Simplício: Certamente.
>
> Salviati: De seguida, se eu perguntar agora quantos quadrados há, podemos responder, sem nos enganarmos, que há tantos quantos as raízes quadradas correspondentes, atendendo a que todo quadrado não tem mais do que uma raiz, nem uma raiz mais do que um quadrado.
>
> Simplício: Exatamente.
>
> Salviati. Mas se eu perguntar quantas raízes há, não se pode negar que há tantas quantos os números, porque todo o número é a raiz de algum quadrado. Assim sendo, será, portanto, preciso dizer que há tantos números quadrados perfeitos como números, uma vez que eles são tantos como as raízes e que as raízes representam o conjunto dos números. No entanto dizíamos de princípio que há mais números do que quadrados, já que a maior parte dos números não são quadrados. (...)
>
> Sagredo: Então, qual a conclusão a tirar nestas condições?
>
> Salviati: Aos meus olhos, a única conclusão possível é dizer que o conjunto dos números, dos quadrados, das raízes é infinito; que o total dos números quadrados não é inferior ao conjunto dos números, nem este superior àquele. E finalmente, que os atributos, igual, maior e menor não têm sentido para quantidades infinitas, mas somente para quantidades finitas. (Galileu, 1988, pág. 40-41).

Galileu não admite a conclusão necessária desta passagem, isto é, de que os dois conjuntos, os inteiros positivos e uma parte própria dele mesmo, têm o mesmo tamanho. Essa conclusão entra em conflito com a nossa experiência com conjuntos finitos e contradiz o axioma Euclidiano de que o todo é sempre maior que qualquer de suas partes próprias. Como pensar que o conjunto dos números inteiros e o conjunto dos números pares têm o mesmo tamanho, se o primeiro tem infinitos números a mais que o segundo, a saber, os números ímpares? Ao se deparar com essa característica, que é a essência dos conjuntos infinitos, Galileu a tratou como paradoxal. Algo que contradiz à nossa experiência e à nossa intuição. O que Galileu fez foi reconhecer que o infinito se comporta de maneira diferente do finito, não sendo possível atribuir a ele as qualidades de maior, menor ou igual. Galileu concluiu que a nossa compreensão finita não pode entender o infinito. E comparando o infinito ao incompreensível, admite que o melhor a fazer é evitá-lo.

1.3 – Bernard Bolzano e o *verdadeiro infinito*

Bolzano, filósofo, matemático, lógico e físico, em sua obra *Paradoxos do Infinito*, que é publicado em 1851 (três anos depois da sua morte), dá um tratamento novo e original ao conceito de infinito. Ele estudou vários exemplos análogos ao paradoxo de Galileu e percebeu que tal paradoxo pode ser interpretado como uma propriedade fundamental dos conjuntos infinitos: *todo conjunto infinito pode ser posto em correspondência biunívoca com uma de suas partes próprias.* E é exatamente essa característica que foi fundamental para o estabelecimento de uma teoria de conjuntos infinitos desenvolvida de forma rigorosa no final do século XIX.

Em sua obra, ele dá legitimidade matemática ao infinito atual, o *verdadeiro infinito*. Para ele, admitir apenas o infinito potencial é determinar o infinito pelo finito. É não sair do finito:

> Uma grandeza suscetível de ser sempre tão grande quanto se queira e de tornar-se maior que toda grandeza (finita) dada, pode apesar de tudo permanecer constantemente finita, como é o caso, em particular, de toda grandeza numérica 1,2,3,4 ... (Bolzano, ş 11)

Era necessário considerar grandezas verdadeiramente infinitas, ou seja, *maior que um número qualquer de unidades ou tão pequena que todo múltiplo delas mesmas fica inferior à unidade*. Dessa forma, se faz imprescindível considerar conjuntos infinitos como totalidades acabadas e não mais como sucessões não finitas.

A obra de Bolzano não tornou o infinito um objeto matemático, mas, sem dúvidas, foi um grande passo para que outro ilustre matemático o fizesse. Georg Cantor, em sua famosa obra Grundlagen *(1883)*, afirma:

> Bolzano é possivelmente o único para quem os números infinitos próprios são legítimos, ou quando menos o único que os discute com amplitude: contudo não estou absolutamente de acordo com seu modo de tratá-los, que não lhe permite dar uma definição correta, e, por exemplo, considero inconsistentes e equivocados os parágrafos 29-33 de seu livro. Para chegar a uma verdadeira conceituação dos números infinitos determinados faltam ao autor seja o conceito de potência, seja uma noção de precisa de enumeração. É verdade que em algumas passagens podemos encontrar, escondidos sob a forma de casos particulares, os embriões de um ou de outro, mas, a meu ver, o autor não os leva a uma plena clareza e determinação, e assim como se explicam muitas incongruências (e inclusive alguns erros) em sua obra, por outro lado valiosa. (Nascimento, p. 77)

1.4 – Georg Cantor, o Gênio que "domou" o infinito:

Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor[3] nasceu em Março de 1845 em São Petersburgo, Rússia. Aos 11 anos se mudou com a família para Alemanha. Estudou em Berlim e teve como professores Weierstrass, Kummer e Kronecker. Em 1869, se tornou professor da Universidade de Halle e começou a trabalhar como assistente de Eduard Heine, estudando sobre o teorema da unicidade das séries trigonométricas. O que o levou ao problema da estrutura interna dos números reais. Por volta de 1870, ele tentou ampliar o conceito de número ordinal ao definir índices para conjuntos derivados de pontos, o que viria a ser o embrião da sua teoria de números ordinais transfinitos.

A partir de 1879, Cantor escreveu uma série de seis artigos sobre conjuntos lineares infinitos de pontos no Jornal de Crelle. Esses artigos familiarizaram os leitores com as suas ideias e forneceram conceitos básicos essenciais como conjuntos derivados, conjuntos densos, potência de um conjunto, ponto limite, ponto isolado e conjuntos bem-definidos. Em 1883, Cantor publicou o 5º artigo desses seis, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, traduzido para o francês com supervisão do próprio autor e publicado no Acta Mathematica com o título de *Fondements d'une théorie générale des ensembles*. Esse artigo, um dos mais

[3] Fotografia em anexo 1.

importantes que publicou, tinha um caráter diferente dos demais. Além das questões matemáticas, Cantor se preocupou em fundamentar filosoficamente os conceitos e definições por ele tratados.

Esse trabalho é basicamente um tratado sobre o infinito. Ele inicia com a distinção fundamental entre infinito potencial e infinito atual. Introduz matematicamente e filosoficamente noções como número ordinal transfinito (como uma extensão natural dos números inteiros para o domínio do infinito) e potência (como aquilo que serve de parâmetro para compararmos o tamanho de dois conjuntos infinitos distintos).

No final de 1884, Cantor sofreu sua primeira crise de depressão. Alguns de seus biógrafos atribuem suas crises aos problemas que teve com Kronecker e com outros matemáticos que criticaram a sua teoria. Outros atribuem suas crises às tentativas frustradas de demonstrar a Hipótese de contínuo. Hoje, acredita-se que Cantor sofria de psicose maníaco-depressiva, que não é causada por fatores externos. Ou seja, ele teria essas crises de depressão, ainda que não tivesse tais problemas. Segundo Dauben, um dos seus biógrafos, sua enfermidade mental pode ter proporcionado, durante suas fases maníacas, a energia e a tenacidade para desenvolver e defender sua teoria.

Richard Dedekind, notável matemático alemão e amigo de Cantor, tem uma enorme importância no desenvolvimento da teoria de conjuntos *Cantoriana*. Apesar de se encontrarem apenas seis vezes pessoalmente, eles trocaram muitas correspondências sobre a construção da teoria. De modo que, o desenvolvimento da mesma só foi possível devido às observações minuciosas e algumas correções de Dedekind.

No próximo capítulo, iremos tratar do desenvolvimento da noção de infinito atual e da sua matematização por Cantor, a teoria de números transfinitos. Fruto de uma mente brilhante que não se deixou abater pela natureza paradoxal da infinitude!

2. INFINITO ATUAL, *O VERDADEIRO INFINITO*

2.1- O Desenvolvimento da Noção de Infinito Atual em Cantor e Dedekind

A noção do infinito, em Cantor e Dedekind, é desenvolvida a partir da teoria dos conjuntos[4]. De modo que, para compreendermos o que é o infinito para eles, é necessária a compreensão de alguns aspectos básicos da teoria dos conjuntos. Em uma conferência proferida para matemáticos em 1925, intitulada "Sobre o Infinito", Hilbert afirmou que "*Para obter uma visão mais aprofundada da natureza do infinito, servimo-nos de uma disciplina que se aproxima da especulação filosófica geral e que estava destinada a dar nova luz a todos os complexos problemas que se referem ao infinito. Esta disciplina é a teoria de conjuntos que foi criada por Georg Cantor." (*1925, p.373)

As primeiras noções capitais são a de *conjunto* e a de *elemento de um conjunto*. O conceito de conjunto em Cantor é muito geral. Ele não faz qualquer distinção entre os significados dos termos "conjunto", "classe", "coleção", "aglomerado". O que podemos verificar na definição oferecida por ele:

> Um conjunto é uma coleção M, concebida num todo, de objetos bem distintos m da nossa intuição ou pensamento. Os objetos m que constituem o conjunto M são chamados os *elementos ou membros* de M.(1895, pág. 46)

Para Cantor, qualquer coleção é um conjunto desde que intuída ou pensada como um todo, uma totalidade acabada ou completada[5]. Os conjuntos, para ele, não são entidades do mundo real, mas criações do pensamento humano. Temos a capacidade de pensar ou intuir diversos objetos, de natureza qualquer, e de agrupá-los numa nova entidade bem determinada, o conjunto

---

[4] Importante ressaltar que a teoria de conjuntos desenvolvida por Cantor e Dedekind é chamada de *naïve* (ingênua ou intuitiva), que difere da teoria axiomática de conjuntos (como a de Zermelo, por exemplo). Alguns conceitos, como os de objeto e coleção, são dados a partir de intuições e pensamentos.

[5] Por isso sua teoria de conjuntos é chamada de intuitiva ou ingênua. Ela pressupõe um sujeito psicológico que realize, por meio da intuição, a separação dos objetos em uma coleção e que seja capaz de considerá-los, a todos, como uma totalidade.

de todos eles. Não importa a natureza dos objetos, nem a ordem pela qual possam ser apresentados, nem mesmo qualquer outra qualidade constitutiva dos conjuntos. Um conjunto formado como uma totalidade completada é por sua vez um objeto que pode ser membro de outros conjuntos, e assim temos conjuntos de conjuntos, conjuntos de conjuntos de conjuntos e assim sucessivamente.

De forma semelhante, Dedekind define *sistema* (que corresponde à noção contemporânea de conjunto) e *elementos de um sistema* (que corresponde à noção contemporânea de elementos de um conjunto). Mas, antes de apresentar tais conceitos, ele parte de um conceito mais básico ainda: a noção de *coisa*. Ele entende por coisa "todo objeto do nosso pensamento" (1888, pág. 44). Dedekind não explica o que ele entende por "pensamento" nesta definição, mas deixa claro que coisas não são objetos do mundo real.

A partir da noção de coisa, Dedekind afirma que o pensamento humano pode agrupá-las, gerando coisas novas, como descrito a seguir:

> Frequentemente acontece de diferentes coisas a,b,c,... poderem ser associadas [na mente] a partir de um ponto de vista comum; dizemos, então que elas formam um sistema S; chamamos as coisas a,b,c ... de elementos de S, [isto é], [tais coisas] estão contidas em S; da mesma forma, dizemos que S consiste destes elementos. Tal sistema (um agregado, uma totalidade, uma multiplicidade), na qualidade de um objeto do pensamento, é igualmente uma coisa. (Dedekind, 1888, p. 45)

Outra definição de suma importância é a de conjuntos infinitos. Pela primeira vez, o conjunto infinito é definido por um dado conceito e não pela impossibilidade de enumeração de todos os seus elementos, ou seja, a partir de agora conjuntos infinitos serão considerados como totalidade acabada e não mais como uma sucessão não finita. A definição é dada por Dedekind da seguinte forma:

> Um sistema S é dito ser infinito quando ele é similar[6] a uma parte própria[7] dele mesmo, caso contrário se diz que S é um sistema finito. (Dedekind, 1888, p.63)

Isto é, um conjunto S é infinito se e somente se, ele puder ser posto em correspondência biunívoca com os elementos de um subconjunto próprio seu S'. Ou seja, um conjunto é infinito se ele tem o mesmo tamanho de uma parte própria dele mesmo. Dessa forma, uma quantidade infinita que sempre foi definida de forma negativa, como aquilo que "não é finito", ganha uma definição matemática precisa. E o finito passa a ser aquilo que não é infinito. Ou seja, um conjunto é finito quando não existe uma correspondência biunívoca entre os elementos do mesmo e alguma parte própria de si mesmo.

Sendo assim, o "paradoxo de Galileu" é a característica fundamental de todo conjunto infinito. O todo é maior que qualquer de suas partes próprias somente quando tratamos de conjuntos finitos. Ou seja, o paradoxo foi gerado na tentativa de compreender o infinito utilizando as características dos conjuntos finitos.

Dedekind definiu de forma precisa o que é o ato de contar no âmbito dos conjuntos finitos. Contar é emparelhar um a um os objetos de tal conjunto com os elementos do conjunto dos números inteiros positivos {1,2,3,4,5,6,....}. Para ele, a razão humana dispõe da estrutura dos números inteiros positivos para bem ordenar o mundo à sua volta.

2.2 - Contando o Infinito

Cantor afirma que os conjuntos infinitos também podem ser contados. Para medir o "tamanho" dos conjuntos infinitos, ele adotou o mesmo princípio de Dedekind: a existência (ou não) de uma correspondência biunívoca entre o conjunto que desejamos mensurar e o conjunto dos inteiros positivos. Entretanto, como o conjunto é infinito, a ele não corresponderá um número inteiro finito. Para contar conjuntos infinitos, Cantor cria a sua teoria dos números ordinais transfinitos, ou seja, aqueles que estão para além do finito:

[6] Dois conjuntos A e B são similares se e somente se existe uma correspondência biunívoca entre eles. Uma função é chamada de correspondência biunívoca se e somente se ela for injetora (isto é, se F(a)=F(b) então a=b para todo a,b Є A) e sobrejetora (isto é, para todo c Є B, c=F(a) para algum a Є A)

[7] S' é uma parte própria de S se e somente se todo elemento pertencente a S' pertence a S, mas S é diferente de S'.

> Denomino a sequência 1,2,3,...,v,... a primeira classe dos números inteiros reais e a designo por (v) [...] Assim como o número v é a expressão para um número definido de ***v*** unidades tomadas em conjunto, inicio criando um novo número ω que é a expressão do fato de que a totalidade (v) foi dada inteiramente; imagino ω como o limite dos números v, e, por isso, entendo nada além de que ω é o primeiro inteiro criado após todos os v, isto é, o primeiro que deverá ser chamado maior que todos os v. (1883, pág. 875)

Ele *estende* o conceito de inteiros para além do finito da seguinte forma: {1,2,3,4,5,6,...,υ,...},ω ; sendo ω um número transfinito maior que todos os inteiros finitos. ω é o número ordinal que não pertence ao conjunto dos números inteiros positivos finitos, mas é aquele que vem imediatamente depois de todos eles. ω situa-se absolutamente fora da série infinita {1,2,3,4,5,6,...,υ,...} e é o sucessor imediato dela. Em outras palavras, ω é o limite para o qual tendem os números inteiros finitos. Por ser maior que todos eles e o sucessor imediato deles, ω serve para exprimir o conjunto dos inteiros finitos. Dessa forma, Cantor limita o infinito. Uma coleção infinita, por ser uma totalidade acabada, pode ser contada.

Em síntese, o tamanho de um conjunto, o que Cantor e Dedekind designam por *potência* ou *cardinalidade de um conjunto*[8], finito é um número inteiro finito. Por exemplo, a cardinalidade do conjunto {2,4,6,8,10} é 5. Pois estabelecemos uma correspondência biunívoca entre este conjunto e o dos números inteiros positivos da seguinte forma:

2	4	6	8	10
⇕	⇕	⇕	⇕	⇕
1	2	3	4	5

A cardinalidade de um conjunto infinito é um número inteiro transfinito. ω seria a potência do conjunto dos números inteiros. O número cardinal, em Cantor, é definido enquanto potência

[8] A Cardinalidade expressa a potência de um conjunto M. A notação utilizada por Cantor é $\overline{\overline{\mathbf{M}}}$, apresentada pela primeira vez em 1887, denotando que o conjunto M passa por um duplo processo de abstração no qual, *por força do pensamento*, ignoramos as qualidades individuais da cada elemento m, pertencente a M, e a possível relação de ordem entre esses elementos.

do conjunto. Os cardinais finitos, isto é, os números cardinais de conjuntos finitos são definidos, na notação atual de conjuntos, da seguinte maneira:

Card { } = 0 Card {0} = 1 Card {0,1} = 2 . . . Card {0,1,2,3,..., n-1} = n.

Portanto, a cardinalidade do conjunto dos números naturais tem que ser o número seguinte ao maior número natural, que é um conjunto infinito e, por conseguinte, não há maior número. Por isso, ele postula ω como o número que está para além do infinito, um inteiro transfinito, como sendo o limite para o qual tendem os números naturais. Por ser maior que todos os números naturais e o sucessor imediato deles, ω exprime a cardinalidade do conjunto dos naturais.

É importante ressaltar que Cantor troca de símbolo para denotar o infinito. O símbolo ∞, introduzido pelo matemático inglês John Wallis (1616–1703), fazia referência a uma quantidade maior ou menor que qualquer quantidade dada, isto é, denotava o infinito potencial. Cantor adota o símbolo **ω** para enfatizar o conceito de infinito completo, por meio de um número transfinito que exprime a cardinalidade de um conjunto infinito e que não pode ser entendido como uma variável, da maneira como era interpretado o símbolo ∞, tradicionalmente associado a um infinito potencial.

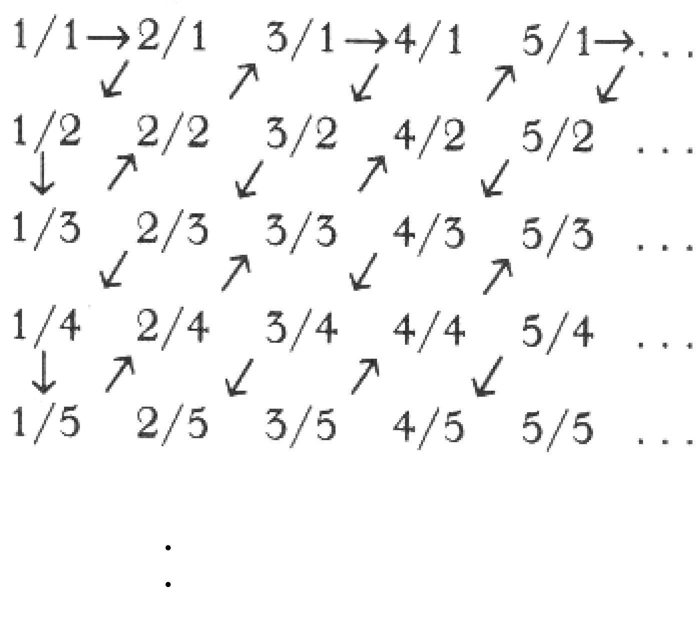
Cantor passou a comparar o tamanho dos conjuntos. Por definição, dois conjuntos A e B têm a mesma potência (equipotentes) ou são equivalentes (A ~ B) se existe uma correspondência biunívoca entre A e B. E A tem uma potência menor que B (A < B) se existe uma correspondência biunívoca entre A e um subconjunto de B, mas não há tal correspondência entre A e B. Por exemplo, a cardinalidade do conjunto de números pares é a mesma que a dos números inteiros positivos (ω). Basta verificar a existência da seguinte relação: (n → 2n)

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & \ldots \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & \ldots \end{array}$$

Da mesma forma, o conjunto dos números inteiros e o dos quadrados perfeitos têm a mesma cardinalidade. Galileu admitiu que tal correspondência existisse, mas pensou ser absurdo admitir que eles tivessem o mesmo tamanho.

Cantor desconfiava que existissem conjuntos infinitos de tamanhos diferentes. E tentou provar a não existência de uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números inteiros positivos e o dos números racionais (aqueles que podem ser escritos como fração, onde o numerador e o denominador são números inteiros, sendo o denominador diferente de zero). Intuitivamente, existem mais números racionais do que inteiros positivos, já que entre dois números inteiros quaisquer existem infinitos números racionais. Por exemplo, entre os inteiros 0 e 1, existe uma infinidade de números racionais ({1/2, 1/3, 1/4, ..., 2/3, 2/5, ...}). Entretanto, através do chamado *método da diagonalização*, ele demonstrou que existe uma correspondência biunívoca entre os dois conjuntos. Ou seja, existem tantos racionais quanto inteiros positivos.

Cantor começou a demonstração dispondo todas as frações numa matriz. A primeira linha contém, por ordem crescente, todas as frações de denominador 1, a segunda linha todas as frações de denominador 2, e assim por diante. E mostrou que se fizer um percurso diagonal, ignorando aquelas frações que representavam números que já haviam aparecido anteriormente como 1/1 = 2/2 = 3/3,..., era possível por em correspondência biunívoca os números racionais e os inteiros positivos, da seguinte forma:



A correspondência é feita na ordem indicada pelas setas, sendo omitido qualquer racional que tenha aparecido previamente, da seguinte forma:

1	2	3	4	5	6	. . .
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	
1/1	2/1	1/2	1/3	3/1	4/1	. . .

Aos conjuntos que têm a mesma potência dos inteiros positivos, Cantor chamou de *enumeráveis*. Logo, o conjunto dos números racionais é enumerável.

2.3 – Existem infinitos maiores que outros infinitos

No início de 1874, Cantor publica um artigo no Mathematische Annalen, com o título *Über eine Eigenschaft des Inbegrieffes aller reellen algebraischen Zahlen*, no qual apresenta a prova da não-enumerabilidade dos números reais. Isto é, ao comparar o conjunto dos números reais com o dos inteiros positivos, ele provou que não existe uma correspondência biunívoca entre eles. Existem mais números reais que inteiros. Logo, o primeiro conjunto tem uma potência maior que o segundo (embora ambos sejam infinitos), a que ele chamou de potência do *contínuo*. A demonstração foi feita por contradição. Ou seja, Cantor supõe que existe uma relação biunívoca entre os inteiros positivos e o intervalo de números reais maiores que zero e menores que um, incluindo zero e um - [0,1]. E chegou a uma contradição, o que tornou falsa a sua hipótese, isto é, não há uma relação biunívoca entre os dois conjuntos. Logo, eles não têm o mesmo tamanho. Para a prova, ele não utilizou a totalidade dos reais. Mas, apenas uma parte própria dos reais, o intervalo [0,1], uma vez que esse intervalo e a totalidade dos reais são equinuméricos (É possível provar facilmente que o intervalo [0,1] tem a mesma potência dos reais[9], entretanto deixaremos a demonstração fora da discussão). A prova, que utiliza o *argumento da diagonalização de Cantor*, procede da seguinte forma:

1) Assumimos que existe uma relação biunívoca entre o intervalo [0,1] e os conjunto dos números inteiros positivos.

2) Logo, deve existir uma sequência M, sem necessariamente seguir a relação de maior e menor que existe entre os reais, da forma $(r_1,r_2,r_3, \ldots)$, onde r_i é um número real entre 0 e 1, tal que:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \ldots \\ \Updownarrow & \Updownarrow & \Updownarrow & \\ r_1 & r_2 & r_3 & \ldots \end{array}$$

3) Nós podemos representar todos os números desta sequência como uma expansão decimal infinita[10].

4) Arranjamos os números reais em uma lista, correspondendo à enumeração. Assumimos, por exemplo, que as expansões decimais inicias da sequência M são:

$r_1 = 0{,}5105110 \ldots$

$r_2 = 0{,}4132043 \ldots$

$r_3 = 0{,}8245026 \ldots$

$r_4 = 0{,}2330126 \ldots$

$r_5 = 0{,}4107246 \ldots$

$r_6 = 0{,}9937838 \ldots$

$r_7 = 0{,}0105135 \ldots$

---

[9] A aplicação $f: R \rightarrow [0,1]$

$x \rightarrow f(x) = ½ [(x/1+ |x|) + 1]$ é uma bijeção entre R e [0,1]

[10] Os números que têm um número finito de dígitos (como, por exemplo, 0,247), a expansão é feita acrescentando zeros (0,2470000....). Os números racionais são representados como dízimas periódicas (0,33333...). Os números irracionais tem expansão decimal infinita, embora desconhecida. Portanto, todos os números desta sequência podem ser representados como uma expansão decimal infinita.

...

5) Podemos agora construir um número real x que pertença ao intervalo [0,1], considerando o k-ésimo dígito após o ponto decimal da expansão r_k. Os dígitos considerados estão em negrito, ilustrando a chamada *prova diagonal*.

r_1 = 0,**5**105110 ... (1ª casa decimal)
r_2 = 0,4**1**32043 ... (2ª casa decimal)
r_3 = 0,82**4**5026 ... (3ª casa decimal)
r_4 = 0,233**0**126 ... (4ª casa decimal)
r_5 = 0,4107**2**46 ... (5ª casa decimal)
r_6 = 0,99378**3**8 ... (6ª casa decimal)
r_7 = 0,010513**5** ... (7ª casa decimal)
...

6) A partir desses dígitos, definimos os dígitos de x a seguir:
- Se o k-ésimo dígito de r_k é 5 então o k-ésimo dígito de x é 4.
- Se o k-ésimo dígito de r_k não é 5 então o k-ésimo dígito de x é 5.

7) Sabemos então que para qualquer possível sequência de M, existe um número x que pertence ao intervalo [0,1].

Para a sequência acima, temos x = 0,4555554...

8) Portanto, devemos ter $r_n = x$ para algum n, uma vez que assumimos que $(r_1,r_2,r_3, ...)$ está em correspondência biunívoca com os inteiros positivos, e por isso não há um único elemento do intervalo [0,1] que não esteja associado aos inteiros positivos.

9) Entretanto, por causa da forma como definimos x no passo 6, x difere pelo menos na n-ésima posição decimal de r_n de n para todo n, logo x não está na sequência $(r_1,r_2,r_3, ...)$.

10) Logo, existe um elemento pertencente ao intervalo [0,1] que não corresponde a nenhum dos elementos do conjunto dos inteiros positivos. O que é uma contradição, pois o ponto de partida era que $(r_1,r_2,r_3, ...)$ estava em correspondência biunívoca com o conjunto dos números inteiros positivos.

11) Portanto, o que supomos no primeiro passo desta prova, isto é, a existência da correspondência biunívoca entre o intervalo [0,1] e o conjunto dos inteiros positivos, é falso.

É uma conclusão direta dessa prova que o conjunto dos números reais tem uma potência maior que a dos inteiros positivos, pois para qualquer bijeção que se construa entre esses dois conjuntos, pelo menos um número real fica de fora. Com isso, ele demonstra que existem pelo menos dois tamanhos de infinito: o tamanho dos conjuntos enumeráveis (isto é, aqueles que têm a mesma potência do conjunto dos números inteiros positivos) e o tamanho do contínuo (isto é, aqueles que têm a mesma potência do conjunto dos números reais).

2.4 – A Hipótese do Contínuo

Cantor formulou uma hipótese, que ficou conhecida como a *Hipótese do Contínuo*: não existe um conjunto cuja potência está entre o enumerável e o contínuo. Ou Seja, o tamanho do conjunto dos números reais é imediatamente superior ao tamanho do conjunto dos inteiros positivos e designou para eles dois números ordinais transfinitos sucessivos. A potência dos enumeráveis ele chamou de $\aleph_0$ e a potência do contínuo, de $\aleph_1$. Os números ordinais transfinitos $\aleph_0$ e $\aleph_1$, que estão associados a contagens realizadas no âmbito do infinito, são os dois primeiros números de uma sequência infinita de números inteiros transfinitos: $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, ..., \aleph_n, ...$

Cantor, até os últimos dias de sua vida, tentou provar a Hipótese do Contínuo. Entretanto, não obteve sucesso. Muitos matemáticos também tentaram provar a sua veracidade ou a sua falsidade. E também não lograram êxito.

Hilbert, em 1925, na conferência "Sobre o Infinito", afirma ser capaz de resolver a Hipótese do Contínuo. Para ele, não havia problemas na matemática sem solução:

> Essa convicção da solubilidade de qualquer problema matemático representa para nós um poderoso estímulo durante o trabalho; escutamos em nós a voz constante: "Esse é o problema, procura a solução." Podes encontrá-la pelo pensamento puro; pois em matemática não existe nenhum *ignorabimus*![11] (1900, p. 297)

Em 1938, Gödel mostrou que a Hipótese do Contínuo é compatível com a teoria de conjuntos de Zermelo-Fraenkel (isto é, não pode ser refutada) e , em 1963, Paul Cohen mostrou que a hipótese do contínuo não pode ser demonstrada com os axiomas da teoria de Zermelo-Fraenkel. Ou seja, os trabalhos de Gödel e Cohen, tomados conjuntamente, mostraram que esta formulação não pode ser demonstrada ou refutada, levando-se em conta apenas os axiomas da teoria de conjuntos.

2.5 – A teoria dos números transfinitos

Podemos dizer que um conjunto para Cantor é um todo de unidades reunido por meio de uma lei. Essa lei é a possibilidade de atribuir um número ordinal ao conjunto, que resulta de uma contagem efetuada com todos os elementos desse conjunto. Se o agregado for finito, a contagem leva a um número inteiro finito, do contrário leva a um número inteiro transfinito. E assim podemos conceber o infinito como um todo, ou seja, considerá-lo na sua totalidade. Entretanto, a teoria de Cantor carecia de explicações no que diz respeito à natureza desses números. Era necessário fundamentá-los. Em uma das cartas de Dedekind a Cantor, o primeiro faz referência a essa necessidade de fundamentação. Em *Grundlagem (1883)*, o quinto artigo de uma série de seis que Cantor publicou sobre domínios infinitos de pontos lineares, ele procurou determinar a natureza desses novos números. Este artigo foi publicado separadamente dos outros pela singularidade do seu conteúdo (isto é, mais metafísico que matemático). No prefácio da obra, ele

[11] Conferência intitulada "Problemas Matemáticos", proferida no Congresso Internacional de Matemáticos em Paris, no ano de 1900. Quando Hilbert apresentou uma lista de 23 problemas matemáticos ainda sem solução. O primeiro problema da lista era a hipótese do Contínuo.

deixa claro a que tipo de leitor ela se destinava, e consequentemente, que tipo de tratamento ele havia dado:

> Dado que entreguei estas páginas à apreciação pública, que fique claro que eu as escrevi tendo em vista dois tipos de leitor – para filósofos que estão a par dos mais recentes desenvolvimentos na matemática, e para matemáticos que estejam familiarizados com os mais importantes resultados tanto da antiga, quanto da moderna filosofia. (Cantor, 1883, p. 881)

É nesta obra que Cantor fundamenta a teoria dos números transfinitos, núcleo de sua doutrina. Cantor mostra que os números inteiros finitos e os números transfinitos são formados pelo mesmo princípio. São três os princípios de geração dos números inteiros. E tais princípios determinam uma sequência de números que apresentam divisões naturais denominadas *classes de números.*

O primeiro princípio de geração é o da adição de unidades a um número já formado e existente e, também conhecido como *lei da sucessão natural*. Este princípio dá origem à 1ª classe de números, que é a dos números inteiros finitos {1,2,3,4,5,...,υ,...}.

No segundo princípio, que ele chama de *princípio de formação*, Cantor introduz ω, o primeiro número transfinito. Em suas palavras, "*denomino a transição de uma sequência crescente de inteiros que não tem maior número ao número que é maior que todos eles de segundo princípio de geração*" (1883, P. 907). ω é o limite para o qual tendem os números inteiros finitos. Por ser maior que todos eles e o sucessor imediato deles, ω serve para exprimir o conjunto dos inteiros finitos.

Ao aplicar novamente o primeiro princípio em ω, obtém-se a segunda classe de números: ω, ω+1, ω+2, ..., ω+υ, ... 2ω, 2ω + 1, ..., ω^{ω}, ... Na passagem abaixo ele afirma que o primeiro princípio é aplicado tanto para gerar os números da primeira classe {1,2,3...}, quanto os de segunda classe { ω, ω+1, ω+2,...}:

> Se aplico novamente a adição de uma unidade a ω, então obtenho o número ω+1, que expressa que o primeiro ω está incluído em uma totalidade completa, o

> que me leva a um novo número. Denomino a transição de um número υ ou ω ao imediatamente seguinte de primeiro princípio de geração. (1883, P. 907)

Sendo assim, Cantor afirma que os números da segunda classe têm a mesma natureza dos números da primeira classe, uma vez que são gerados pelo mesmo princípio.

Entretanto, somente com o primeiro e o segundo princípios de geração, não há como chegar a um *limite* desta classe, isto é, um número inteiro que seja maior que todos os elementos da 2ª classe e o sucessor imediato deles. Para transpor a 2ª classe, aplicamos o 3º princípio, que Cantor denomina *princípio de limitação.* Como os inteiros infinitos são *ilimitados*, é possível, de acordo com ele, postular um inteiro ω_1 maior que qualquer inteiro da 2ª classe, com o qual se iniciam os inteiros infinitos da 3ª classe. E esses inteiros são inacessíveis aos inteiros da 2ª classe por meio da passagem ao limite de uma sequência infinita e enumerável de inteiros infinitos da segunda classe. Ou seja, ω_1 tem que estar associado à totalidade de todas as sequências infinitas e enumeráveis possíveis no âmbito dos números da 2ª classe. Por meio deste procedimento, novas classes de números são introduzidas.

Desta forma, a totalidade dos inteiros (isto é, finitos e transfinitos, pois ele estende o conceito de inteiros para além do finito) se subdivide em classes de números sucessivas. Pela notação atual, poderíamos representar os números inteiros, finitos e transfinitos, pela união dos intervalos das infinitas classes de números da seguinte forma:

$[1, \omega[\ \text{U} \ [\omega, \omega_1[\ \text{U} \ [\omega_1, \omega_2[\ \text{U} \ [\omega_2, \omega_3[\ \text{U} \ [\omega_3, \omega_4[\ \text{U} \ ....$

(O Colchete é sempre fechado no limite inferior do intervalo, pois este número pertence ao intervalo. Enquanto que, no limite superior, o colchete é sempre aberto, pois o limite superior não pertence ao intervalo).

Cada classe é composta por números ordinais[12]. A partir da 2ª classe, o número que limita inferiormente cada intervalo serve para exprimir a totalidade da classe anterior, dada a sua ordem

[12] É importante ressaltar que Cantor introduziu o infinito dos números cardinais e o infinito dos números ordinais, que não trataremos aqui. Os números infinitos cardinais representam o tamanho dos conjuntos, sem levar em conta a possível existência de uma ordenação entre seus elementos. Os números infinitos ordinais servem para assinalar o tamanho dos conjuntos em termos de sua posição em uma sequência, isto é, quando seus elementos são ordenados a partir de uma boa ordem.

de sucessão natural. Dessa forma, Cantor afirma que as classes [1, ω[, [ω, ω_1[, [ω_1, ω_2[, ... têm a mesma natureza, uma vez são formadas pelo mesmo princípio.

Cantor associa a cada classe uma potência: aos conjuntos que têm uma correspondência biunívoca com a primeira classe de números concede-se a menor potência do sistema infinito de potências ($\aleph_0$). A potência da segunda classe de números difere da potência da 1ª classe e também é a potência imediatamente superior ($\aleph_1$). De maneira análoga, a 3ª classe corresponde a $\aleph_2$ e assim sucessivamente. Ou seja, existem conjuntos infinitos de infinitos tamanhos diferentes.

Os números ordinais transfinitos nada mais são do que uma extensão dos números finitos e, assim como eles, se destinam a contar. Ou seja, o transfinito é o domínio dos números que se prestam a contar e comparar o infinito, enquanto que os inteiros finitos se prestam a contar e comparar as coleções finitas. Os números transfinitos estão associados com totalidades infinitas absolutamente completas e atuais. Ou seja, a noção de cardinalidade permite conceber o infinito como um todo, pois considera o conjunto em sua totalidade. Por isso, Cantor afirma que o infinito é um objeto acabado e atual.

Dessa forma, Cantor rompe com a tradição filosófica aristotélica, que admite o infinito apenas de forma potencial. Na primeira seção de *Grundlagen*, ele faz a distinção entre os dois conceitos de infinito: infinito potencial ou impróprio e infinito atual ou próprio. Para ele, o primeiro é uma grandeza variável finita que pode ser tão grande quanto se queira. Ou seja, quando tratamos do infinito potencial, na verdade, não saímos do domínio do finito. Enquanto que o segundo é uma quantidade fixa, constante, para além de todas as quantidades finitas. Isto é, um todo bem determinado. Dessa forma, o infinito impróprio é um processo e o infinito próprio é ele mesmo um número ($\aleph_0$, $\aleph_1$, $\aleph_2$, ...). E deixa claro que é sobre o infinito atual que toda a sua teoria é desenvolvida.

Cantor incorporou o infinito atual como um legítimo objeto da matemática. Graças à sua teoria, o infinito pôde ser estudado e matematizado. E o paradoxo de Galileu foi solucionado. Pois o que fora tratado como paradoxal por tanto tempo, na teoria Cantoriana de conjuntos, é a característica universal de conjuntos infinitos.

Ao tratarmos de números inteiros finitos positivos, o número ordinal e o cardinal são o mesmo. Por exemplo, o ordinal 5 é o cardinal 5. No caso dos números inteiros transfinitos, há muitos ordinais com a mesma cardinalidade, por exemplo, ω, ω+1, ω+2, ..., ω+υ, ... 2ω, 2ω + 1. A aplicação do axioma da escolha – *todo conjunto é bem ordenável* - à teoria Cantoriana de conjuntos resulta na definição de número cardinal infinito como o *menor ordinal de uma classe constituída por todos os ordinais equipotentes a um ordinal ou a um conjunto dado.*

O contexto histórico em que se dá o desenvolvimento dessa teoria é o de tentativas de fundamentação da matemática. Muitos teóricos buscavam essa fundamentação na teoria de conjuntos. Entretanto, em 1902, um paradoxo descoberto por Russell – *o paradoxo do conjunto de todos os conjuntos que não são membros de si próprios* – levou ao questionamento da legitimidade da utilização da teoria dos conjuntos como fundamento da matemática.

O paradoxo diz o seguinte: Considere o conjunto de todos os conjuntos que não são elementos de si mesmos. Este conjunto é elemento de si próprio? Para entendê-lo, primeiro vamos lembrar que um conjunto pode ser elemento de outro conjunto, como por exemplo, o conjunto das partes. Sabemos ainda que um conjunto pode ser inclusive elemento de si próprio, como, por exemplo, o conjunto dos conceitos abstratos, que é em si um conceito abstrato, logo é um conjunto que deve pertencer a si mesmo. Por outro lado, existem conjuntos que não pertencem a si mesmos, como o conjunto de todos os homens que não é um homem, portanto não deve pertencer a si mesmo. Formemos assim o conjunto A de todos os conjuntos que não pertencem a si mesmos. Pelo princípio do terceiro excluído, ou A pertence ou não pertence a si mesmo. Assim, temos:

- Se $A \in A$, então pertence a si mesmo e, como tal, não pode ser elemento do conjunto A, que só contém conjuntos que não pertencem a si mesmos. Contradição!
- Se $A \notin A$, ou seja, não pertence a si mesmo, então ele é elemento de A, conjunto de todos os que não pertencem a si mesmos. Contradição!

David Hilbert, um dos mais notáveis matemáticos da época, tinha uma enorme simpatia pelos números transfinitos de Cantor. Ele pretendia resolver essa crise fundacional da matemática sem perder, o que ele considerava, grandes conquistas da mesma:

> O objetivo de encontrar uma fundação segura para a matemática é também o meu. Eu gostaria de reaver para a matemática a velha reputação de verdade incontestável, que parece ter perdido em consequência dos paradoxos da teoria de conjuntos; mas creio que isso pode ser realizado sem perder, entretanto, nenhuma das grandes realizações. (1922, pág. 1119)

Na seção seguinte, passamos a analisar a forma como David Hilbert[13] pretendia salvar a teoria de conjuntos Cantoriana, mais especificamente o núcleo dessa teoria – os números transfinitos, através da sua restrição a raciocínios finitários. O que segundo ele, permitiria uma fundamentação da matemática livre dos paradoxos.

[13] Fotografia em anexo 2.

3. HILBERT E A JUSTIFICAÇÃO FINITISTA DO INFINITO ATUAL

Em uma conferência intitulada “Sobre o Infinito”, proferida em 1925, no congresso da Sociedade Matemática de Westfalia, em homenagem a Karl Weierstrass, Hilbert lança as bases de sua teoria que se desdobraria em um programa, que hoje conhecemos por “Programa de Hilbert”. Tal teoria seria capaz de substituir os métodos dedutivos baseados no infinito por procedimentos finitos que produzissem exatamente os mesmos resultados matemáticos. Desse modo, se evitariam os paradoxos relativos à existência e à utilização do infinito na teoria de conjuntos, na análise e em outras áreas do conhecimento.

> Do mesmo modo em que operações com o infinitamente pequeno foram substituídas por operações com o finito, que apresentam exatamente os mesmos resultados e as mesmas elegantes relações formais, os métodos dedutivos baseados no infinito devem ser substituídos por procedimentos finitos que produzam exatamente os mesmos resultados, isto é, que tornem possíveis as mesmas cadeias de provas e os mesmos métodos de obtenção de fórmulas e teoremas. (1925, p. 370)

Apesar dos esforços de Weierstrass em eliminar o infinitamente pequeno e o infinitamente grande em análise, substituindo-os por relações entre grandezas finitas, o infinito ainda estava mal definido. Como é o caso da definição de números reais, onde eram mencionadas as séries numéricas infinitas, que eram concebidas como uma totalidade completa e dada de imediato. Dessa forma, se fazia necessário uma definição do conceito de infinito de forma mais precisa, elucidando a sua natureza e justificando a sua utilização enquanto objeto matemático.

3.1 - Como Hilbert justifica a utilização do Infinito Atual na Matemática:

Para utilizar o conceito de infinito na matemática, era necessário elucidar a natureza do infinito. Para Hilbert, o *verdadeiro infinito* matemático é o infinito atual desenvolvido sistematicamente por Cantor. Em contraposição ao conceito de infinito enquanto conceito-limite, desenvolvido por Weierstrass, que era o conceito de infinito potencial, o qual ele afirmava não ser a natureza do infinito. Na passagem abaixo, ele deixa isso claro:

> Alguém que desejasse caracterizar brevemente a nova concepção do infinito que Cantor introduziu, poderia afirmar que em análise lidamos com o infinitamente grande e o infinitamente pequeno somente como conceitos-limite, como algo a acontecer ou vir a ser, isto é, como infinito potencial. **Mas este não é o verdadeiro infinito**. Encontramos o verdadeiro infinito somente quando consideramos a totalidade dos números 1,2,3,4,... como uma unidade completa, ou quando tomamos os pontos de um intervalo como uma totalidade que existe, de uma só vez. **Este tipo de infinito é conhecido como infinito atual**. (1925, pág. 373)

Enquanto na análise o infinito aparece no conceito de limite, como o infinitamente grande ou o infinitamente pequeno a partir da concepção de infinito potencial, encontramos na teoria de conjuntos uma *atualização* do conceito de infinito. Para Hilbert, o verdadeiro infinito é aquele que aparece como uma coleção inteiramente dada, completada, atualizada.

Ele afirma que não há razões, a partir das teorias físicas do universo, para acreditar na existência do infinitamente grande, do infinitamente pequeno, ou mesmo de qualquer coisa no mundo que corresponda a uma coleção infinita. A ciência moderna provou que matéria, eletricidade e energia não são infinitamente divisíveis e que a infinita divisibilidade do contínuo é uma operação que existe apenas em pensamento. Na astronomia, a tese mais aceita do universo era (e ainda é) que o espaço é *finito* e *ilimitado*. Pois, na tentativa de provar que o espaço era infinito, foram cometidos erros grosseiros. Do fato de que além de uma certa porção de espaço existe sempre mais espaço, segue somente que o espaço é ilimitado, mas não que seja infinito. Ou seja, ilimitado e finito são conceitos que não se excluem. A geometria elíptica ofereceu um universo finito como modelo natural. Einstein havia mostrado que um universo finito é possível e que todos os resultados da astronomia eram compatíveis com a hipótese de um universo elíptico.

Em suas palavras,

> Nosso resultado geral é que o infinito não se encontra em lugar algum na realidade. Não existe na natureza e nem oferece uma base legítima para o pensamento racional. (...) O papel que resta ao infinito é somente o de uma ideia – se entendemos por uma ideia, na terminologia de Kant, um conceito da razão que transcende toda experiência e que completa o concreto como uma totalidade – uma ideia em que podemos confiar sem hesitar graças ao quadro conceitual erigido por nossa teoria. (1925, pág.392)

Entretanto, para Hilbert, o fato de não existir alguma coisa no mundo que corresponda a coleções infinitas, não implica que a sua utilização na matemática não esteja justificada. A introdução de um conceito em uma teoria é justificada se:

(i) Pudermos provar a consistência da teoria. Isto é, se pudermos demonstrar, por meio de regras de inferências, que dos axiomas não se pode derivar uma contradição;
(ii) Produzir uma teoria fecunda.

O fato de não existir (na realidade) não é condição para a não introdução de um determinado conceito na matemática. Isto é, não é pelo fato de não existirem números imaginários, que não está justificada a teoria dos números complexos. Além da consistência da teoria, a condição para utilizar o conceito de números imaginários ($i=\sqrt{-1}$) é a fecundidade. A aplicabilidade dos números complexos é vasta. Na matemática, por exemplo, os números imaginários garantem a determinação das raízes das equações do 2º grau que possuem o discriminante (delta) negativo e permitem a representação e as operações de vetores no plano. Os números complexos também são muito úteis na aerodinâmica. A teoria das funções complexas permitiu calcular a *força de levantamento* responsável pela sustentação do vôo de um avião, o que permitiu um rápido progresso aeronáutico. Dessa forma, o fato de números imaginários não serem empíricos não pode ser determinante para a não introdução desse conceito na teoria. Da mesma forma, a introdução do conceito de infinito na matemática está justificada somente se, tal conceito não produz contradições dentro da teoria e se a introdução do mesmo for fecunda. E obviamente ela é fecunda, dada a enorme riqueza de resultados obtida em diversos ramos da matemática, tais como análise, topologia, geometria projetiva, etc.

Sendo assim, para Hilbert, a existência dos objetos matemáticos é determinada por um critério puramente formal. Isto é, um objeto matemático só existe se ele não provocar contradição quando inserido em uma determinada teoria. Nesse sentido, essa teoria matemática é válida se for consistente.

A solução proposta por Hilbert independe da realidade ontológica que se atribua ao infinito, uma vez que as teorias matemáticas que supõem um infinito atual são representadas por sistemas formais. Nesse sistema, uma proposição é considerada verdadeira ou falsa em função da sua forma e não do seu conteúdo. Como não existem coleções infinitas no mundo, basta representar as proposições que lhes fazem referência por fórmulas vazias de sentido e encadeadas por regras explícitas. Essas proposições que fazem referências ao infinito, destituídas de qualquer significado empírico, são as "*proposições ideais*" de sua teoria, pois se referem a *"elementos ideais"*. A proposta de Hilbert retira a questão do âmbito semântico e a coloca no âmbito sintático.

Segundo Hilbert, "*podemos conceber a matemática como uma coleção de fórmulas de duas espécies: primeiramente aquelas às quais correspondem as comunicações de asserções finitárias com sentido e, em segundo lugar, outras fórmulas sem significado e que são a estrutura ideal de nossa teoria"* (1925, pág. 380). Os elementos ideais de sua teoria dariam conta da introdução de objetos não empíricos, tais como o infinito e os números imaginários, como objetos matemáticos. Contudo, para legitimar a utilização de tais objetos pela matemática, é necessário mostrar que esse conjunto de fórmulas é consistente. Isto é, temos que demonstrar que o conjunto formado pelas asserções ideais, que fazem referências ao infinito como totalidade atual, e pelas asserções finitistas, que fazem referência a elementos presentes na experiência, é um conjunto consistente. Ou seja, que dele não podemos derivar contradições.

Na seção seguinte, vamos mostrar a restrição que Hilbert faz a raciocínios finitários em seu programa. Segundo ele, "*o direito de operar com o infinito só pode ser assegurado através do finito"* (1925, pág.392). Podemos caracterizar o raciocínio finitista pelo fato de os seus objetos serem concretos e não apenas hipoteticamente postulados. E, também porque a legitimidade dos processos de cálculo ou definição só se dá quando se garante que os mesmos terminem em um processo finito de passos.

3.2 - O Finitismo:

Segundo Hilbert, *"é possível, de uma maneira puramente intuitiva e finitária – do mesmo modo como obtemos as proposições verdadeiras da teoria dos números – conseguir as intuições que garantam a confiabilidade do aparato matemático"* (1925, pág. 377). Para ele, a matemática não pode ser fundamentada somente na lógica, como pretendiam Frege e Dedekind. Nesse ponto, ele concorda com Kant: a matemática não deve depender apenas da lógica. Existem pressupostos fundamentais para a matemática que não são de natureza lógica:

> Ao reconhecer que existam tais pré-requisitos, que devem ser levados em conta, encontramo-nos em pleno acordo com os filósofos, notadamente com Kant. Já Kant havia ensinado e isso é parte integral de sua doutrina, que a matemática trata de um tema independente da lógica, portanto a matemática não pode e nem poderá nunca ser fundamentada somente na lógica. (1925, p. 376)

As deduções e as operações lógicas devem considerar objetos concretos, de natureza não lógica, que seriam dados à intuição através da experiência imediata. Ou seja, a intuição seria capaz de fornecer os objetos para o entendimento. Tais objetos são dados da experiência imediata do sujeito com o mundo e estariam fora do escopo de qualquer fundamentação lógica, uma vez que eles constituiriam a matéria prima de todo o pensar, incluindo o pensar matemático e o pensar lógico.

Na matemática, esses objetos aparecem como símbolos imediatamente claros e auto-evidentes. Na teoria finitária dos números, tais objetos consistem nos próprios símbolos concretos, cuja *estrutura é imediatamente clara e reconhecível*: |, | |, | | |, | | | | ,... Apreendemos tais objetos concretos pela intuição, essa percepção é dada de forma imediata, isto é, não é mediada por conceitos, definições e nem por qualquer tipo de raciocínio. Eles não possuem um aspecto semântico, mas sintático. Ou seja, esses objetos, ao mesmo tempo que exibem o elemento intuitivo, também têm a propriedade de ser símbolos para um sistema formal, pois são esvaziados de sentido.

Junto a esses símbolos, temos outros que possuem significado e que facilitam a manipulação e a comunicação dos elementos básicos. Por exemplo, o símbolo 3 é usado como uma abreviação para o símbolo | | |,   o símbolo 4 como uma abreviação para o símbolo | | | |. Portanto, o símbolo concreto | | | é facilmente reconhecível pela intuição imediata, enquanto que o símbolo 3 não, pois esse é uma abreviação do símbolo concreto.

Temos ainda símbolos como +, = e > que são utilizados para comunicar proposições. Por exemplo, ao afirmar que 2+3 = 3+2 - o que Hilbert chama de asserção real ou finista, pois se refere a objetos concretos - pretendemos comunicar que 2+3 e 3+2, levando em conta as abreviações, são o mesmo símbolo, a saber, o símbolo numérico | | | | |. Ao afirmar que 3 > 2, pretendemos comunicar que o símbolo | | | é mais longo que | |. Isto é, que | | é uma parte própria de | | |. A utilização de letras como variáveis também é admitida. Isto é, afirmar que a+b=b+a é comunicar que essa igualdade se verifica sempre que as variáveis forem substituídas por numerais.

Dito isso, Hilbert pode dar o primeiro exemplo para ilustrar a abrangência de seu método finitário de dedução. Para isso, apresenta o maior número primo conhecido à sua época:

$$p = 170\ 141\ 183\ 460\ 469\ 231\ 731\ 687\ 303\ 715\ 884\ 105\ 727$$

Pelo método de Euclides, sabemos que entre p + 1 e p! + 1 se obtém, pelo menos, um novo número primo maior que p. Se dissermos, então, que entre p + 1 e p! + 1 existe pelo menos um novo número primo, não estamos fazendo nada mais que afirmar que ou p + 1, ou p + 2, ou p + 3, ..., ou p! + 1 é um novo número primo maior que p. O existencial na afirmação acima não é empregado de maneira ilegítima, já que não se projeta sobre um campo infinito e indeterminado. Esse existencial apenas abrevia o processo de fatoração de p. O novo número primo p + k será algum número entre p e p! + 1. De modo que o teorema Euclidiano,

$$(1) \qquad p < p + k \leq p! + 1$$

expresso dessa forma, se adapta perfeitamente à ideia de uma matemática e de um método de deduções finitários. Enquanto que a afirmação parcial desse teorema,

$$(2) \qquad p < p + k$$

não condiz com a proposta finitária de Hilbert.

Embora a afirmação (2) expresse uma ideia mais geral que (1), a primeira proposição é mais forte que a segunda. Pois (1) possui um conteúdo mais delimitado e, portanto, mais significativo que (2). De acordo com a proposta de uma matemática finitária, devemos optar pelas proposições com um conteúdo claramente determinado, ao invés de optar por aquelas onde isso não ocorre.

O raciocínio que conduz de (1) a (2) envolve, segundo Hilbert, um passo transfinito. Tal passo pode conduzir a proposições não significativas se esquecermos, por exemplo, que só podemos obter (2) como generalização de (1). Isto é, de um ponto de vista finitarista, (2) não pode ser considerada uma proposição auto-evidente, ou independente de (1).

Segundo a concepção finitária, uma proposição só é significativa quando ela é elemento de um universo significativo, ou seja, determinado.

> De nossa posição finitária, uma proposição existencial da forma "existe um número com uma certa propriedade" em geral só tem significado como uma proposição parcial, isto é, como parte de uma proposição melhor determinada. (1925, p. 378)

Uma proposição só pode ser considerada significativa quando fizer parte de uma coleção previamente especificada de proposições significativas. Essa tal coleção só é possível quando nos atemos àqueles objetos concretos, extra-lógicos, que fundamentam o pensamento. Isto é, quando nos mantemos dentro dos limites do finito e aceitamos verdades auto-evidentes como a proposição: (A) $a + 1 = 1 + a$.

Se uma proposição qualquer não puder ser colocada na forma de uma disjunção finita, então estamos diante do infinito. E, do mesmo modo, um passo transfinito é dado quando negamos uma proposição geral válida, como a proposição (A).

É importante ressaltar que, dessa perspectiva finitária, as leis aristotélicas como $\boldsymbol{\alpha \vee \sim\alpha}$**,** por exemplo, perdem sua validade como na instanciação (A) $\vee$ ~(A). Pois, tal afirmação tem a possibilidade da proposição (A) ser falsa, o que não se sustenta, já que (A) é sempre verdadeira. Ou seja, sob a perspectiva finitária, as leis aristotélicas não valem. Pois, elas são universais e estendem-se naturalmente para além de conjuntos parciais.

Hilbert se vê diante da delicada situação de rever a universalidade das leis aristotélicas. E, de fato, não é sua intenção abandoná-las. Para ele, essas leis representam uma conquista permanente para a matemática e para o pensamento em geral. É aqui, então, que ele vai recorrer ao método dos elementos ideais, para resgatar a abrangência das leis aristotélicas. Tal método consiste em: introduzir alguns elementos que possuem o poder de generalizar aquelas proposições numéricas gerais sempre válidas para valores arbitrariamente determinados.

Trata-se de um novo processo de abstração, em que deixamos de lado o campo dos valores numéricos e suas representações para ceder lugar a elementos idealizados não significativos, que ganharão significado quando interpretados em certos contextos (que podem ser puramente lógicos ou puramente matemáticos). Dessa maneira, as leis aristotélicas são preservadas no projeto finitarista. Com a inserção dos elementos ideais, não tratamos mais de valores numéricos gerais ou arbitrários. Tratamos de símbolos puramente formais que expressam estruturas gerais que independem da intuição, como por exemplo, as leis de Aristóteles.

Dessa forma, podemos expressar uma proposição, em base finitária, sem comprometer, por exemplo, *a lei do terceiro excluído*. Tal proposição recebe o nome de *asserção ideal*. Ela não existe por si mesma e não é por si só significativa. Ou seja, a asserção ideal não é representante de nenhum aspecto da natureza. É esse distanciamento da intuição que permite aos elementos ideais preservar as leis aristotélicas no corpo da proposta finitarista.

A asserção ideal "a + b = b + a" não possui um significado imediatamente dado por uma intuição. Apenas mostra a relação aceita entre os elementos inseridos nela. Essa fórmula apenas enuncia uma estrutura a ser observada, sem qualquer referência ao seu possível conteúdo. Ao se substituir os elementos ideais *a* e *b* pelos símbolos *1,2,3,4,...,a,b,...*, obtemos proposições finitárias significativas, tais como: $2 + 3 = 3 + 2$ e $5 + 7 = 7 + 5$. E esse ato de substituição é um procedimento de prova, ainda que muito simples.

Os operadores lógicos (∨, ∧, →, ~) devem ser revistos para se adequarem à teoria finitária. Como se trata de proposições não significativas, os operadores lógicos cumprem um papel diferente daquele que assumem em proposições significativas. Logo, juntamente com os demais símbolos matemáticos, são adicionados os operadores lógicos ideais: ∨, ∧, →, ~. E juntamente com as variáveis a,b,c,..., das equações numéricas e das fórmulas gerais válidas, são introduzidas as variáveis proposicionais A, B, C, ..., Z. Tanto os símbolos lógicos simples (variáveis proposicionais e operadores), quanto os complexos (fórmulas bem formadas), são destituídos de qualquer significado imediatamente dado nas asserções ideais.

Para Hilbert, essa é uma forma segura de construir argumentos e produzir inferências de maneira mais geral que as equações matemáticas restritas às proposições significativas. Esse novo paradigma de argumentação não acrescenta nenhum novo elemento significativo ao conhecimento matemático. Ou seja, não cria nenhum objeto, nem inventa uma nova intuição. O que ele faz é garantir determinada estrutura universalmente válida, garantida pelas regras gerais do pensamento. Nessa estrutura algumas proposições cumprem o papel de axiomas e outras, o papel de teoremas, que são as proposições derivadas de axiomas por meio de regras determinadas.

Notamos a importância que a intuição tem na teoria de Hilbert. Entretanto, ele não se restringe à intuição e afirma que tal restrição significaria *desmembrar e mutilar nossa ciência*, correndo o risco de *perder alguns dos nossos tesouros mais valiosos*, tais como o conceito geral de número irracional, de função e os números transfinitos de Cantor. E afirma:

> Lembremo-nos de que somos matemáticos e de que, como matemáticos, muitas vezes nos encontramos em situações difíceis, das quais fomos salvos pelo método engenhoso dos elementos ideais. (1925, pág.379)

Obtemos asserções ideais quando *continuamos de maneira óbvia e natural o desenvolvimento que a teoria dos fundamentos da matemática já traçou*. Como o que Cantor fez ao desenvolver a teoria dos números transfinitos, mostrando que os números inteiros finitos e os números inteiros transfinitos são formados pelo mesmo princípio. Em suas palavras, *"obtemos os números transfinitos simplesmente estendendo o processo de contagem além da enumeração ordinária, isto é, através de uma continuação natural e unicamente determinada da contagem usual finita. Da mesma forma como, até agora, temos contado somente o primeiro, segundo, terceiro,.... elemento de um conjunto, contamos também o ω –ésimo, (ω+1)-ésimo, ω^{ω} –ésimo elemento"* (1925, pág. 375).

Hilbert concebe a matemática como um conjunto de asserções finitárias e asserções ideais. Entretanto, as operações e deduções lógicas só produzem resultados confiáveis quando aplicados à primeira:

> (...) alguma vez a inferência lógica contentual nos decepcionou ou abandonou quando a aplicamos a objetos reais ou eventos? Não, a inferência lógica contentual é indispensável e ela somente nos decepcionou quando aceitamos noções arbitrárias, em

> particular aquelas sob as quais um número infinito de objetos está subsumido. (1925, pág. 376)

Para ele, se provamos que um conjunto de asserções finitárias é consistente (isto é, que não há contradições) e incluímos asserções ideais que também não produzem contradição, então o sistema é consistente e *"O que já vivenciamos por duas vezes, uma vez com os paradoxos do cálculo infinitesimal, e outra vez com os paradoxos da teoria dos conjuntos, não ocorrerá uma terceira vez, nem nunca mais*". (1925, p. 383)

Na conferência *Sobre o Infinito*, Hilbert vai muito além de uma defesa do infinito atual de Cantor e de sua matemática transfinita. Ele lança as bases de seu programa, que pretende fundamentar a matemática, isto é, *estabelecer de uma vez por todas a confiabilidade definitiva dos métodos matemáticos*. (1925, p. 370)

O método proposto por Hilbert para a fundamentação da matemática é o axiomático. Isto é, os axiomas são os primeiros elementos estipulados na teoria, que são aceitos sem a necessidade de demonstração. Com base nos axiomas, os teoremas e suas demonstrações são desenvolvidos. Cada axioma deve ser independente dos demais e o corpo dos axiomas deve ser capaz de gerar toda matemática existente, sem contradições. Entretanto, Hilbert rompe com a tradição, que fazia uso do paradigma do método axiomático desenvolvido por Euclides para a fundamentação da geometria, *o método axiomático no sentido do conteúdo*. E elabora o método *axiomático no sentido da forma.*

O método axiomático no sentido do conteúdo, segundo Hilbert e Bernays[14], é quando, "***em relação a um corpo de doutrina estabelecida****, se tenta idealizar os conceitos nela contidos e individualizar um pequeno número de proposições das quais todo corpo da doutrina pode ser logicamente derivado"* (Lourenço, 2004, pág. 18).

De maneira diferente, o método axiomático no sentido da forma *"é a* ***construção de uma teoria abstrata, desligada de qualquer corpo conhecido de doutrina****, propondo conceitos primitivos e proposições arbitrárias, não dependendo de qualquer referência a um sentido para as expressões que a representam"* (Lourenço, 2004, pág. 18). Isto é, uma teoria sintática, esvaziada de sentido, em um primeiro momento. Num segundo momento, é necessário

[14] Discípulo de Hilbert.

especificar uma interpretação na qual todos os axiomas resultem em proposições verdadeiras, ou seja, é necessário encontrar um modelo para tal teoria.

A justificação dos elementos ideais em sua teoria se dá, se conseguimos demonstrar que o domínio dos enunciados matemáticos (proposições finitárias + proposições ideais) é uma extensão conservativa do domínio das proposições finitárias. Isto é, se pelo método da axiomatização formal, demonstramos que do conjunto de proposições finitárias não se podem derivar contradições, ao incluirmos às proposições ideais também não iremos derivar contradições. O método proposto por Hilbert é o único capaz de introduzir os elementos ideais de sua teoria, mantendo o rigor que ele almeja. A axiomatização formal acomoda perfeitamente as proposições ideais, uma vez que as trata no seu aspecto sintático. Isto é, como uma sequência de símbolos, esvaziada de semântica, que as formaliza numa determinada linguagem formal. Eis o sentido finitista que as proposições ideais devem possuir segundo Hilbert.

CONSIDERAÇÕES FINAIS:

Ao examinarmos o manifesto do Programa de Hilbert, proferido em sua conferência intitulada “Sobre o infinito”, verificamos que sua teoria estritamente finitista além de ser perfeitamente conciliável com a noção de infinito atual desenvolvida e matematizada por Georg Cantor, ainda justifica a introdução do infinito atual como objeto matemático.

No que diz respeito ao aspecto ontológico do infinito, a teoria de Hilbert não necessita de sua existência real e concreta. A ciência da época já dizia que não se encontrava o infinito em nenhuma parte da natureza, nem no infinitamente pequeno, nem no infinitamente grande. Entretanto, para Hilbert, a existência do infinito - enquanto objeto matemático - é determinada por duas condições: se ele não gera contradições no sistema em que for inserido e se ele produz uma teoria fecunda.

Com relação à segunda condição, não há dúvidas. Uma vez que o infinito é um conceito vital que permitiu um enorme desenvolvimento da matemática.

Com relação à primeira condição, é necessário, primeiramente, provar que a aritmética é consistente (que não há contradições) e é completa (que consegue demonstrar a afirmação ou a negação de qualquer proposição). Depois, é necessário provar que ao introduzirmos o conceito de infinito, que é um elemento ideal, o sistema continua livre de contradições. Isto é, se conseguirmos criar uma extensão conservativa (aritmética + conceito de infinito) consistente.

A questão da justificação do infinito - enquanto objeto matemático - está inserida numa questão maior, que é a da fundamentação da matemática. Hilbert desenvolveu o seu programa, que segundo Bernays:

> “A grande vantagem do método de Hilbert é que os problemas e as dificuldades que se apresentam nos fundamentos da matemática podem ser transferidos do domínio epistemológico-filosófico para o domínio matemático.” (1922, pág. 1118)

Hilbert desenvolveu um programa meticuloso com a finalidade de fundamentar toda a matemática. Para garantir a consistência do programa, era necessário demonstrar matematicamente, em bases finitistas, a consistência e a completude da aritmética.

Kurt Gödel, matemático austríaco, na tentativa de demonstrar que a aritmética era consistente e completa, chegou a um resultado inesperado: Se a aritmética é consistente (e ela é), então ela não é completa. Ou seja, haverá alguma proposição no sistema que não poderá ser afirmada ou negada dentro desse sistema. Afirmações sobre as quais não se pode decidir – Os indecidíveis[15].

Em 1931, Gödel publicou o artigo "*Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I*", onde provava dois teoremas de consistência e completude, hoje conhecidos como *teoremas de incompletude de Gödel*: O primeiro afirmava que um sistema efetivamente gerado capaz de dizer certas verdades elementares sobre aritmética não pode ser consistente e completo. O segundo teorema dizia que, num tal sistema, se este for consistente, então não se pode provar sua consistência.

Por uma teoria consistente, entende-se uma teoria que não gera contradições, ou seja, não existe nela uma proposição P de modo a se poder provar tanto P como sua negação formal ~P. Já uma teoria completa é aquela que permite concluir a veracidade ou falsidade de qualquer sentença que se possa formular, ou seja, para toda proposição P, podemos provar P ou provar ~P.

Uma teoria é *efetivamente gerada* quando, seus axiomas são recursivamente enumeráveis, ou seja, quando temos um axioma conhecido e, a partir de cada axioma da teoria, podemos encontrar um novo axioma através de uma regra explícita. Quando os axiomas da teoria são em número finito, podemos concluir que a teoria é efetivamente gerada, uma vez que todo conjunto finito é recursivamente enumerável. Se a teoria é efetivamente gerada, então seus axiomas são enumeráveis. Todavia a recíproca não é válida. Isto porque, para que os axiomas sejam recursivamente enumeráveis, eles precisam de uma expressão recursiva explícita, que envolva somente os números naturais. Uma vez conhecidos esses conceitos, podemos enunciar os dois teoremas de incompletude de Gödel, cujas demonstrações estão no anexo 3.

> ***Primeiro Teorema de Gödel****: Numa teoria consistente efetivamente gerada capaz de expressar a aritmética elementar, existe uma sentença verdadeira, mas indemonstrável.*

[15] O que mais tarde descobriram ser o caso da Hipótese do Contínuo.

Segundo Teorema de Gödel*: E impossível provar a consistência de uma teoria consistente efetivamente gerada capaz de expressar a aritmética elementar.*

Apesar de os teoremas da incompletude de Gödel terem demonstrado que o Programa de Hilbert fracassou no que diz respeito a uma prova finitista da consistência e da completude da aritmética, o método axiomático formal, desenvolvido por David Hilbert, é o modelo padrão do "fazer" matemática na atualidade. Isso é, apesar de ter sido matematicamente refutado, o programa de Hilbert tem enorme relevância filosófica no que diz respeito à construção das bases da matemática clássica. Ainda que não tenha logrado êxito na fundamentação das *Matemáticas*.

Quando decidi estudar e pesquisar sobre o infinito, que sem dúvidas é "um dos deuses mais lindos" – parafraseando um músico e compositor do século XX, não tinha a noção do cenário que estava por trás da história dos conceitos e dos objetos da matemática, no que diz respeito à construção e às justificativas dos mesmos. Em um primeiro momento, fiquei completamente atônita e "*sem chão"* por descobrir que a matemática por si só não dava conta de si mesma. Que ela, sozinha, não dava conta de justificar seus objetos e fundamentar a sua prática. Não foi isso o que me ensinaram até ali. Havia aprendido sobre uma matemática perfeita, autossuficiente, que a tudo decidia: a ciência de todas as ciências. E fiquei bastante decepcionada com as suas limitações. Com o passar do tempo e o amadurecimento proporcionado pelos conhecimentos, fruto da pesquisa, hoje tenho a matemática como a mais humana de todas as ciências.

REFERÊNCIAS:

ACZEL, A. *O mistério do alef: a matemática, a Cabala e a procura do infinito*. Tradução Ricardo Gouveia. São Paulo: Globo, 2003. 218p. Título original: The mistery of the Aleph.

ÁVILA, G. *A Teoria dos Conjuntos e o Ensino de Matemática*. Revista do Professor de Matemática (RPM). São Paulo, n. 4, p. 4-8, 1. sem. 1984.

ÁVILA, G. *Cantor e a Teoria dos Conjuntos*. Revista do Professor de Matemática (RPM). São Paulo, n. 43, p. 6-14, 2000.

ANDRADE, M. *Um breve passeio ao infinito real de Cantor*. V Bienal da SBM. Paraíba, outubro de 2010.

ARISTÓTELES. *Física*. Madrid: Consejo superior de investigaciones científicas, 1996 [350 a.C.].

BICUDO, I. *A hipótese do continuum ou o primeiro problema de Hilbert*, in: Revista Brasileira de História da Matemática, Vol.3, n°5 (Abril/2003 - Setembro/2003), org. Sociedade Brasileira de História da Matemática, Unesp,Rio Claro, pp15-26.

BOLZANO, B., *Les Paradoxes de L'infini*. Introduction, Traduction de L'Allemand et notes par Hourya Sinaceur. Éditions du Seuil, Paris, 1993 [1851].

BOYER, C B. *Introdução à História da Matemática*, 2ª ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2001.

CANTOR, G. *Foundations of a General Theory of Manifolds: A Mathematical-Philosophical Investigation into the Theory of the Infinite* (1883). IN: EWALD, W (Ed.) *From Kant to Hilbert, A Source Book in the Foundations of Mathematics*. Volume II. Oxford: Clarendon Press, 2000.

______________. *Contributions to the Founding of Theory of Transfinite Numbers* (1895). Dover Publications, New York, 1955.

CARNIELLI, W. e EPSTEIN, R., *Computabilidade, Funções Computáveis, Lógica e os fundamentos da Matemática*, 2a edição. São Paulo: Editora Unesp, 2009

COHEN, P., *Comments on the Foundations of Set Theory*, em D. Scott (ed.) Axiomatic Set Theory, American Mathematical Society, 1971.

DAUBEN, J. *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite*. Princeton University Press, New Jersey, 1990.

DEDEKIND, R. *Essays on the Theory of Numbers. I. Continuity and Irrational Numbers* (1872). *II. The Nature and Meaning of Numbers* (1888). Dover Publications, New York, 1963.

EUCLIDES. *Os Elementos*. São Paulo: Editora Unesp, 2009.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*: Tradução: Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.

EWALD, W. (Ed.) *From Kant to Hilbert, A Source Book In the Foundations of Mathematics*. Oxford: Clarendon Press, 2000.

GALILEI, G. *Duas novas ciências*. Tradução: L. Mariconda e Pablo Rúben Mariconda. 2. ed. São Paulo: Nova Stella Editorial/Instituto Italiano di Cultura,1988.

GÖDEL, K. *O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo*. 2ª edição. Antologia organizada e traduzida por Manuel S. Lourenço. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2009.

GÖDEL, K. *On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems*, tradução de B. Meltezer, Dover Publications, Nova Iorque, 1962.

GÖDEL, K. *On formally undecidable propositions of Principia Mathematica and related systems*, tradução parcial de Martin Hirzel, disponível no site: http://www.research.ibm.com/people/h/hirzel/papers/canon00-goedel.pdf.

GOMIDE, W. *O Infinito contado por Deus: Uma interpretação Dedekindiana do conceito de número ordinal transfinito de Cantor*. PUC-Rio, Rio de Janeiro, 2006.

HALLETT, M. *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*. Oxford: Clarendon Press, 1996.

HEIJENOORT, J. (Ed.). *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic, 1879 – 1931*, Harward U.P., 1981.

HILBERT, D. *On the Infinite* (1925). IN: van HEIJENOORT, J. (Ed.), *From Frege to Gödel, A Source Book in Mathematical Logic, 1879 -1931*, Harward U. P., 1981.

______________. *As novas fundamentações da matemática* (1922). IN: EWALD, W (Ed.) *From Kant to Hilbert, A Source Book in the Foundations of Mathematics*. Volume II. Oxford: Clarendon Press, 2000.

_______________. *Problemas Matemáticos*: Conferência proferida no 2° Congresso Internacional de Matemáticos realizado em Paris em 1900, trad. Sergio Nobre. in: Revista Brasileira de História da Matemática, Vol.3, n°5 (Abril/2003 — Setembro/2003), org. Sociedade Brasileira de História da Matemática, Unesp, Rio Claro, pp. 5-12.

LIMA, Elon Lages, et al. A matemática do ensino médio – volume 1. 10 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

LOURENÇO, M. *Os Elementos do Programa de Hilbert*. Centro de Filosofia da Faculdade de Letras de Lisboa, 2004.

MORRIS, R. *Uma breve história do infinito: dos paradoxos de Zenão ao universo quântico*. Tradução: Maria Luiza X. Borges. Rio de Janeiro: Zahar, 1998.

NAGEL, E. e NEWMAN, J. *Gödel's Proof*, Routledge & Kegan Paul Ltd.,1959.

NASCIMENTO, G., *Estudo da evolução da teoria dos números transfinitos de Cantor por meio de sua correspondência com Dedekind*. Rio de Janeiro: UFRJ-HCTE, 2009.

NETTO, F. *Os teoremas de Gödel*. Cadernos do IME/UERJ, Série Matemática, Volume 23, 2011.

PRÉ-SOCRÁTICOS. *Coleção "Os Pensadores*". São Paulo: Editora Nova Cultural, 1996.

SANTOS, Eberth Eleutério dos. *O Infinito de Georg Cantor: uma revolução paradigmática no desenvolvimento da matemática*. Campinas, SP, 2008.

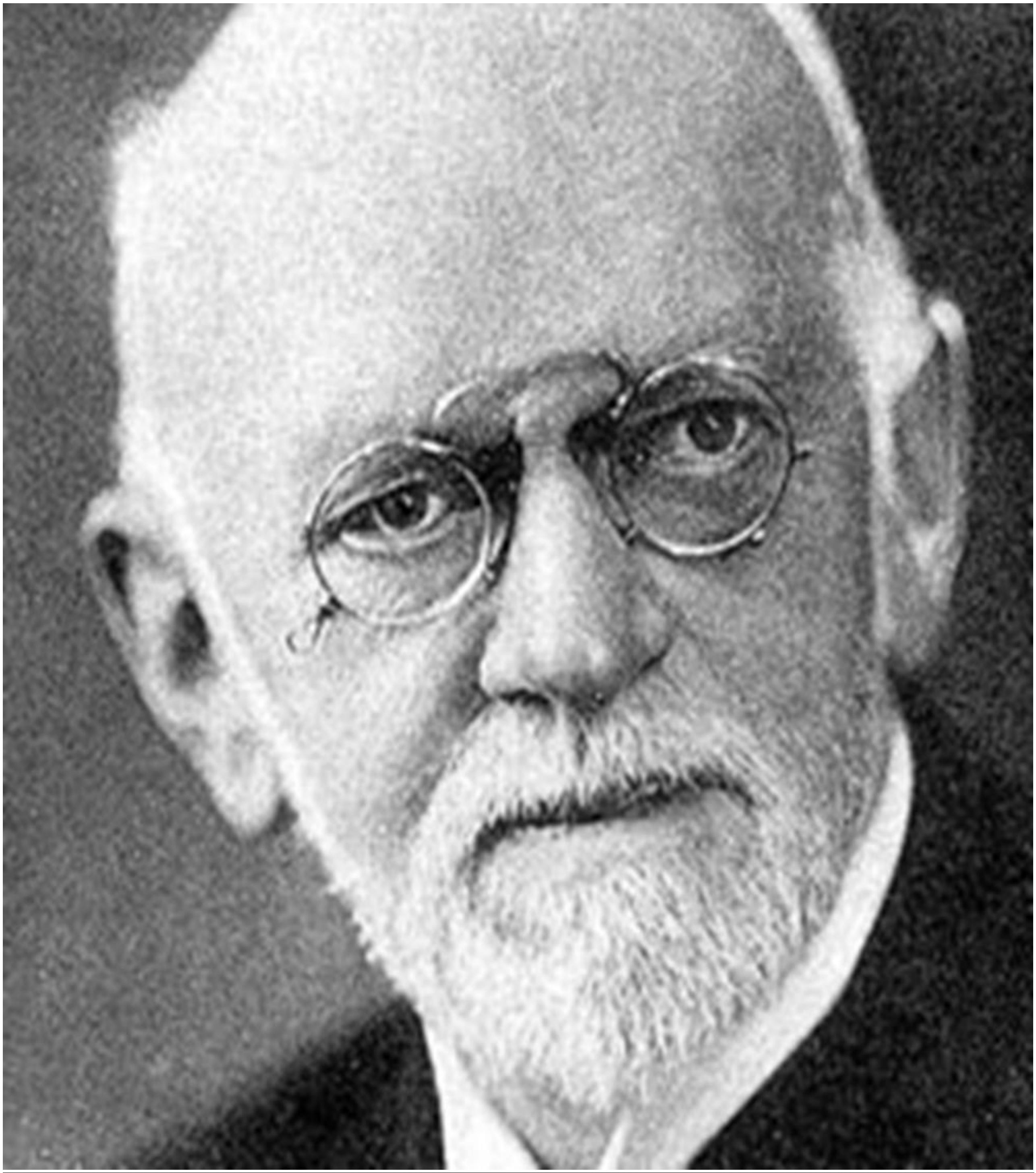
VIERO, A. *Sistemas axiomáticos Formalizados: A questão da desinterpretação e da formalização da axiomática.* São Paulo: editora da Unicamp, 2011.

Anexo 1:

Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918)

Crédito: Martin-Luther Universität, Halle-Wittenberg. UA Halle: Rep. 40 C11

Anexo 2:



David Hilbert (1862-1943)

Anexo 3:

Primeiro Teorema de Gödel: **Numa teoria consistente efetivamente gerada capaz de expressar a aritmética elementar, existe uma sentença verdadeira, mas indemonstrável.**

Vamos associar, de forma unívoca, um número natural a cada símbolo. Fixamos um inteiro positivo para cada símbolo primitivo constante. Para os símbolos variáveis, devemos estabelecer uma regra de enumeração, já que o número destes numa sentença é indefinido. Esta enumeração de símbolos deve ser feita de forma adequada à teoria. Em seguida, utilizam-se os números primos para associar univocamente um número natural a cada sentença, que é uma sequência finita de símbolos que obedece às regras de formação da teoria. Assim, sendo $P \equiv a_1 a_2 \ldots a_n$ e $G(a_i)$ o número associado ao i-ésimo símbolo de P, definimos o número de Gödel de P como sendo $G(P) = P_1^{G(a1)} P_2^{G(a2)} \ldots P_n^{G(an)}$ onde pi é o i-ésimo número primo.

Algo análogo é feito para as demonstrações, que são sequências finitas de sentenças: o número de Gödel da demonstração $d \equiv P_1 P_2 \ldots Pn$ é $G(d) = P_1^{G(P1)} P_2^{G(P2)} \ldots P_n^{G(Pn)}$. Com isso, podemos definir uma função 'subst' que, a cada terno de números naturais x, y, z, retorna o número de Gödel subst (x, y, z) da sentença obtida, substituindo-se, na sentença de número de Gödel x, a variável de número de Gödel y pelo valor do numeral z.

Podemos ainda definir, graças à enumerabilidade recursiva dos axiomas, uma fórmula dem (x, y) que diga que a sequência de sentenças de número de Gödel x é uma demonstração para a sentença de número de Gödel y. Esta fórmula é definida de tal forma que, para cada x e y especificados, dem (x, y) é demonstrável se, e somente se, é verdadeira.

Podemos agora definir uma sentença Γ que, metamatematicamente, diga ser ela mesma indemonstrável. Para tanto, definimos primeiro a fórmula:

$$\alpha \equiv \alpha(y) \equiv \forall x(\neg dem(x,subst(y, Gy, y))),$$

onde Gy é o número de Gödel da segunda variável numérica de uma sentença (a variável 'y' na fórmula α).

Em seguida, definimos a *sentença de Gödel* da teoria,

$$\Gamma \equiv \alpha(G(\alpha)) \equiv \forall x(\neg dem(x,subst(G(\alpha), Gy, G(\alpha)))).$$

Observa-se que Γ é obtida substituindo-se, na fórmula α, a variável y pelo valor de $G(\alpha)$. Logo seu número de Gödel é

$$G(\Gamma) = subst(G(\alpha), Gy, G(\alpha)),$$

valendo então a equivalência

$$\Gamma \equiv \forall x(\neg dem(x, G(\Gamma))).$$

Assim, interpretada metamatematicamente, Γ diz ser ela mesma não demonstrável.

Se Γ fosse demonstrável, sua demonstração corresponderia a um número de Gödel x que satisfaria $dem(x, G(\Gamma))$, donde $dem(x, G(\Gamma))$ seria demonstrável. Assim, seria demonstrável também a sentença $\exists x(dem(x, G(\Gamma))) \equiv \neg\Gamma$. Sendo Γ e $\neg\Gamma$ ambas demonstráveis, teríamos uma teoria inconsistente. Portanto, se a teoria é consistente, Γ é indemonstrável. Mais ainda, vemos agora que a interpretação metamatemática de Γ é válida, logo Γ é verdadeira. Portanto, se a teoria é consistente, existe nela uma sentença Γ que é verdadeira, mas não demonstrável. O que prova o primeiro teorema.

Segundo Teorema de Gödel: É impossível provar a consistência de uma teoria consistente efetivamente gerada capaz de expressar a aritmética elementar.

Para provarmos o segundo teorema, formalizamos o conceito de consistência da teoria sob a forma de uma sentença C. Em meio à demonstração do primeiro teorema, provamos que, se a teoria é consistente, então Γ é verdadeira. Assim, formalizando essa demonstração concluímos que a sentença $C \rightarrow \Gamma$ é demonstrável. Logo, se C fosse demonstrável, por Modus Ponens, Γ também o seria, o que é absurdo sob a hipótese de consistência da teoria. Portanto, a consistência de uma teoria consistente é indemonstrável, como afirma o segundo teorema.

Sob a hipótese de ω-consistência

Uma teoria capaz de expressar a aritmética elementar é dita ω-inconsistente quando nela existe uma fórmula $\phi(x)$ sobre os números naturais tal que se pode provar $\exists x(\phi(x))$ e, para cada x específico, pode-se provar $\sim\phi(x)$. *Caso contrário, a teoria é dita ω-consistente*.

Inconsistência e ω-inconsistência não são a mesma coisa. A ideia é a de que, mesmo existindo um x tal que $\phi(x)$, pode não ser possível encontrá-lo; bem como, mesmo havendo, para cada x, uma demonstração diferente para $\sim\phi(x)$, pode não haver uma demonstração para um x genérico.

Porém inconsistência implica ω-inconsistência: se existe P tal que P e ~P podem ser ambas demonstradas, fazemos $\phi(x) \equiv P$ para provar a ω-inconsistência. Em contraposição, segue que ω-consistência implica consistência.

Com esse novo conceito, Gödel chegou a provar outro resultado: **toda teoria ω-consistente efetivamente gerada capaz de expressar a aritmética elementar é incompleta.** Lembrando que uma teoria é dita incompleta quando apresenta uma sentença indecidível, isto é, uma sentença P tal que não se pode provar P nem ~P.

A sentença indecidível, nesse caso, é própria sentença de Gödel Γ da teoria. Se a teoria é ω-consistente, então é também consistente e, pelo que já foi provado, Γ não pode ser provada. Falta provar que também ~Γ ´e indemonstrável.

Se ~Γ é demonstrável, então e demonstrável ainda a sentença equivalente $\exists x(\phi(x))$, onde $\phi(x) \equiv \mathrm{dem}(x, G(\Gamma))$. Apesar de ~Γ, interpretada metamatematicamente, afirmar haver uma demonstração para Γ, nada garante ser possível encontrar esta demonstração. Apenas se pudermos encontrar um x específico tal que $\phi(x)$ poderemos concluir que Γ é demonstrável. Neste caso, a teoria será inconsistente e, consequentemente, ω-inconsistente.

Mesmo que a teoria seja consistente, podemos provar $\sim\phi(x)$ para cada x especificado, uma vez que se podem provar $\phi(x) \rightarrow \Gamma$ e, por suposição, ~Γ. Temos assim uma fórmula $\phi(x)$ tal que se pode provar $\exists x(\phi(x))$ e, para cada x específico, pode-se provar também $\sim\phi(x)$. A teoria também acaba sendo ω-inconsistente. ***Portanto, se a teoria é ω-consistente, não só Γ, mas também ~Γ é indemonstrável. Ou seja, Γ é indecidível e a teoria é incompleta.***